Corrigé de l'examen de Décembre 2008.

Exercice 1

1. Il est clair que pour tout n f_n est continue (c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et donc mesurable sur $[0,+\infty[$.
Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 2$ on a $1+x+x^2+\ldots+x^n \geq 1+x^2 > 0$, ce dont on déduit que $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ et tout $n \geq 2$.
Comme on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$ (primitive : arctan) on en déduit que f_n est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \geq 2$.

2. Avec la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient que

$$1+x+x^2+\ldots+x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

On en déduit que $f_n(x)$ converge vers 0 si $x \in [1,+\infty[$ et vers $1-x$ si $x \in [0,1]$. De plus on a vu à la question précédente que $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $n \geq 2$; on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n), et on obtient que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. On voit que D_n est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, c'est donc un borélien. [i]

2.(a) Commençons par remarquer que la fonction à intégrer est borélienne et à valeurs positives, donc on peut appliquer le théorème de Tonelli (avec d'un côté la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et de l'autre la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{n-1}$, qui sont toutes deux σ-finies). Si on intègre d'abord par rapport à $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ puis par rapport à x_n, on obtient (pour tout $n \geq 2$) :

$$I_n = \int_{x_n=0}^1 \left(\int_{0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n} x_1 \ldots x_{n-1} dx_1 \ldots dx_{n-1} \right) x_n dx_n \qquad (*)$$

Il reste à utiliser un changement de variables pour trouver notre formule de récurrence ; fixons $x \in]0,1[$ et notons $A_x = \{(x_1,\ldots,x_{n-1})\colon 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x\}$. Alors, posons

$$(u_1,\ldots,u_{n-1}) = \Phi(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (\frac{x_1}{x},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x})$$

Cette fonction est linéaire, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et a une fonction réciproque Ψ définie par $\Psi(u_1,\ldots,u_{n-1}) = (xu_1,\ldots,xu_{n-1})$, dont le déterminant vaut x^{n-1}. Enfin, on voit que

$$0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x \Leftrightarrow 0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < 1 \Leftrightarrow (u_1,\ldots,u_{n-1}) \in D_{n-1} .$$

On peut alors appliquer le théorème de changement de variables, qui nous donne, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\int_{0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x} x_1 \ldots x_{n-1} dx_1 \ldots dx_{n-1} = \int_{D_{n-1}} (xu_1)\ldots(xu_{n-1}).x^{n-1} du_1 \ldots du_{n-1} = x^{2n-2} I_{n-1} .$$

En utilisant la formule $(*)$, on obtient finalement que pour $n \geq 2$

$$I_n = \int_0^1 x^{2n-2} I_{n-1}.x dx = I_{n-1} \int_0^1 x^{2n-1} dx = \frac{I_{n-1}}{2n} .$$

[i] Il était inutile d'en dire plus sur votre copie ; pour justifier que D_n est ouvert on peut utiliser le fait que chaque ensemble de la forme $\{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_i < x_{i+1}\}$ est ouvert, de même pour $\{(x_1,\ldots,x_n)\colon 0 < x_1\}$ et $\{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_n < 1\}$; donc D_n est l'intersection d'un nombre fini d'ouverts et est par conséquent ouvert. Par contre il est FAUX de dire que D_n est un produit cartésien - faites un dessin quand $n = 2\ldots$

(b) On peut conclure par récurrence, ou alors utiliser le fait que $I_n > 0$ pour tout n et écrire

$$I_n = \frac{I_n}{I_{n-1}} \cdot \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} \cdots \frac{I_2}{I_1} . I_1 = I_1 . \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{I_1}{2^{n-1} n!} \ .$$

Comme on a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, on en déduit que $I_n = \dfrac{1}{2^n n!}$.

Exercice 3

Remarquons déjà que μ est une mesure finie ($\mu(\mathbf{R}) = 3$) et la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ est σ-finie, donc la mesure $\lambda \otimes \mu$ est bien définie.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction, on commence par se demander si la fonction est mesurable ; ici f est continue sur $\mathbf{R}^2$ et est donc mesurable pour la tribu borélienne sur $\mathbf{R}^2$, qui est contenue dans la tribu des ensembles mesurables pour $\lambda \otimes \mu$ [ii].

Ensuite on a en général besoin d'appliquer le théorème de Fubini ou de Tonelli ; comme notre fonction n'est pas à valeurs positives on va utiliser le théorème de Fubini [iii]. On commence donc par regarder si une des intégrales itérées de $|f|$ est finie. On calcule :

$$\int_{\mathbf{R}} \Big(|f(x,y)| d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \big(|f(x,1)| + 2|f(x,2)| \big) d\lambda(x)^{\text{iv}} = \int_{\mathbf{R}} \Big(\frac{1}{x^2+2} + \frac{4}{x^2+5} \Big) dx < \infty \ .$$

(On reconnaît deux fonctions Lebesgue-intégrables dans l'intégrale de droite). Ici a priori pas besoin de calculer explicitement cette intégrale, tout ce qui nous importe est qu'elle soit finie : en effet le théorème de Fubini garantit alors que f est $\lambda \otimes \mu$-intégrable, et qu'on a

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f d(\lambda \otimes \mu) = \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} f(x,y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \big(f(x,1) + 2f(x,2) \big) d\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \Big(\frac{1}{x^2+2} + \frac{4}{x^2+5} \Big) dx \ .$$

(le fait qu'on obtienne la même intégrale en considérant f et $|f|$ vient du fait que ν-presque partout f est à valeurs positives)

Pour calculer la dernière intégrale, il faut savoir intégrer des fractions rationnelles, ce que vous avez dû apprendre à faire en L2 ; on obtient

$$I = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big) + \frac{4}{\sqrt{5}} \arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{5}}\Big) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{4\pi\sqrt{5}}{5} \ .$$

Exercice 4

1. T est fermé donc c'est un borélien (encore une fois T n'est PAS un produit cartésien !).

2. Comme T est borélien, il est mesurable pour $\mu \otimes \nu$; si pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ on note $T^x = \{y \colon (x,y) \in T\}$ et $T_y = \{x \colon (x,y) \in T\}$ alors on a, par définition de la mesure produit :

$$\mu \otimes \nu(T) = \int_{\mathbf{R}} \nu(T^x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} \mu(T_y) d\nu(y) \ .$$

Dans le cas présent,

$$T^x = \begin{cases} [0,x] & \text{si } 0 \le x \le a \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \qquad T_y = \begin{cases} [y,a] & \text{si } y \in [0,a] \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

Par conséquent, la première formule ci-dessus donne

$$\mu \otimes \nu(T) = \int_{[0,a]} \nu([0,x]) d\mu(x) = \int_{[0,a]} G d\mu \ .$$

[ii] Toute partie de $\mathbf{R}$ étant mesurable pour μ, la tribu des parties mesurable pour $\lambda \otimes \mu$ est engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$, où A est borélien et B est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ quelconque ; donc cette tribu contient la tribu borélienne.

[iii] ou alors on peut remarquer que l'ensemble des points où f prend des valeurs négatives est de mesure nulle, mais alors il faut le démontrer ...

[iv] Rappelons que, vu la définition de μ, on a $\int_{\mathbf{R}} g d\mu = g(1) + 2g(2)$ pour toute fonction g.

La deuxième formule amène à

$$\mu \otimes \nu(T) = \int_{[0,a]} \mu([y,a])d\nu(y) \ .$$

Mais comme $[0,a]$ est la réunion disjointe de $[0,y[$ et de $[y,a]$, on a par définition d'une mesure que $\mu([y,a]) + \mu([0,y[) = \mu([0,a])$ et donc, puisque μ est finie, $\mu([y,a]) = F(a) - \mu([0,y[)$.
De plus, comme $\mu(\{y\}) = 0$ par hypothèse (μ est diffuse), on voit que $\mu([0,y]) = \mu([0,y[) + \mu(\{y\}) = \mu([0,y[)$, d'où finalement $\mu([y,a]) = F(a) - F(y)$.
En utilisant cette égalité dans la deuxième formule ci-dessus pour $\mu \otimes \nu(T)$, on arrive à :

$$\mu \otimes \nu(T) = \int_{[0,a]} (F(a) - F(y))d\nu(y) = F(a)\nu([0,a]) - \int_{[0,a]} F d\nu = F(a)G(a - \int_{[0,a]} F d\nu \ .$$

Finalement, on obtient donc que $\int_{[0,a]} G d\mu = F(a)G(a) - \int_{[0,a]} F d\nu$, ou encore

$$\int_{[0,a]} F d\nu + \int_{[0,a]} G d\mu = F(a)G(a) \ .$$

Exercice 5

1. On a par définition $t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)-t}$. Pour $x > 0$ fixé, cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs positives ; par contre pour l'existence de l'intégrale il y a un problème en 0 et un en $+\infty$.
Pour simplifier la rédaction, on va montrer séparément que l'intégrale converge sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
En 0 on a $e^{-t} \sim_0 1$, et donc $t^{x-1}e^{-t} \sim_0 t^{x-1}$, qui est intégrable sur $[0,1]$ puisque $x - 1 > -1$. Comme la fonction qu'on intègre est à valeurs positives, un équivalent suffit à montrer que l'intégrale sur $[0,1]$ converge.
En $+\infty$, on a (par exemple) $\lim t^{x-1}e^{-t/2} = 0$, donc il existe un certain A_x tel que $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ pour tout $t \geq A_x$, et donc $\int_{A_x}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ existe (la fonction à intégrer est positive et majorée par une fonction intégrable). Comme la fonction est continue sur $[1,A_x]$ il est clair qu'elle est intégrable sur $[1,A_x]$ et donc finalement $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.
Par conséquent, l'intégrale $\Gamma(x)$ converge pour tout $x > 0$.

2. Ici il faut faire une intégration par parties ; mais on n'a aucun théorème qui permette de justifier des intégrations par parties sur des intégrales généralisées ! On commence donc par fixer a, A tels que $0 < a < A$, et on calcule

$$\int_a^A t^x e^{-t}dt = \Big[-t^x e^{-t} \Big]_a^A + \int_a^A x t^{x-1}e^{-t}dt \ .$$

En faisant tendre a vers 0 et A vers $+\infty$ on obtient (puisqu'on a montré que $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ sont des intégrales convergentes, et que l'expression entre crochets tend vers 0), que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
D'autre part on voit que $\Gamma(1) = 1$, par conséquent une récurrence immédiate donne $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3.a. Notons tout d'abord que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$.
De plus, quand x tend vers 0 $t \mapsto t^x e^{-t}$ converge simplement vers e^{-t}, et d'après l'indication de l'énoncé on a $0 \leq t^x e^{-t} \leq (1+t)e^{-t}$ pour tout $x \in]0,1]$. Commme la fonction $t \mapsto (1+t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0+\infty[$ on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que $x\Gamma(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ quand x tend vers 0.

b. Comme la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est à valeurs positives, il est clair que, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^x t^{x-1}e^{-t}dt + \int_x^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq \int_x^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \ .$$

D'autre part, sur $[x,+\infty[$ on a $t \geq x$, et donc pour $x \geq 1$ et $t \geq x$ on a $t^{x-1} \geq x^{x-1}$. En combinant ces inégalités, on obtient finalement que, pour $x \geq 1$:

$$\Gamma(x) \geq x^{x-1} \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = x^{x-1}e^{-x} \ .$$

c. D'après 3.a on a $\lim\limits_{x\to 0} x\Gamma(x) = 1$, par conséquent $\Gamma(x) \sim_0 \dfrac{1}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.
Par ailleurs, on a pour tout $x \geq 1$ que

$$\Gamma(x) \geq x^{x-1}e^{-x} = e^{(x-1)\ln(x)-x}$$

Puisque $(x-1)\ln(x) - x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
4. Notons déjà que $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (et donc continue en x à t fixé et mesurable en t à x fixé).
Il reste à satisfaire l'hypothèse de domination du théorème de continuité des intégrales à paramètre ; mais on remarque que quand x tend vers 0 $t^{x-1}e^{-t}$ tend vers $\dfrac{e^{-t}}{t}$, qui n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, tandis que quand x tend vers $+\infty$ $t^x e^{-t}$ tend vers $+\infty$. On ne peut donc pas trouver de fonction g qui permette d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre directement sur $]0,+\infty[$.
A ce moment-là, ou bien on passe à la question suivante, ou bien on se rappelle que pour montrer qu'une fonction est continue sur $]0,+\infty[$, il est suffisant de montrer qu'elle est continue sur $[a,A]$ pour tout $a, A > 0$, $a < A$. L'avantage de cette approche est qu'on s'est placé "loin" de 0 et $+\infty$, dont on a vu qu'ils posent problème. Fixons donc $a < A$ et restreignons-nous aux x de $[a,A]$.
Notons que si $0 < t < 1$ alors $\ln(t) < 0$ et donc pour tout $x \in [a,A]$ on a $(x-1)\ln(t) \leq (a-1)\ln(t)$, ce dont on déduit $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ pour tout $t \in]0,1[$.
De même, si $1 \leq t$ alors $\ln(t) \geq 0$ et $(x-1)\ln(t) \leq (A-1)\ln(t)$ si $x \in [a,A]$.
Donc $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{A-1}e^{-t}$ si $t \geq 1$ et $x \in [a,A]$.
Maintenant, définissons une fonction $g_{a,A}$ par

$$g_{a,A}(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{A-1}e^{-t} & \text{sinon} \end{cases} .$$

On vérifie comme en 1 que $g_{a,A}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et alors, puisque $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq g_{a,A}(t)$ pour tout $x \in [a,A]$ et tout $t \in]0,+\infty[$ on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre pour conclure que Γ est continue sur $[a,A]$. En faisant tendre a vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
5. On a, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, que

$$\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1}e^{-t} = \ln(t)t^{x-1}e^{-t} .$$

Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$; étant donné ce qu'on a établi à la question 4, pour appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre il nous suffit, pour tout (a,A) tel que $0 < a < A$, de trouver une fonction $h_{a,A}$ intégrable sur $]0,+\infty[$ et telle que $|\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leq h_{a,A}(t)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a,A]$. En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, et en gardant les notations de cette question, on voit que la fonction $h_{a,A} \colon t \mapsto |\ln(t)| g_{a,A}(t)$ convient. Cette fonction est bien intégrable, et par conséquent Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,A[$[v] et on a

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt .$$

Comme précédemment, on en déduit en faisant tendre a vers 0 et A vers $+\infty$ que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que la formule ci-dessus est valide pour tout $x > 0$.
6. D'après la question précédente, on a $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$ et donc

$$\frac{\Gamma'(1) - \ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} (\ln(t) - \ln(x))e^{-t}dt\text{[vi]}$$

[v] ici je considère l'intervale ouvert pour éviter d'avoir à parler simplement de dérivée à droite en a et à gauche en A - C'est un simple détail de rédaction qui n'a pas vraiment d'importance.
[vi] Pour faire "rentrer" $\ln(x)$ dans l'intégrale, on a utilisé le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$

Puisque $\ln(t) - \ln(x) = \ln(\frac{t}{x})$, le changement de variables $u = t/x$ permet d'obtenir que

$$\frac{\Gamma'(1) - \ln(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-xu} du \ .$$

Ceci permet de vérifier que $F(x)$ est bien définie pour tout x (c'est une conséquence du fait que $F(x)$ est obtenue en appliquant un changement de variable linéaire à une intégrale qui est bien définie) et que

$$\frac{\Gamma'(1) - \ln(x)}{x} = F(x) \ .$$

7. *(Question Bonus)* On a

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_0^{+\infty} (\frac{t}{n})^{x-1} e^{-t} \frac{dt}{n} \ .$$

En utilisant le changement de variables linéaire $u = \frac{t}{x}$, on obtient

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-nu} du \ .$$

Par définition, on a

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x}, \text{ donc}$$

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt \ .$$

Comme la fonction dans l'intégrale est borélienne et à valeurs positives, on peut échanger somme et intégrale [vii] et obtenir ainsi

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt \ .$$

Ensuite on utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir pour tout $t > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \ .$$ [viii]

En réinjectant cela dans la formule ci-dessus, on arrive finalement à

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \ .$$

[vii] C'est le théorème de Tonelli appliqué à la mesure de comptage sur **N** et à la mesure de Lebesgue sur **R**...
[viii] attention, la somme commence à 1...