CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – CORRIGÉ

Exercice 1. [2 pts] – Demontrer (par l'absurde) que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Rép. – Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, avec m et n deux entiers non nuls qui ne sont pas tous les deux divisibles par 2 (sinon on pourrait simplifier la fraction).

Alors d'un coté on a $n^2 = 2m^2$, donc n^2 est un entier pair. Par conséquent n est aussi pair, car si $n = 2p+1$ est impair (avec $p \in \mathbb{Z}$) on a $n^2 = 4p^2+4p+1 = 2(2p^2+2p)+1$ aussi impair. Puisque n est pair, n^2 est divisible par 4, et $m^2 = \frac{n^2}{2}$ est pair.

De l'autre coté, puisque n est pair, m doit être impair ($m = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{Z}$) et m^2 est aussi impair ($m^2 = 2(2q^2+2q)+1$). On obtient donc une contradiction.

Exercice 2. [4 pt]

a) Soit x un nombre réel quelconque. Donner la définition de la partie entière de x, notée $E(x)$, et de la partie fractionaire de x, notée $[x]$.

Rép. – La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique nombre entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$.
La partie fractionaire de $x \in \mathbb{R}$ est le nombre réel $[x] = x - E(x) \in [0,1[$.

---

b) Montrer qu'il existe un $N > 0$ tel que

$$x - N < E(x) \leq x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rép. – Puisque $E(x) \leq x < E(x)+1$, l'inégalité de gauche dit exactement que $E(x) \leq x$, et l'inégalité de droite dit que $x-1 < E(x)$. Donc $N = 1$ est suffisant : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x-1 < E(x) \leq x$.

---

c) En utilisant b), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, 1$ on a

$$\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leq \frac{E(x)}{x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2 > \frac{E(x)}{x-1}.$$

Rép. – Si on divise $E(x) \leq x$ par x on obtient $\frac{E(x)}{x} \leq 1$, donc $\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leq \frac{E(x)}{x}$.
Si on divise $x-1 < E(x)$ par $x-1$ on obtient $1 < \frac{E(x)}{x-1}$ et donc $\frac{E(x)}{x-1} < \left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2$.

---

d) Soit $x = \frac{n}{m}$ un nombre rationnel, avec n entier quelconque et m entier positif non nul. Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m, i.e. $n = qm + r$ avec $0 \leq r < m$.
Montrer alors que $E(x) = q$ et $[x] = \frac{r}{m}$.

Rép. – Puisque $n = qm + r$, on a $x = \frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$. D'un coté, comme $r \geq 0$ et $m > 0$, on a $\frac{r}{m} \geq 0$, donc $q = x - \frac{r}{m} \leq x$.
De l'autre coté, on a $q + 1 = x + \frac{m-r}{m} > x$, car $r < m$ implique $m - r > 0$. Au total, q est un entier tel que $q \leq x < q+1$, donc $q = E(x)$.
Le reste est évident : $(x) = x - E(x) = x - q = \frac{r}{m}$.

Exercice 3. [4 pts]

a) Donner la définition de sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

Rép. – Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est borné s'il est majoré et minoré, c'est-à-dire s'ils existent deux nombres réels M et m tels que $m \leq x \leq M$ pour tout $x \in A$.

---

b) Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieur de A, notée $\sup A$.

Rép. – Si l'ensemble A est majoré, la borne supérieure de A est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire un nombre réel $\sup A$ tel que
(i) $\sup A \geq x$ pour tout $x \in A$ (i.e. $\sup A$ est un majorant de A)
(ii) $\sup A \leq M$ pour tout $M \in \mathbb{R}$ majorant de A (i.e. $\sup A$ est le plus petit majorant).
Si A n'est pas majoré, la borne supérieure de A est $+\infty$.

---

c) Soit A un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que

$$\sup A < a + \varepsilon.$$

Rép. – Supposons par l'absurde qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\sup A \geq x + \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Alors $\sup A - \varepsilon \geq x$ pour tout $x \in A$, donc $\sup A - \varepsilon$ est un majorant de A.
Mais $\sup A - \varepsilon < \sup A$, donc $\sup A$ n'est pas le plus petit majorant de A, ce qui donne une contradiction.

Exercice 4. [10 pts] – Exprimer les ensembles suivants comme intervalles ou union d'intervalles de $\mathbb{R}$. Pour chaque ensemble, trouver la borne supérieur, la borne inférieur et, s'ils existent, le maximum et le minimum.

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in [-1,1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{1}{|x|} \mid x \in [-1,1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mid x \in]-1,1[\right\}$$
$$D = \left\{ \frac{1}{\ln(1-x^2)} \mid x \in [-1,1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$
$$E = \left\{ x \in \left]0,+\infty\right[\mid e^{x^2} \leq 2 \right\}$$

Rép. –

$A = \big] -\infty, -1\big] \cup \big[1, +\infty\big[$ — $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, max et min n'existent pas

$B = \big[1, +\infty\big[$ — $\sup = +\infty$, $\inf = \min = 1$, max n'existe pas

$C = \big[1, +\infty\big[$ — $\sup = +\infty$, $\inf = \min = 1$, max n'existe pas

$D = \big] -\infty, 0\big[$ — $\sup = 0$, $\inf = -\infty$, max et min n'existent pas

$E = \big]0, \sqrt{\ln 2}\big]$ — $\sup = \max = \sqrt{\ln 2}$, $\inf = 0$, min n'existe pas

---