M1 GEOMETRIE - COURBES GAUCHES octobre 2010

Exercice 14 Considerons la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que γ est C^∞.
2. Montrer que γ est régulière et que $k(t) \neq 0$ si $t \neq 0$ et $t \neq \pm\sqrt{2/3}$.
3. Montrer que la limite du plan osculateur est le plan $y = 0$ pour $t \to 0^+$ et le plan $z = 0$ pour $t \to 0^-$.
4. Montrer que la torsion de γ est nulle en tout point birégulier, mais la courbe n'est pas plane.

Exercice 15 L'*hélice circulaire* est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, où $a \neq 0$.

1. Déterminer l'abscisse curviligne.
2. Déterminer la courbure et la torsion.
3. Déterminer son plan osculateur.
4. Montrer que, pour tout t, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(t)$ coupe l'axe Oz sous un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe Oz un angle constant.

Exercice 16 Plus généralement, une *hélice* (ou *hélice généralisée*) est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ telle que sa tangente en tout point fait un angle constant avec une direction fixe.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^∞, avec courbure k et torsion τ partout non nulle.

1. Montrer que γ est une hélice si et seulement si $\frac{k}{\tau}$ est constant.
2. Montrer que γ est une hélice si et seulement si il existe un plan fixe contenant $\vec{n}(t)$ pour tout $t \in I$.
3. Montrer que γ est une hélice si et seulement si il existe une direction fixe faisant avec $\vec{b}(t)$ un angle indépendant de t.
4. Montrer que si γ est une hélice si et seulement si elle admet une paramétrisation de la forme

$$t \to f(t) + t\vec{v},$$

où f est la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'une courbe plane, et $\vec{v}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de cette courbe.

Exercice 17 [Partiel 2008] Soit γ une courbe birégulière de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Considerons la courbe $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\,\vec{n}(s)$, où f est une fonction telle que $f(s) \neq 0$ pour tout s.

Supposons que α ait la même normale principale en s que γ.

1. Montrer que dans ce cas f est constante.
2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre reliant la courbure de γ, la torsion de γ et leur dérivée première. [Hint: calculer $\langle \alpha' \wedge \alpha'', \vec{n} \rangle$.]
3. Montrer que la courbure k et la torsion τ de γ vérifient la relation $fk + a\tau = 1$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\alpha'(s)$ et $\gamma'(s)$ font un angle constant.
5. Supposons que $k(s) = k$ soit constante et $\tau'(s) \neq 0$. Déterminer la valeur de f et montrer que la courbe α a la même courbure que γ.
6. Supposons que α et γ aient la même normale principale quelque soit la constante f, et que $\tau(s) \neq 0$.
   (a) Montrer que k et τ sont constantes.
   (b) Quelle est dans ce cas la courbe γ et la surface balayée par les courbes α pour $f \in \mathbb{R}$?

Exercice 18 Soit γ une courbe de $\mathbb{R}^3$ de courbure $k = \frac{1}{\rho}$ et torsion τ.

1. Montrer que si $k \neq 0$ et $\tau \neq 0$, alors la condition
$$\rho^2 + (\rho')^2/\tau^2 = r^2$$
est nécessaire pour que γ soit tracée sur une sphère de rayon r.

2. Montrer que si de plus $\rho' \neq 0$, alors la condition est aussi suffisante.

Exercice 19 [Partiel 2009] Soit γ une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que si tous les plans normaux de γ passent par un point fixe, alors γ est située sur une sphère.

2. Supposons que γ soit birégulière. Montrer que si tous les plans osculateurs de γ passent par un point fixe, alors γ est une courbe plane.

Exercice 20 Soit γ une courbe birégulière C^∞ de R^3, à torsion jamais nulle, paramétrée par l'abscisse curviligne s. On note $\big(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\big)$ le trièdre de Frénet, $k(s)$ la courbure et $\tau(s)$ la torsion de la courbe en $\gamma(s)$.

1. Montrer que la connaissance de la fonction vectorielle $\vec{b}$ (et ses dérivées) permet de déterminer $k(s)$ et $|\tau(s)|$ en tout point de la courbe.

2. On suppose que l'on connait $k(0)$ et $\tau(0)$. Montrer que si l'on connait la fonction vectorielle $\vec{n}$ (et ses dérivées) on peut déterminer $k(s)$ et $\tau(s)$ en tout point de la courbe.

   [Indication: évaluer le quotient du déterminant $(\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}'')$ par le carré de la norme de $\vec{n}'$ en fonction de k, k' et τ.]

3. En travaillant sur des hélices circulaires, montrer que dans la question précédente on ne peut pas se passer de la connaissance de k et τ en un point.

Exercice 21 On considère la famille de plans P_t de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$P_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \cos t + y \sin t + z \sinh t = \cosh t\},$$
pour $t \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une courbe γ de $\mathbb{R}^3$, birégulière et de classe C^2, dont le plan osculateur en $\gamma(t)$ est P_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une expression explicite (au signe près) pour la binormale $\vec{b}(t)$ en $\gamma(t)$.

2. Calculer le produit scalaire $\langle \gamma(t), \vec{b}(t) \rangle$, que l'on appelle $c(t)$. [Utiliser le fait que $\gamma(t) \in P_t$.]

3. Exprimer $\langle \gamma(t), \vec{b}'(t) \rangle$ et $\langle \gamma(t), \vec{b}''(t) \rangle$ en fonction de $c(t)$.

4. Montrer que les vecteurs $\vec{b}(t)$, $\vec{b}'(t)$ et $\vec{b}''(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

5. En déduire une représentation parametrique pour $\gamma(t)$.

6. Est-ce que la courbe définie par cette formule vérifie effectivement l'hypothèse de départ (c'est à dire, est-ce que son plan osculateur est P_t)?