

**Exercice 1** Considerons la courbe de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $\gamma$  est  $C^\infty$ .
2. Montrer que  $\gamma$  est régulière et que  $k(t) \neq 0$  si  $t \neq 0$  et  $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ .
3. Montrer que la limite du plan osculateur est le plan  $y = 0$  pour  $t \rightarrow 0^+$  et le plan  $z = 0$  pour  $t \rightarrow 0^-$ .
4. Montrer que la torsion de  $\gamma$  est nulle en tout point birégulier, mais la courbe n'est pas plane.

**Exercice 2** L'hélice circulaire est la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$ , où  $a \neq 0$ .

1. Déterminer l'abscisse curviligne.
2. Déterminer la courbure et la torsion.
3. Déterminer son plan osculateur.
4. Montrer que, pour tout  $t$ , la droite passant par  $\gamma(t)$  et de vecteur directeur  $\vec{n}(t)$  coupe l'axe  $Oz$  sous un angle égal à  $\frac{\pi}{2}$ .
5. Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe  $Oz$  un angle constant.

**Exercice 3** Plus généralement, une hélice (ou hélice généralisée) est une courbe régulière de  $\mathbb{R}^3$  telle que sa tangente en tout point fait un angle constant avec une direction fixe.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe birégulière de classe  $C^\infty$ , avec courbure  $k$  et torsion  $\tau$  partout non nulle.

1. Montrer que  $\gamma$  est une hélice si et seulement si  $\frac{k}{\tau}$  est constant.
2. Montrer que  $\gamma$  est une hélice si et seulement si il existe un plan fixe contenant  $\vec{n}(t)$  pour tout  $t \in I$ .
3. Montrer que  $\gamma$  est une hélice si et seulement si il existe une direction fixe faisant avec  $\vec{b}(t)$  un angle indépendant de  $t$ .
4. Montrer que si  $\gamma$  est une hélice alors elle admet une paramétrisation de la forme

$$t \rightarrow f(t) + t\vec{v},$$

où  $f$  est une paramétrisation d'une courbe plane par l'abscisse curviligne, et  $\vec{v}$  est un vecteur perpendiculaire au plan de cette courbe.

**Exercice 4** [Partiel 2008] Soit  $\gamma$  une courbe birégulière de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  et paramétrée par l'abscisse curviligne. Considerons la courbe  $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\vec{n}(s)$ , où  $f$  est une fonction telle que  $f(s) \neq 0$  pour tout  $s$ .

Supposons que  $\alpha$  ait la même normale principale en  $s$  que  $\gamma$ .

1. Montrer que dans ce cas  $f$  est constante.
2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre reliant la courbure de  $\gamma$ , la torsion de  $\gamma$  et leur dérivée première. [Hint: calculer  $\langle \alpha' \wedge \alpha'', \vec{N}_\gamma \rangle$ .]
3. Montrer que si la torsion ne s'annule jamais, alors la courbure  $k$  et la torsion  $\tau$  de  $\gamma$  vérifient la relation  $fk + a\tau = 1$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Montrer que dans ce cas  $\alpha'(s)$  et  $\gamma'(s)$  font un angle constant.
5. Supposons que  $k(s) = k$  soit constante et  $\tau'(s) \neq 0$  pour tout  $s$ . Déterminer la valeur de  $f$  et montrer que la courbe  $\alpha$  a la même courbure que  $\gamma$ .
6. Supposons que  $\alpha$  et  $\gamma$  aient la même normale principale quelque soit la constante  $f$ , et que  $\tau(s) \neq 0$ .
  - (a) Montrer que  $k$  et  $\tau$  sont constantes.
  - (b) Quelle est dans ce cas la courbe  $\gamma$  et la surface balayée par les courbes  $\alpha$  pour  $f \in \mathbb{R}$ ?

**Exercice 5** Soit  $\gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^3$  de courbure  $k = \frac{1}{\rho}$  et torsion  $\tau$ .

1. Montrer que si  $k \neq 0$  et  $\tau \neq 0$ , alors la condition

$$\rho^2 + (\rho')^2 / \tau^2 = r^2$$

est nécessaire pour que  $\gamma$  soit tracée sur une sphère de rayon  $r$ .

2. Montrer que si de plus  $\rho' \neq 0$ , alors la condition est aussi suffisante.

**Exercice 6** [Partiel 2009] Soit  $\gamma$  une courbe birégulière de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que si tous les plans normaux de  $\gamma$  passent par un point fixe, alors  $\gamma$  est située sur une sphère.
2. Montrer que si tous les plans osculateurs de  $\gamma$  passent par un point fixe, alors  $\gamma$  est une courbe plane.

**Exercice 7** Soit  $\gamma$  une courbe birégulière  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ , à torsion jamais nulle, paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$ . On note  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$  le trièdre de Frénet,  $k(s)$  la courbure et  $\tau(s)$  la torsion de la courbe en  $\gamma(s)$ .

1. Montrer que la connaissance de la fonction vectorielle  $\vec{b}$  (et ses dérivées) permet de déterminer  $k(s)$  et  $|\tau(s)|$  en tout point de la courbe.
2. On suppose que l'on connaît  $k(0)$  et  $\tau(0)$ . Montrer que si l'on connaît la fonction vectorielle  $\vec{n}$  (et ses dérivées) on peut déterminer  $k(s)$  et  $\tau(s)$  en tout point de la courbe.  
[Indication: évaluer le quotient du déterminant  $(\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}'')$  par le carré de la norme de  $\vec{n}'$  en fonction de  $k$ ,  $k'$  et  $\tau$ .]
3. En travaillant sur des hélices circulaires, montrer que dans la question précédente on ne peut pas se passer de la connaissance de  $k$  et  $\tau$  en un point.

**Exercice 8** On considère la famille de plans  $P_t$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par

$$P_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \cos t + y \sin t + z \sinh t = \cosh t\},$$

pour  $t \in \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe une courbe  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$ , birégulière et de classe  $C^2$ , dont le plan osculateur en  $\gamma(t)$  est  $P_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Donner une expression explicite (au signe près) pour la binormale  $\vec{b}(t)$  en  $\gamma(t)$ .
2. Calculer le produit scalaire  $\langle \gamma(t), \vec{b}(t) \rangle$ , que l'on appelle  $c(t)$ . [Utiliser le fait que  $\gamma(t) \in P_t$ .]
3. Exprimer  $\langle \gamma(t), \vec{b}'(t) \rangle$  et  $\langle \gamma(t), \vec{b}''(t) \rangle$  en fonction de  $c(t)$ .
4. Montrer que les vecteurs  $\vec{b}(t)$ ,  $\vec{b}'(t)$  et  $\vec{b}''(t)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. En déduire une représentation paramétrique pour  $\gamma(t)$ .
6. Est-ce que la courbe définie par cette formule vérifie effectivement l'hypothèse de départ (c'est à dire, est-ce que son plan osculateur est  $P_t$ )?