M1 GEOMETRIE

Preliminaire sur les géodésiques

Soit $S = \{ f(u,v) \in \mathbb{R}^3,\ u \in \mathcal{U},\ v \in \mathcal{V} \}$ une surface paramétrée.

géodésique sur S = courbe $\gamma : I \to S$ régulière t.q.

① γ minimise la distance entre deux points $P, Q \in S$.

$\Leftrightarrow$ ② $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} S$ $\forall t$, i.e. $\gamma''(t) \,/\!/\, N_{\gamma(t)}$

$\Leftrightarrow$ ③ $\langle \gamma''(t), f_u(\gamma(t)) \rangle = 0$
$\langle \gamma''(t), f_v(\gamma(t)) \rangle = 0$ $\quad \forall t \in I$.

Equation des géodésiques : pour déterminer une géodésique $\boxed{\gamma(t) = f(u(t), v(t))} \in S$ $\forall t \in I$, il suffit de déterminer les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ qui donnent les paramètres.

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_u\, u'(t) + f_v\, v'(t)$$

$$\gamma''(t) = \frac{d}{dt}\left(f_u(u(t), v(t))\, u'(t) + f_v(u(t), v(t))\, v'(t) \right)$$

$$= f_{uu} (u')^2 + f_{uv}\, u'v' + f_u\, u'' + f_{vu}\, u'v' + f_{vv} (v')^2 + f_v\, v'' \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\gamma''(t) = f_u\, u'' + f_v\, v'' + f_{uu} (u')^2 + 2 f_{uv}\, u'v' + f_{vv} (v')^2}$$

On définit les symboles de Christoffel Γ^i_{jk}, $i,j,k = 1,2$ en décomposant f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} dans la base $\{ f_u, f_v, N \}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} f_{uu} = \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + \ell N \\ f_{uv} = \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + m N \\ f_{vv} = \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + n N \end{cases}$$

Les Γ^i_{jk} se trouvent avec les systèmes:

$$\begin{cases} \langle f_{uu}, f_u \rangle = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \\ \langle f_{uu}, f_v \rangle = \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G \end{cases} \qquad \begin{cases} E_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle f_u, f_u \rangle = 2 \langle f_{uu}, f_u \rangle \\ E_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle f_u, f_u \rangle = 2 \langle f_{uv}, f_u \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle f_{uv}, f_u \rangle = \Gamma^1_{12} E + \Gamma^2_{12} F \\ \langle f_{uv}, f_v \rangle = \Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{12} G \end{cases} \qquad \begin{cases} F_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle f_u, f_v \rangle = \langle f_{uu}, f_v \rangle + \langle f_{uv}, f_u \rangle \\ F_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle f_u, f_v \rangle = \langle f_{uv}, f_v \rangle + \langle f_{vv}, f_u \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle f_{vv}, f_u \rangle = \Gamma^1_{22} E + \Gamma^2_{22} F \\ \langle f_{vv}, f_v \rangle = \Gamma^1_{22} F + \Gamma^2_{22} G \end{cases} \qquad \begin{cases} G_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle f_v, f_v \rangle = 2 \langle f_{uv}, f_v \rangle \\ G_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle f_v, f_v \rangle = 2 \langle f_{vv}, f_v \rangle \end{cases}$$

Si on combine les deux systèmes précédents, on trouve :

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{G E_u - F(2F_u - E_v)}{2(EG-F^2)} \\[2ex] \Gamma^2_{11} = \dfrac{E(2F_u - E_v) - F E_u}{2(EG-F^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{12} E + \Gamma^2_{12} F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{12} G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{12} = \dfrac{G E_v - F G_u}{2(EG-F^2)} \\[2ex] \Gamma^2_{12} = \dfrac{E G_u - F E_v}{2(EG-F^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{22} E + \Gamma^2_{22} F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma^1_{22} F + \Gamma^2_{22} G = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{22} = \dfrac{G(2F_v - G_u) - F G_v}{2(EG-F^2)} \\[2ex] \Gamma^2_{22} = \dfrac{E G_v - F(2F_v - G_u)}{2(EG-F^2)} \end{cases}$$

La condition ③ sur le géodésique $\gamma(t)$ devient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} -u'' &= \Gamma^1_{11} (u')^2 + 2\Gamma^1_{12} u'v' + \Gamma^1_{22} (v')^2 \\ -v'' &= \Gamma^2_{11} (u')^2 + 2\Gamma^2_{12} u'v' + \Gamma^2_{22} (v')^2 \end{aligned}}$$