UE Géométrie et calcul différentiel - Printemps 2012. CC1 - DM Corrigé

1) Les fonctions $t \mapsto ch(t)$ et $t \mapsto e^t$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les deux coordonnées de $\gamma$ étant $C^\infty$, $\gamma$ est $C^\infty$.

2) $\gamma'(t) = (sh\, t, e^t)$

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t > 0$.

Ainsi $\gamma'$ n'est jamais nul et le paramétrage $\gamma$ est régulier.

3) • $\gamma(0) = (ch(0), e^0) = (1,1)$.

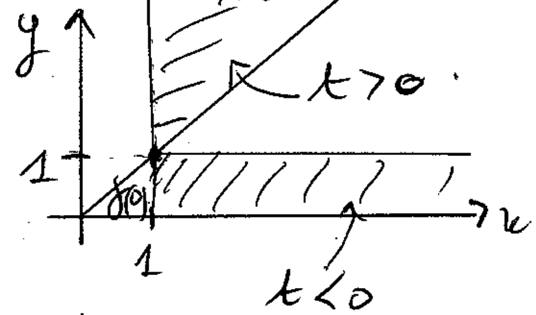
• Si $t < 0$, $ch(t) \geq 1$ et $0 \leq e^t \leq 1$.

Donc la courbe se trouve dans $[1,+\infty[ \times [0,1]$.

• Si $t > 0$, $ch(t) \geq 1$ et $\frac{e^t}{2} > \frac{e^{-t}}{2}$ donc

$$ch(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} < \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} = e^t$$

La courbe se trouve alors dans $\{(x,y),\ x \geq 1,\ y \geq x\}$.




4) L'application $t \longmapsto u(t) = e^t$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+_*$ est $C^\infty$, bijective et sa dérivée ne s'annule jamais. C'est donc un $C^\infty$-difféo.

5) On cherche $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^+_* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tq

$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t)$. On $t(u) = \ln(u)$, $u \in \mathbb{R}^+_*$.

Autrement dit $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\ln(u))$

$$\boxed{\tilde{\gamma}(u) = \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2u},\ u\right)}\quad u \in \mathbb{R}^+_*.$$

6) En prenant le paramétrage $\tilde{\gamma}$ :

$$\begin{cases} x = \frac{u}{2} + \frac{1}{2u} \\ y = u > 0. \end{cases}$$

donc $x = \frac{y}{2} + \frac{1}{2y}$ et $y > 0$.

(7) On utilise à nouveau $\gamma$ :

$$\gamma(u) = \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2u}\right)\vec{e_1} + u\,\vec{e_2}$$

$$\gamma(u) = 2\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2u}\right)\vec{b_1} + u\left(\vec{b_2} - \vec{b_1}\right)$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{u}\vec{b_1} + u\,\vec{b_2}.$$

Donc dans le nouveau repère, on a l'équation

$\underline{XY = 1}$ avec $\underline{Y > 0}$ : c'est une branche d'hyperbole.

(8)