CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – DEVOIR MAISON

8 – 15 mars 2012

Réglement – Entre crochets [ ] est indiqué le barème sur 20 points.
Le devoir est à rendre le 15 mars en TD.

Exercice – Dans le plan cartésien avec repère canonique $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la courbe donnée par la paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \big(\operatorname{ch} t, e^t\big), \qquad t \in \mathbb{R}$$

où $\operatorname{ch} t$ est le cosinus hyperbolique de t.

1. [1 pt] – La paramétrisation γ est-elle de classe C^∞ ? Pourquoi ?

2. [2 pt] – Trouver les points singuliers de γ.

3. [3 pts] – Calculer la position de la courbe en $t = 0$.
Trouver la portion du plan où se trouve la courbe pour $t < 0$ et l'indiquer dans un dessin.
Trouver la portion du plan où se trouve la courbe pour $t > 0$ et l'indiquer dans le même dessin.

4. [2 pts] – Expliquer pourquoi l'application $t \mapsto u(t) = e^t$ est un changement de paramètre.

5. [3 pts] – Trouver le reparamétrage $\tilde{\gamma}(u)$ de γ déterminé par le changement de paramètre du point 4.

6. [3 pts] – Trouver l'équation cartésienne du support de γ (ou de $\tilde{\gamma}$, c'est équivalent).

7. [3 pts] – Considérons le changement de repère du plan donné par

$$\begin{cases} \vec{b}_1 := \frac{1}{2}\vec{e}_1 \\ \vec{b}_2 := \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

Trouver l'équation cartésienne de γ dans le nouveau repère $(O, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.
Autrement dit, si $\gamma(t) = x(t)\ \vec{e}_1 + y(t)\ \vec{e}_2 = X(t)\ \vec{b}_1 + Y(t)\ \vec{b}_2$, trouver l'équation cartésienne du support de γ dans les coordonnées $(X(t), Y(t))$.

8. [3 pts] – Dessiner la courbe sur le plan cartésien, en utilisant le repère canonique ou bien le nouveau repère $(O, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.