UE Géométrie et Calcul différentiel - Printemps 2012

CC1 - Corrigé.

① Les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto \gamma(t)$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ car <u>chacune de ses composantes est $\mathcal{C}^\infty$</u>.

② Un reparamétrage $\begin{array}{rcl}[0,2\pi[& \to & [0,1] \\ t & \mapsto & u(t)\end{array}$ doit être un difféomorphisme (au moins) C^1. Or $t \mapsto \cos(t)$ a sa dérivée $t \mapsto -\sin(t)$ qui s'annule en 0 et en π, donc n'est pas un difféomorphisme. Ce n'est donc <u>pas un reparamétrage</u> de γ.

③ Calculons $\|\gamma(t)\|^2$:

$$\|\gamma(t)\|^2 = \big((1-\cos t)\cos t\big)^2 + \big((1-\cos t)\sin t\big)^2$$
$$= (1-\cos t)^2 \leq 4.$$

De plus, $\|\gamma(\pi)\|^2 = 4$. Donc γ est contenue dans le disque centré en $(0,0)$ et de <u>rayon 2</u>, et touche le bord de ce disque en <u>$t=\pi$</u>.

La norme $\|\gamma(t)\| = 1-\cos t$ est maximale pour <u>$t=\pi$</u> et minimale pour <u>$t=0$</u>.

④ $$\gamma'(t) = \big(2\sin(t)\cos(t) - \sin(t),\ \cos(t) + \sin^2(t) - \cos^2(t)\big)$$
$$= \big(\sin(t)\,(2\cos(t)-1),\ 1+\cos(t) - 2\cos^2(t)\big)$$

t singulier $\Rightarrow \sin(t)\,(2\cos(t)-1) = 0$

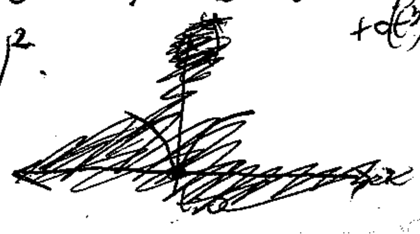
donc $t = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

On vérifie que la deuxième coordonnée de $\gamma'(t)$ ne s'annule pas en π, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$, mais s'annule en 0.

Le seul point singulier est $\boxed{t=0}$.

⑤ $$\gamma(t) = \left(\cos t - \cos^2 t,\ \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) = \left(1-\frac{t^2}{2} - (1-t^2),\ t - \frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}\left(2t - \frac{8t^3}{6}\right)\right) + o(t^3)$$
$$= \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{2}\right) + o(t^3), \text{ et } 2\left(\frac{t^2}{2}\right)^3 = \left(\frac{t^3}{2}\right)^2.$$

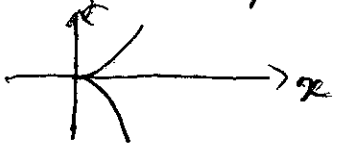
Au voisinage de $t=0$, on a donc un point de rebroussement de 1re espèce.

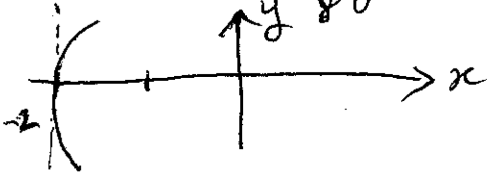


⑥ Posons $t=\pi+u$ et développons $\gamma(\pi+u)$ en $u=0$. $\left(\begin{array}{l}\cos(\pi+u)=-\cos u\\ \sin(\pi+u)=-\sin u\end{array}\right)$

$$\gamma(\pi+u)=\left(-\cos u-\cos^2 u,\ -\sin u-\tfrac{1}{2}\sin(2u)\right)=\left(-1+\frac{u^2}{2}-1+u^2,\ -u-\frac{2u}{2}\right)+o(u^2)$$
$$=\left(-2+\frac{3u^2}{2},\ -2u\right)+o(u^2).$$

À l'ordre 2 en π, γ vérifie $x(t)+2=\frac{3u^2}{2}$ et $\frac{3}{8}y(t)^2=\frac{3}{2}u^2$ donc son support est décrit par la parabole $x=-2+\frac{3}{8}y^2$.





en $t=0$. en $t=\pi$

⑦ $$x(t)^2+y(t)^2+x(t)=(1-\cos t)^2\cos^2(t)+(1-\cos t)^2\sin^2(t)+\cos(t)(1-\cos t)$$
$$=(1-\cos t)^2+\cos(t)(1-\cos t)$$
$$=(1-\cos t)(1-\cos t+\cos t)$$
$$=1-\cos t$$

Donc $\left(x(t)^2+y(t)^2+x(t)\right)^2=(1-\cos t)^2=x(t)^2+y(t)^2$

γ vérifie l'équation
$$\boxed{(x^2+y^2+x)^2=x^2+y^2}.$$

⑧ Rappelons que $\cos(2\pi-t)=\cos t$ et $\sin(2\pi-t)=-\sin t$

donc $\gamma(2\pi-t)=\left((1-\cos t)\cos t,\ -(1-\cos t)\sin t\right)$
$$=A(\gamma(t)).$$

$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1,1)$ $\gamma'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=(-\sqrt{3},0)$

⑨ $\gamma(0)=(0,0)$, $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt3}{4}\right)$, $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,1)$, $\gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(-\frac{3}{4},\frac{3\sqrt3}{4}\right)$

$\gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right)=(0,1)$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0		$-$				0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$		$\searrow$				-2
$y'(t)$	0			$+$			0	$-$	0
$y(t)$	0		$\nearrow$				$\frac{3\sqrt3}{4}$	$\searrow$	0