Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Géométrie et Calcul Différentiel
Parcours Math-Info - Licence 2ème année | Printemps 2012

CONTRÔLE final

14 juin 2012

Réglement – L'épreuve dure 2 heures. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Notes personnelles et documents sont autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 – Dans le plan cartésien avec repère canonique $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la courbe Γ donnée par le paramétrage $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \big((1+\cos t)^3, \sin^3 t\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Le paramétrage γ est-elle de classe C^∞ ? Pourquoi ?

2. Montrer que le paramétrage γ est 2π-périodique. Montrer aussi que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe Ox.

3. Trouver les points singuliers de γ. Effectuer un développement limité aux voisinages de ces points pour déterminer leur nature.

4. Calculer la position des points de Γ de paramètres $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ puis dessiner la courbe.

5. Calculer l'aire du domaine entouré par Γ.

Exercice 2 – Soit D le domaine du plan cartésien compri entre l'axe Ox et la parabole d'équation $y = 4 - x^2$.

1. Dessiner le domaine D et le décrire en coordonnées cartésiennes.

2. Calculer l'aire de D.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D 2xy \; dx \; dy$.

4. Montrer que la 2-forme $\omega(x,y) = 2xy \; dx \wedge dy$ est exacte sur D et calculer une primitive $\eta \in \Omega^1(D)$.

5. Paramétrer le bord ∂D du domaine D comme union de deux courbes orientées dans le sens antihoraire.

6. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D 2xy \; dx \; dy$ en utilisant le théorème de Green-Riemann.