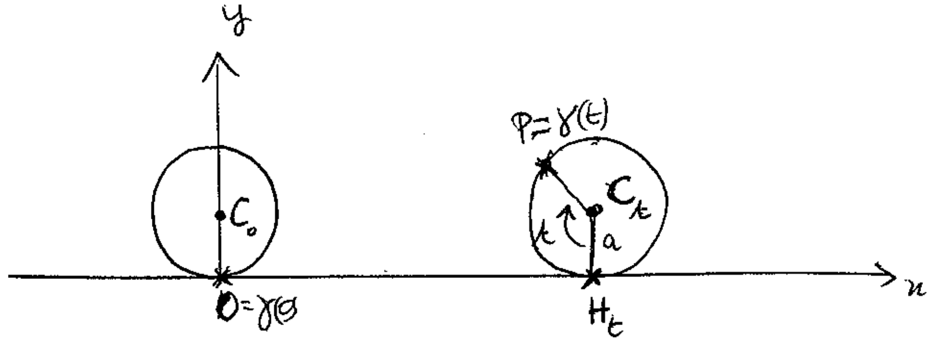
UE Géométrie différentielle - Printemps 2012 Devoir maison n°1 - Corrigé

①

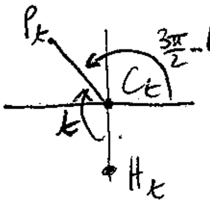


Notons H_t le point de contact entre le disque et l'axe (Ox) à l'instant t.

Comme le disque ne glisse pas, la longueur OH_t est égale à la longueur de l'arc décrit par P sur le cercle entre les instants 0 et t.

Ainsi $\overrightarrow{OH_t} = (at, 0)$.

Notons C_t le centre du disque à l'instant t. On a $\overrightarrow{H_tC_t} = (0, a)$.



Enfin, $\overrightarrow{C_tP_t} = \left(a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right), a\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\right)$

$\overrightarrow{C_tP_t} = -a(\sin(t), \cos(t))$.

Donc $\gamma(t) = (at, 0) + (0, a) - a(\sin t, \cos t)$

$$\boxed{\gamma(t) = (at - a\sin t, a(1 - \cos t))}$$

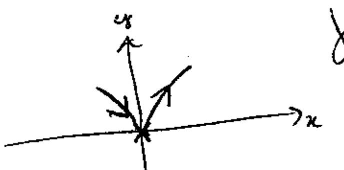
② $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$, $\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

$\gamma'(t) = 0 \iff \sin t = 0$ et $\cos t = 1 \iff \boxed{t \in 2\pi\mathbb{Z}}$

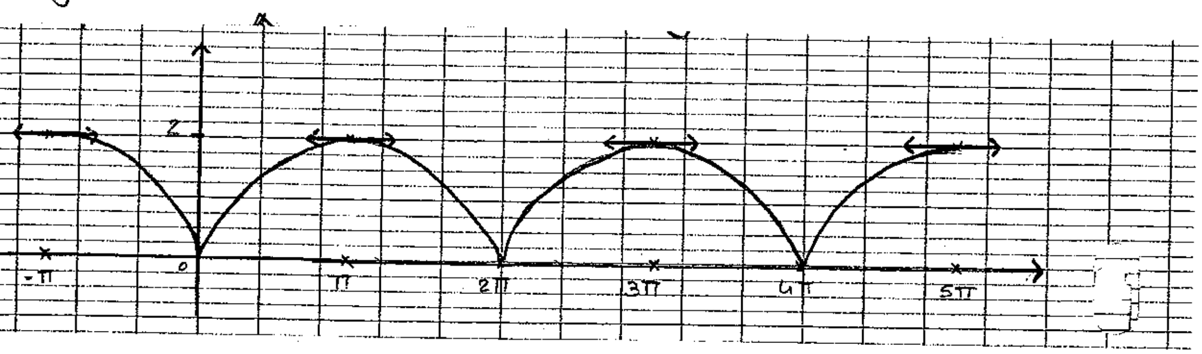
On remarque que $\gamma(t + 2\pi) = (2\pi a, 0) + \gamma(t)$. Il suffit d'étudier le point critique 0, les autres se déduisent par translation.

<u>En $t = 0$</u> : $\gamma(t) = a\left(t - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right), 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)\right)$

$\gamma(t) = a\left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}\right) + o(t^3)$: point de rebroussement de 1ère espèce.



③ On a une tangente horizontale lorsque $t \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$



Source : Camille MONTERO

④ Supposons tout d'abord $t \in]0, 2\pi[$. Alors

$$\|\gamma'(t)\| = 2a \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Donc $s(t) = 2a \int_0^t \sin\left(\frac{u}{2}\right) du = 2a \left[-2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{u=0}^{t}$

$$\underline{s(t) = 4a\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \qquad t \in]0, 2\pi[$$

⚠ <u>Remarque importante</u> : l'abscisse curviligne n'est pas bien définie pour une courbe ayant des points singuliers. Dans notre cas on peut seulement la définir sur des intervalles du type ~~...~~ $]2k\pi, 2k\pi + 2\pi[$. L'intégrale $\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du$ a toujours un sens si la courbe est C^1, mais ce n'est pas toujours l'abscisse curviligne.

⚠ Le reparamétrage n'est pas défini partout. ⚠

$s :]0, 2\pi[\to]0, 8a[$ est un C^1-difféo (car $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$)

De plus, $\cos\left(\frac{t(s)}{2}\right) = 1 - \frac{s}{4a}$ où $t(s)$ est la réciproque de $s(t)$.

Donc $\underline{t(s) = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)}$ car $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$

(Rappel : $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$).

D'où $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$

$$= a\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right), 1 - \cos\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)\right)$$

Or $\cos\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right) = 2\cos^2\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right) - 1$

$$= 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 - 1 \quad \text{car } 1 - \frac{s}{4a} \in [-1, 1].$$

et $\sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right) = 2\sin\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)$

$$= 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \times \sin\underbrace{\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)}_{\in [0, \pi]}$$

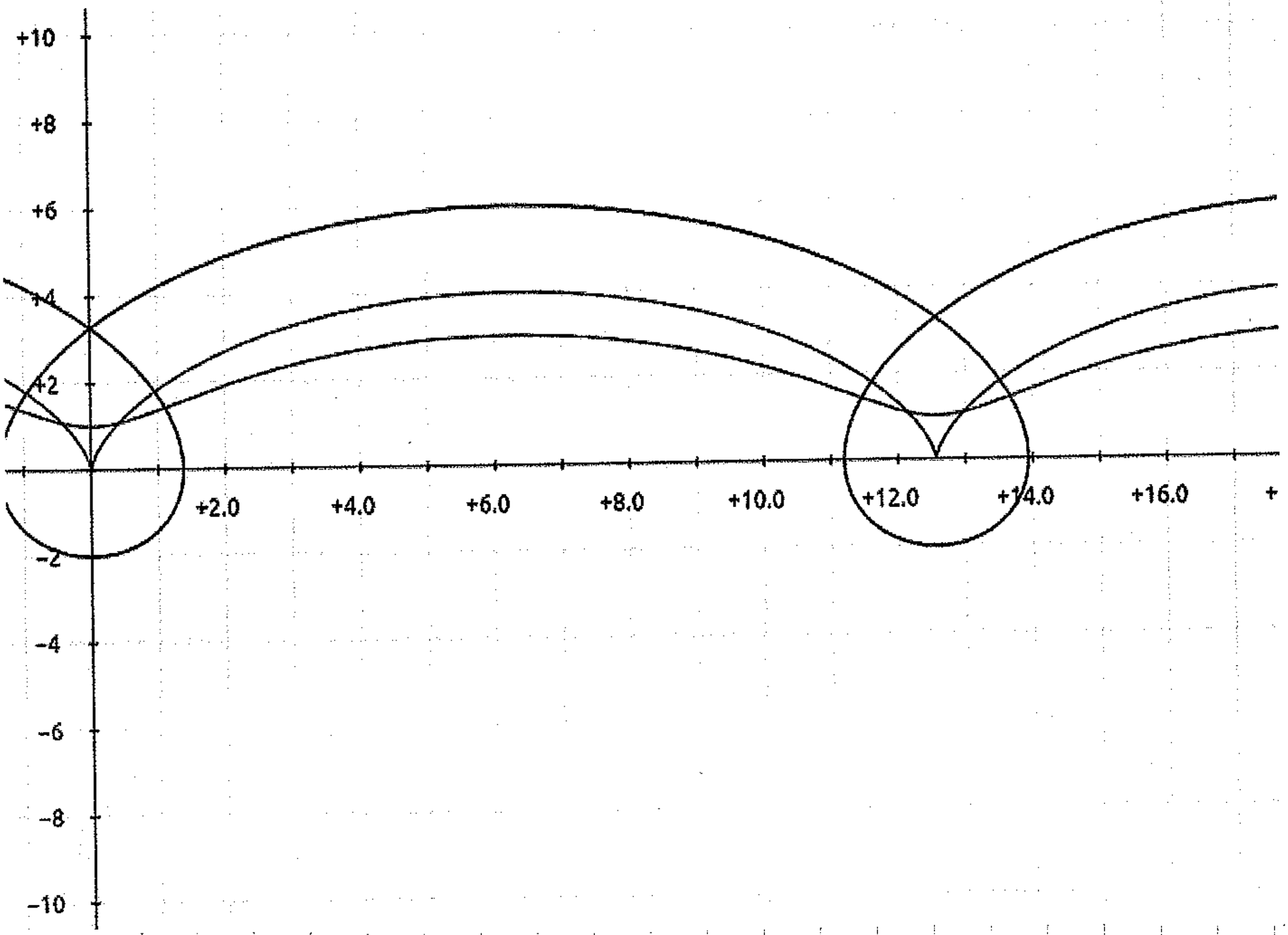
donc $$= 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \times \left(\overset{\geq 0}{+}\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2}$$

$$= 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\sqrt{\frac{s}{4a}\left(2 - \frac{s}{4a}\right)}$$

D'où $$\boxed{\tilde{\gamma}(s) = a\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\sqrt{\frac{s}{4a}\left(2 - \frac{s}{4a}\right)}, 2 - 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2\right) \quad s \in]0, 8a[}$$

7/8 Ajout



<u>Représentation sous kmplot d'une cycloïde et de deux "cycloïdes dégénérées" ($a = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 4$)</u>

— Cycloïde d'équation $(2(t - \sin(t)), 2(1 - \cos(t)))$
— "Cycloïde dégénérée" d'équation $(2t - \sin(t), 2 - \cos(t))$
— "Cycloïde dégénérée" d'équation $(2t - 4\sin(t), 2 - 4\cos(t))$

Plus généralement, on vérifie que pour $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$

$$s(t) = 8ka + 4a\left(1 - (-1)^k \cos\frac{t}{2}\right) \in]8ka, 8(k+1)a[$$

donc
$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \underbrace{(-1)^{k+1}\left(\frac{s-8ka}{4a} - 1\right)}_{\in[-1,1]}$$

d'où
$$\frac{t}{2} = \underbrace{k\pi}_{} + \arccos\left((-1)^{k+1}\left[\left(\frac{s-8ka}{4a}\right) - 1\right]\right)$$

⚠ $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ et $\frac{t}{2} \in]k\pi, (k+1)\pi[$!!.

Ainsi $\underline{t(s) = 2k\pi + 2\arccos\left((-1)^{k+1}\left[\left(\frac{s-8ka}{4a}\right) - 1\right]\right)}$

Après quelques calculs : pour $s \in]8ka, 8(k+1)a[$,

$$\left[\tilde{\gamma}(s) = a\left(2k\pi + 2\arccos\left((-1)^{k+1}\left[\left(\frac{s-8ka}{4a}\right) - 1\right]\right) - 2(-1)^{k+1}\left[\left(\frac{s-8ka}{4a}\right) - 1\right] \times \sqrt{1 - \left((-1)^{k+1}\left[\left(\frac{s-8ka}{4a}\right) - 1\right]\right)^2},\ 2 - 2\left(\frac{s-8ka}{4a} - 1\right)^2\right) \quad s \in]8ka, 8(k+1)a[\right]$$

(5). Comme la courbe se déduit de sa partie pour $t \in [0, 2\pi]$ par translation, il suffit de calculer la courbure pour $t \in [0, 2\pi]$

⚠ la courbure n'est pas définie pour $t = 0$ et 2π !!

Pour $t \in]0, 2\pi[$, $\quad k(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$

$$\|\gamma'(t)\| = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} a(1-\cos t) \\ a\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2\cos t - a^2 \end{pmatrix}$$

D'où
$$k(t) = \frac{a^2|\cos t - 1|}{8a^3\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3} = \frac{1}{8a}\,\frac{\left|2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

Donc pour $\underline{t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}}$,
$$\boxed{k(t) = \frac{1}{4a\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}}$$

$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 = \frac{s}{2a} - \frac{s^2}{16a^2}$ donc $\boxed{k(s) = \dfrac{1}{4a\sqrt{\frac{s}{2a} - \frac{s^2}{16a^2}}}} > 0$ pour $s \in]0, 8a[$

(6) $L_0^{2\pi} = s(2\pi) - s(0) = 8a$

(7) $\gamma_Q(t) = \overrightarrow{OH_t} + \overrightarrow{H_tC_t} + \overrightarrow{C_tQ_t} = (at - b\sin t, a - b\cos t)$. Même param. pour la question (8). (Dessin de Angélique PERILLAT).

⑨ Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Notons $\vec{n}(t)$ le vecteur normal à la cycloïde en t.

$\vec{n}(t)$ est proportionnel à $v = (-\sin t, 1-\cos t)$ car

$$\langle \gamma'(t), v \rangle = \langle (a(1-\cos t), \sin t), (-\sin t, 1-\cos t) \rangle = 0$$

$$\|v\| = \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t - 2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

donc $\vec{n}(t) = \pm \dfrac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|}(-\sin t, 1-\cos t)$.

Il faut de plus que $\langle \vec{n}(t), \gamma''(t) \rangle > 0$ donc

$$\pm \frac{a}{2|\sin\frac{t}{2}|}(-\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t) = \pm \frac{a}{2|\sin\frac{t}{2}|}(-1+\cos t) = \pm \frac{a(-\sin^2\frac{t}{2})}{2|\sin\frac{t}{2}|}$$

d'où $\ominus$.

$$\vec{n}(t) = \frac{-1}{2|\sin\frac{t}{2}|}(-\sin t, 1-\cos t).$$

La développée est paramétrée par

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \rho(t)\,\vec{n}(t) \qquad t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$= (a(t-\sin t), a(1-\cos t)) + \frac{-4a\cancel{|\sin\frac{t}{2}|}}{2\cancel{|\sin\frac{t}{2}|}}(-\sin t, 1-\cos t)$$

$$\alpha(t) = a(t+\sin t, \cos t - 1)$$

$$= a((t-\pi) - \sin(t-\pi), 1 - \cos(t-\pi)) + a(\pi, -2).$$

C'est une cycloïde !.