UE Géométrie et calcul différentiel - Printemps 2012. — DT12 - Corrigé.

Ex 1 :

1) Le vecteur vitesse $\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ ne s'annule jamais, donc le paramétrage est régulier.

2) Comme le paramétrage est régulier, on peut calculer l'abscisse curviligne et le paramétrage par longueur d'arc.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du \quad \text{est une abscisse curviligne.}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{e^{2u} + e^{-2u} + 2} \, du$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(e^u + e^{-u})^2} \, du$$

Comme $e^u + e^{-u} = 2\,ch(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$s(t) = \int_0^t 2\,ch(u) \, du$$

$$\boxed{s(t) = 2\,sh\,t}.$$

Ainsi $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 2\,sh(t)$ est l'abscisse curviligne. C'est un difféo C^∞.

Sa réciproque est $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto argsh\left(\frac{s}{2}\right)$.

On peut la réécrire en remarquant :

$$e^{\pm argsh \frac{s}{2}} = ch\left(argsh \frac{s}{2}\right) \pm sh\left(argsh \frac{s}{2}\right) = \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} \pm \frac{s}{2}$$

Donc $t(s) = \ln\left(\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}\right)$

Le paramétrage par longueur d'arc est donc :

$$\boxed{\gamma(s) = \left(\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, -\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, \sqrt{2}\,\ln\left(\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}\right)\right), s \in \mathbb{R}.}$$

3) Comme calculé en 2/, $\|\gamma'(t)\| = 2\,ch(t)$. Comme la courbe est régulière, le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ est bien défini partout et :

$$\vec{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{2\,ch\,t}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{e^t}{e^t + e^{-t}}, -\frac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{T} = \left(\frac{e^{2t} + 1 - (e^{2t} - 1)}{(e^t + e^{-t})^2}, \frac{1 + e^{-2t} + 1 - e^{-2t}}{(e^t + e^{-t})^2}, \sqrt{2}\,\frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{T} = \left(\frac{1}{2\,ch^2 t}, \frac{1}{2\,ch^2 t}, -\frac{sh\,t}{\sqrt{2}\,ch^2 t}\right) \quad \text{Le vecteur}$$

Donc $\left\|\frac{d}{dt}\vec{T}\right\| = \frac{1}{2\,ch^2 t}\sqrt{2 + 2\,sh^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}\,ch\,t}$

Ainsi $k(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\left\|\frac{dT}{dt}\right\| = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\operatorname{ch}^2 t}$

La courbure étant toujours non nulle, le paramétrage est birégulier et le vecteur normal unitaire $\vec{N}$ est donné par

$$\vec{N} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|\,k(t)}\,\frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}, \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}, -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Enfin $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}\begin{pmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\operatorname{sh} t\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{2\operatorname{ch} t}\begin{pmatrix}e^t\\-e^{-t}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}(1 - e^{-t}\operatorname{sh} t)\\-\sqrt{2}(1 + e^{t}\operatorname{sh} t)\\-(e^t + e^{-t})\end{pmatrix}$$

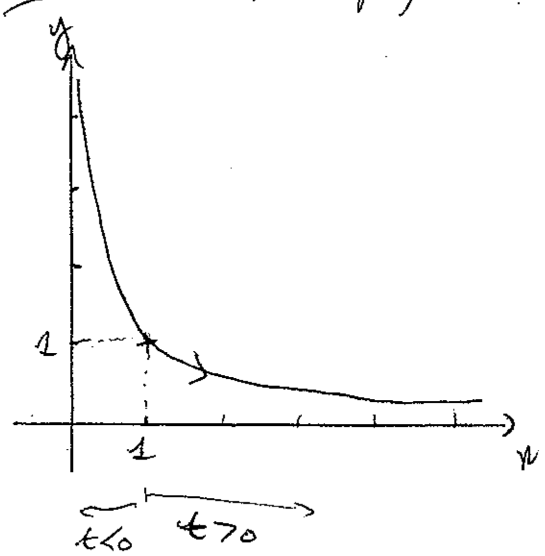
$$= \left(\frac{e^{-t}\operatorname{sh} t - 1}{2\operatorname{ch}^2 t}, \frac{e^{t}\operatorname{sh} t + 1}{2\operatorname{ch}^2 t}, \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}\right).$$

$$\boxed{\vec{B} = \left(-\frac{e^{-t}}{2\operatorname{ch} t}, \frac{e^t}{2\operatorname{ch} t}, \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}\right)}.$$

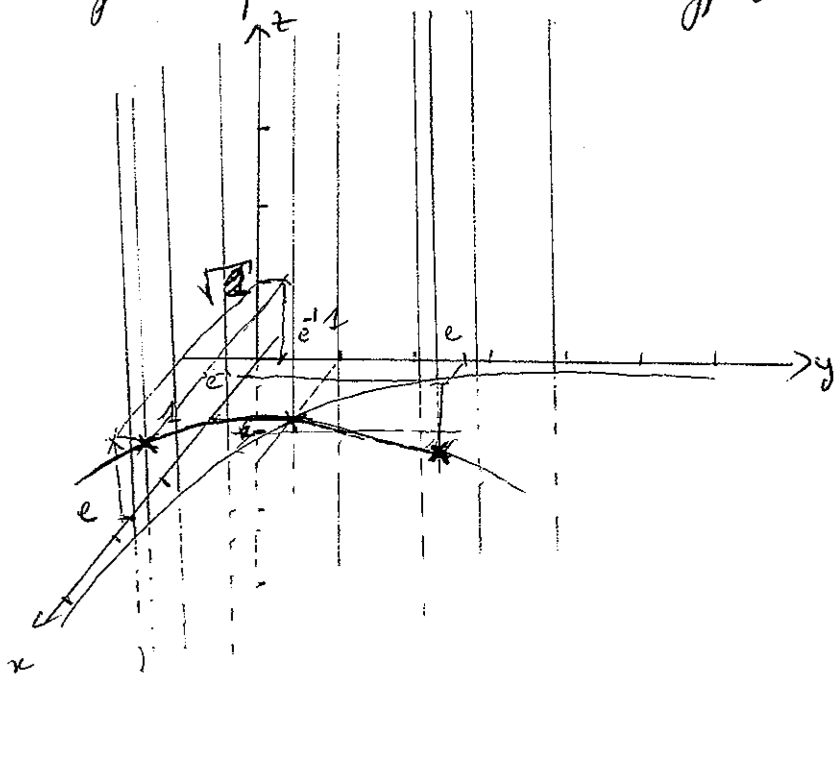
Puis $\frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 t}, \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 t}, \frac{-\operatorname{sh} t}{\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t}\right) = -\tau\,\|\gamma'(t)\|\,\vec{N}$

d'où $\boxed{\tau = -\frac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2(t)}}$.

4) Sur $z = 0$, la projection de Γ vérifie $xy = 1$. C'est une branche d'hyperbole $x, y > 0$.



La courbe Γ se trouve sur le cylindre engendré par cette branche d'hyperbole.



Ex 2 :

1) Le cercle de centre $(b,0,0)$ et de rayon a dans le plan xOz paramétré par

$$\gamma(t) = (b + a\cos t,\ 0,\ a\sin t)\ ,\quad t \in [0, 2\pi[.$$

Le tore T est donné par

$$f(t,\varphi) = R_\varphi(\gamma(t)) \quad \text{où} \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi \in [0,2\pi[$$

$$\boxed{f(t,\varphi) = \left(\cos\varphi\,(b+a\cos t),\ \sin\varphi\,(b+a\cos t),\ a\sin t\right).\ (t,\varphi) \in [0,2\pi[^2}$$

Le méridien à l'angle $\varphi_0 \in [0,2\pi[$ est donné par

$$f(t,\varphi_0) = (\cos\varphi_0\,(b+a\cos t),\ \sin\varphi_0\,(b+a\cos t),\ a\sin t) \quad t \in [0,2\pi[$$

Le parallèle au temps $t_0 \in [0,2\pi[$ est donné par

$$f(t_0,\varphi) = (\cos\varphi\,(b+a\cos t_0),\ \sin\varphi\,(b+a\cos t_0),\ a\sin t_0) \quad \varphi \in [0,2\pi[$$

2) $\partial_t f = (-a\cos\varphi\sin t,\ -a\sin\varphi\sin t,\ a\cos t)$

$\partial_\varphi f = (-\sin\varphi\,(b+a\cos t),\ \cos\varphi\,(b+a\cos t),\ 0)$

Donc
$$\partial_t f \wedge \partial_\varphi f = \begin{pmatrix} -a\cos\varphi\sin t \\ -a\sin\varphi\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\varphi\,(b+a\cos t) \\ \cos\varphi\,(b+a\cos t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_t f \wedge \partial_\varphi f = \left(-a\cos\varphi\cos t\,(b+a\cos t),\ -a\sin\varphi\cos t\,(b+a\cos t),\ -a\sin t \times (b+a\cos t)\right)$$

$$\|\partial_t f \wedge \partial_\varphi f\| = \sqrt{a^2\cos^2 t\,(b+a\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\,(b+a\cos t)^2}$$

$$\|\partial_t f \wedge \partial_\varphi f\| = a\,|b+a\cos t| = a(b+a\cos t) \quad \text{car} \quad a<b \ \text{et}\ |\cos t| \leq 1 \quad t\in[0,2\pi[$$

Ainsi $\|\partial_t f \wedge \partial_\varphi f\|$ ne s'annule jamais. Tous les points de T sont réguliers, et le vecteur normal unitaire.

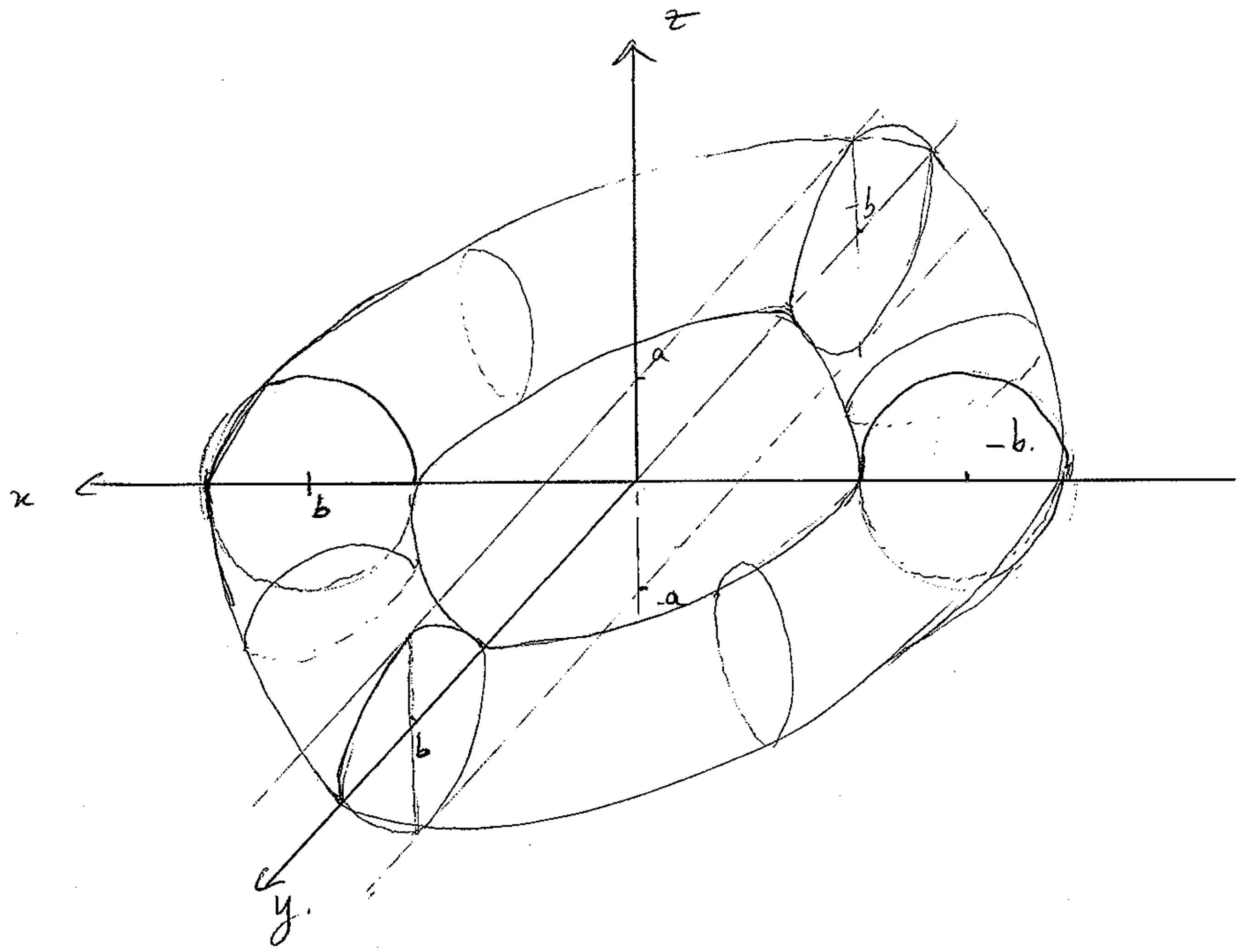
$$\boxed{\vec{N}_T = \frac{\partial_t f \wedge \partial_\varphi f}{\|\partial_t f \wedge \partial_\varphi f\|} = \left(-\cos\varphi\cos t,\ -\sin\varphi\cos t,\ -\sin t\right)}.\ ,\ (t,\varphi) \in [0,2\pi[^2$$

3) (voir page suivante) $\quad f(t,\varphi) = (x,y,z)$,

4) $x^2 + y^2 = \cos^2\varphi\,(b+a\cos t)^2 + \sin^2\varphi\,(b+a\cos t)^2 = (b+a\cos t)^2$

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2 = \left((b+a\cos t)^2 + a^2\sin^2 t + b^2 - a^2\right)^2$$
$$= (2b^2 + 2ab\cos t)^2 = 4b^2(b+a\cos t)^2$$

T vérifie donc
$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2 = 4b^2(x^2+y^2).$$



z
x
y.
a
a
b
b
b
-b.