DEVOIR MAISON 3 (24 – 31 mai 2012)

Exercice 1 – Dessiner les domaines D et calculer les intégrales multiples suivantes :

1. $\mathrm{Aire}\,(D)$, où D est la portion du plan cartesien délimitée par les courbes $x+y=1$ et $y^2=x+1$.

2. $\displaystyle\iint_D x^2(y-1)\;dx\,dy$, où D est l'intérieur du triangle délimité par les droites $x=0$, $y=0$ et $x+y=1$.

3. $\displaystyle\iint_D (2x-y)\;dx\,dy$, où D est l'intérieur du parallélogramme délimité par les droites $x+y=1$, $x+y=3$, $2x-y=1$ et $2x-y=3$.

[*Hint :* utiliser le changement de variables $u=x+y$ et $v=2x-y$.]

4. $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\;dx\,dy$, où D est la portion du disque unitaire contenue dans le quadrant $x\geq 0$ et $y\geq 0$.

[*Hint :* utiliser le changement de variables en coordonnées polaires.]

5. $\mathrm{Vol}\,(D)$, où D est la portion de l'espace cartesien $\mathbb{R}^3$ délimitée par les surfaces $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $x+y+z=1$.

Exercice 2 – Soient f la fonction et α et ω les formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy^2+yz \\ \alpha(x,y,z) &= y\;dx+z\;dy+x\;dz \\ \omega(x,y,z) &= x^2\;dx\wedge dy+xy\;dy\wedge dz+z^2\;dx\wedge dz. \end{aligned}$$

1. Calculer les différentielles df, $d\alpha$ et $d\omega$.

2. Calculer les produits extérieurs $df\wedge\alpha$ et $\alpha\wedge\omega$.

Exercice 3 – Pour les deux formes différentielles ω suivantes, définies sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$, dire si ω est fermée, si elle est exacte, et dans ce cas trouver les fonctions f sur U telles que $\omega=df$.

1. $\omega(x,y)=xy^2\;dx+x^2y\;dy$ sur $U=\mathbb{R}^2$.

2. $\omega(x,y)=\dfrac{y\;dx-2x\;dy}{y^3}$ sur $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$. Et sur $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}$?