Université Claude Bernard Lyon 1
Parcours Math-Info - Licence 2ème année

UE Géométrie et Calcul Différentiel
Printemps 2014

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1

mardi 27 mars 2014

Réglement – L'épreuve dure 45 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Notes personnelles et documents sont autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Entre crochets [ ] est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice – On appelle **courbe Kappa** la courbe plane paramétrée en coordonnées polaires $\gamma(\theta) = \rho(\theta)\ e^{i\theta}$ par

$$\rho(\theta) = \left| \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right|, \qquad \theta \in\ ]0, \pi[\ \cup\ ]\pi, 2\pi[.$$

1. [3 pts] – Étudier et dessiner la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$.

La courbe γ est-elle de classe C^∞ sur son domaine $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$?

2. [3 pts] – La courbe γ est-elle régulière ? Si elle ne l'est pas, trouver les points singuliers.

3. [3 pts] – Soient T_{Ox} et T_{Oy} les symétries axiales d'axes respectivement la droite Ox d'équation $y = 0$ et la droite Oy d'équation $x = 0$, c'est-à-dire les transformations du plan définies par

$$T_{Ox}(x, y) = (x, -y) \qquad \text{et} \qquad T_{Oy}(x, y) = (-x, y).$$

Montrer que le support de la courbe γ est invariant par ces deux transformations, c'est-à-dire que pour tout θ il existe $u(\theta)$ et $v(\theta)$ tels que

$$T_{Ox}(\gamma(\theta)) = \gamma(u(\theta)) \qquad \text{et} \qquad T_{Oy}(\gamma(\theta)) = \gamma(v(\theta)).$$

4. [4 pts] – Montrer que le support de la courbe γ est contenu dans la bande $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ du plan.

Ensuite montrer que la droite $y = 1$ est asymptote à γ pour $\theta \to 0^+$ et $\theta \to \pi^-$, et que la droite $y = -1$ est asymptote à γ pour $\theta \to \pi^+$ et $\theta \to 2\pi^-$.

Enfin, dessiner le support de γ.

5. [3 pts] – Posons $\gamma(\theta) = \big(x(\theta), y(\theta)\big)$. Calculer $y(\theta)^2$ et $x(\theta)^2 + y(\theta)^2$, et trouver l'équation cartésienne du support de γ.

6. [4 pts] – Calculer la courbure de γ en tout point $t \in\ ]0, \pi/2[$.

La courbe γ est-elle birégulière ?