Géométrie et Calcul Diff. - 2014 - Corrigé du DM 1 - 13 mars 2014 - A. Frabetti

Exo $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (t-t^2, t+t^2)$

1. $\gamma$ est une param. $C^\infty$ car les composantes $x(t) = t-t^2$ et $y(t) = t+t^2$ sont $C^\infty$.

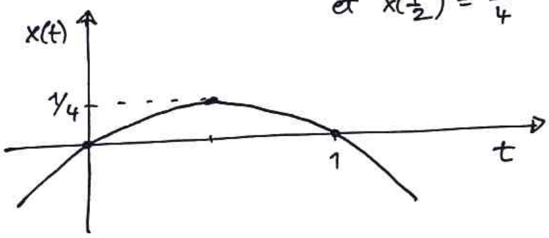
2. $\gamma'(t) = (1-2t, 1+2t) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = -1/2 \end{cases}$ impossible. Donc $\gamma$ est régulière partout.

3. $\gamma(0) = (0,0)$

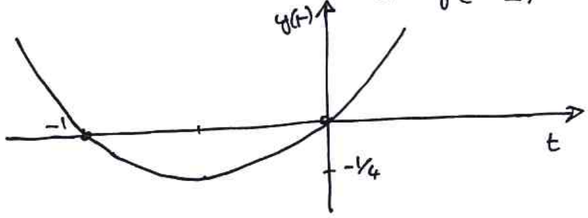
$x(t) = t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$ donc $\gamma$ intersecte l'axe $\vec{Oy}$ en $t=0$ et $t=1$, $\gamma(1) = (0,2)$.

$y(t) = t+t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \end{cases}$ donc $\gamma$ intersecte l'axe $\vec{Ox}$ en $t=0$ et $t=-1$, $\gamma(-1) = (-2,0)$.

$x(t) = t - t^2$
$x'(t) = 1-2t = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$
$x''(t) = -2 < 0 \Rightarrow x(t)$ est max. en $t = 1/2$ et $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

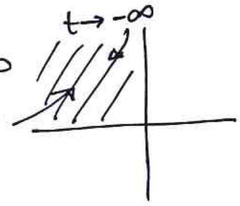



$y(t) = t + t^2$
$y'(t) = 1+2t = 0 \Leftrightarrow t = -1/2$
$y''(t) = 2 > 0 \Rightarrow y(t)$ est min. en $t = -1/2$ et $y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$




Pour $t \to -\infty$, on a $x(t) \to -\infty$ et $y(t) \to +\infty$, donc $x<0$ et $y>0$

Pour $t \to +\infty$, on a $x(t) \to -\infty$ et $y(t) \to +\infty$, idem

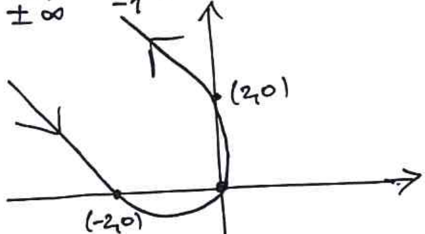



Pour dessiner le graphe :

- y a-t-il des pts doubles ? i.e. $\exists a \neq b$ t.q. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ? $\Leftrightarrow \begin{cases} a-a^2 = b-b^2 \\ a+a^2 = b+b^2 \end{cases} \overset{\text{somm}}{\Leftrightarrow} \{ 2a = 2b \Leftrightarrow a = b \rightsquigarrow$ non : pas de pts doubles.

- $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t+t^2}{t-t^2} = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{-1+\frac{1}{t^2}} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$ droite $y = -x$ asymptotique.

$\Rightarrow$ support de $\gamma$ :




4. $u(t) = t - t^2$ n'est pas un chmt. de param. admissible, car ce n'est pas un difféo. (pas strict. monotone)

5. $\begin{cases} x = t-t^2 \\ y = t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2t \\ y-x = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow y-x = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2$ donc : $(x+y)^2 = 2(y-x)$.

6. $\gamma'(t) = (1-2t, 1+2t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1-2t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{2(1+4t^2)}$

$\gamma''(t) = (-2, 2)$

$\Rightarrow k_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|2(1-2t) + 2(1+2t)|}{2\sqrt{2}\,(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{2}\,(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{(1+4t^2)^{3/2}}$.

$k_\gamma(t) \neq 0 \ \forall t$, donc $\gamma$ est birégulière.

7. $k_\gamma(t)$ max $\Leftrightarrow R_\gamma(t) = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{\sqrt{2}}$ min $\underset{x \mapsto x^{3/2} \text{ croissante}}{\Longleftrightarrow}$ $1+4t^2$ min $\Leftrightarrow t=0$

et $k_\gamma(0) = \sqrt{2}$.