

## DEVOIR MAISON 2

8 – 17 avril 2014

**Réglement** – Devoir à rendre le jeudi 17 avril en TD. Chaque exercice vaut 10 points sur 20.

**Exercice 1** – Soit  $\Gamma$  la courbe gauche définie par le paramétrage  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

1. – Le paramétrage  $\gamma$  est-il régulier ?
2. – Montrer que  $\Gamma$  est contenue dans le cône d'équation  $x^2 + y^2 = z^2$ , et dessiner  $\Gamma$ .  
Trouver deux équations cartésiennes décrivant  $\Gamma$  pour  $t \in ]0, \pi/2[$ .
3. – Calculer la longueur de la courbe  $\gamma$  sur l'intervalle  $[0, \sqrt{2}]$ .  
*Hint* : utiliser le changement de variable  $\frac{t}{\sqrt{2}} = \operatorname{sh} u$ , où  $\operatorname{sh} u$  et  $\operatorname{ch} u$  sont respectivement le sinus et le cosinus hyperboliques de  $u$ , en sachant que  $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$  et que  $\int \operatorname{ch}^2 u \, du = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + u)$ .
4. – Calculer la courbure de  $\gamma$ . Le paramétrage est-il birégulier ?
5. – Calculer la torsion de  $\gamma$ .

**Exercice 2** – Soit  $S$  la surface de révolution de méridien  $\alpha(t) = (e^t, 0, t)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

1. – Donner un paramétrage  $f(t, \varphi) = (x(t, \varphi), y(t, \varphi), z(t, \varphi))$  de  $S$  et dessiner la surface.
2. – Déterminer les points réguliers de  $S$ , et calculer son vecteur normal unitaire.
3. – Donner la paramétrisation des deux parallèles à  $t = 0$  et  $t = 1$  et les dessiner. Soit  $\Sigma$  la bande de  $S$  comprise entre ces deux parallèles. Calculer l'aire de  $\Sigma$ .
4. – Trouver une équation cartésienne pour  $S$ .

Montrer que  $S$  est le graphe d'une fonction  $z = g(x, y)$ .

5. – Soit  $D$  le disque avec bord donné par le méridien à  $t = 0$  (moins son origine). Calculer le volume de la portion d'espace  $\Omega$  délimitée par  $S$  et le disque  $D$ .

*Hint* : utiliser l'intégrale double de la valeur absolue de  $g$ , et le changement en coordonnées polaires.