

DEVOIR MAISON 2

8 – 17 avril 2014

Réglement – Devoir à rendre le jeudi 17 avril en TD. Chaque exercice vaut 10 points sur 20.

Exercice 1 – Soit Γ la courbe gauche définie par le paramétrage $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. – Le paramétrage γ est-il régulier ?
2. – Montrer que Γ est contenue dans le cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$, et dessiner Γ .
Trouver deux équations cartésiennes décrivant Γ pour $t \in]0, \pi/2[$.
3. – Calculer la longueur de la courbe γ sur l'intervalle $[0, \sqrt{2}]$.
Hint : utiliser le changement de variable $\frac{t}{\sqrt{2}} = \operatorname{sh} u$, où $\operatorname{sh} u$ et $\operatorname{ch} u$ sont respectivement le sinus et le cosinus hyperboliques de u , en sachant que $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ et que $\int \operatorname{ch}^2 u \, du = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + u)$.
4. – Calculer la courbure de γ . Le paramétrage est-il birégulier ?
5. – Calculer la torsion de γ .

Exercice 2 – Soit S la surface de révolution de méridien $\alpha(t) = (e^t, 0, t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. – Donner un paramétrage $f(t, \varphi) = (x(t, \varphi), y(t, \varphi), z(t, \varphi))$ de S et dessiner la surface.
2. – Déterminer les points réguliers de S , et calculer son vecteur normal unitaire.
3. – Donner la paramétrisation des deux parallèles à $t = 0$ et $t = 1$ et les dessiner. Soit Σ la bande de S comprise entre ces deux parallèles. Calculer l'aire de Σ .
4. – Trouver une équation cartésienne pour S .

Montrer que S est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.

5. – Soit D le disque avec bord donné par le méridien à $t = 0$ (moins son origine). Calculer le volume de la portion d'espace Ω délimitée par S et le disque D .

Hint : utiliser l'intégrale double de la valeur absolue de g , et le changement en coordonnées polaires.