Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Géométrie et Calcul Différentiel

Parcours Math-Info - Licence 2ème année — Printemps 2015

CONTRÔLE FINAL – 4 juin 2015

Réglement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso.

Entre parenthèse est indiqué le barême.

Exercice 1 [6 pts = 1+1+2+2]

Soit γ la courbe gauche paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \operatorname{ch} t), \qquad t \in [-\pi, \pi],$$

où $\operatorname{ch} t$ denote le cosinus hyperbolique, $\operatorname{sh} t$ le sinus hyperbolique, et on rappelle qu'on a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$ et $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$.

a) Trouver les points réguliers de γ.

b) Calculer la longueur de γ.

c) Calculer la courbure de γ.

d) Calculer la torsion de γ.

Exercice 2 [3 pts]

Calculer l'aire du paraboloïde S parametré par

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2), \qquad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Exercice 3 [5 pts = 3+2]

Pour les deux formes différentielles suivantes, trouver le domaine, déterminer si elles sont fermées et exactes, et si c'est le cas trouver une primitive.

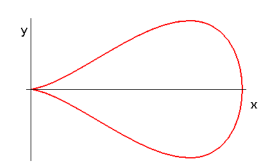
a) $\alpha(x, y) = \dfrac{1}{x^2 y^3}\, dx + \dfrac{3}{x y^4}\, dy$

b) $\omega(x, y) = x \cos y \; dx \wedge dy$

Exercice 4 [6 pts]

En utilisant le théorème de Green-Riemann, calculer l'aire du domaine entouré par la **courbe piriforme** (de *pirum*, poire), aussi appellée **goutte d'eau**, d'équation cartesienne

$$y^2 = x^3(1 - x),$$



et paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos^3 t \sin t), \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Nota – On rappelle que

$$\int \cos^4 t \; dt = \frac{3}{8}t + \frac{3}{8}\sin t \cos t + \frac{1}{4}\sin t \cos^3 t$$

$$\int \cos^6 t \; dt = \frac{5}{16}t + \frac{5}{16}\sin t \cos t + \frac{5}{24}\sin t \cos^3 t + \frac{1}{6}\sin t \cos^5 t.$$