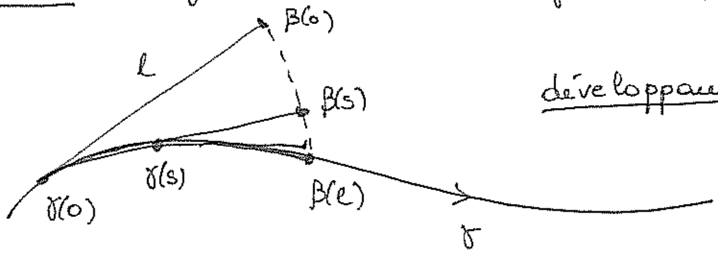
Exercice 11 $\quad \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ régulière, $\|\gamma'(s)\| = 1 \quad \forall s \in I$.



développante β de γ

1. Écrire la représentation paramétrique de la développante.

Pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, fixé et pour tout $s \in [0, \ell]$ on a :

$$\beta(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\,\gamma'(s).$$

2. M.q. β est régulière si k_γ ne s'annulle pas.

$$\beta'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (\ell - s)\,\gamma''(s) = (\ell - s)\cdot k_\gamma(s)\cdot \vec{N}_\gamma(s)$$

pour tout $s < \ell$ on a $\beta'(s) = 0 \Leftrightarrow k_\gamma(s) = 0$, et $\beta'(\ell) = 0$.

On a donc : $\beta'(s) \neq 0 \Leftrightarrow s \neq \ell$ et $k_\gamma(s) \neq 0$.

3. M.q. la normale à β en $\beta(s)$ est la tangente à γ en $\gamma(s)$.

Il faut entendre ici : "la direction normale" et "la direction tangente".

On utilise le système de Frenet pour β et pour γ ; pour $s < \ell$:

$$\vec{T}_\beta(s) := \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{(\ell-s)\,k_\gamma(s)\cdot \vec{N}_\gamma(s)}{(\ell-s)\,k_\gamma(s)} = \vec{N}_\gamma(s)$$

$$\vec{N}_\beta(s) := \frac{\vec{T}_\beta'(s)}{\|\vec{T}_\beta'(s)\|} = \frac{\vec{N}_\gamma'(s)}{\|N_\gamma'(s)\|} = -\frac{k_\gamma(s)\cdot \vec{T}_\gamma(s)}{k_\gamma(s)} = -\vec{T}_\gamma(s)$$

donc la direction normale à β en $\beta(s)$ = dir. tangente à γ en $\gamma(s)$.

4. Déterminer la courbure et le centre de courbure de β en s.

γ est paramétrée par longueur d'arc, mais β non :

$$k_\beta(s) = \frac{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3} \quad \text{où :}$$

$$\beta'(s) = (\ell - s)\,\gamma''(s) \implies \|\beta'(s)\| = (\ell-s)\,\|\gamma''(s)\| = (\ell - s)\,k_\gamma(s)$$

$$\beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell - s)\,\gamma'''(s)$$

donc $\|\beta'(s)\wedge\beta''(s)\| = \| -(\ell-s)\underbrace{\gamma''(s)\wedge\gamma''(s)}_{=0} + (\ell-s)^2\,\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\| = (\ell-s)^2\,\|\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\|$

$$\gamma'(s) = \vec{T}_\gamma(s), \quad \gamma''(s) = k_\gamma(s)\cdot\vec{N}_\gamma(s) \implies \gamma'''(s) = k_\gamma'(s)\cdot\vec{N}_\gamma(s) + k_\gamma(s)\cdot\underbrace{\vec{N}_\gamma'(s)}_{= -k_\gamma(s)\cdot T_\gamma(s)}$$

donc $\|\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\| = \| k_\gamma\cdot k_\gamma'\cdot \underbrace{N_\gamma\wedge N_\gamma}_{=0} - k_\gamma^3\cdot N_\gamma\wedge T_\gamma\| = k_\gamma^3(s)\,\underbrace{\|-N_\gamma\wedge T_\gamma\|}_{=1} = k_\gamma^3(s)$

$$\implies k_\beta(s) = \frac{(\ell-s)^2\cdot k_\gamma^3(s)}{(\ell-s)^3\cdot k_\gamma^3(s)} = \frac{1}{\ell - s}.$$

Suite Ex. 11 4.

Pour trouver le centre de courbure de β en $\beta(s)$ (c'est-à-dire la développée α_β de β) on calcule $R_\beta(s) = \dfrac{1}{\kappa_\beta(s)} = \ell - s$ et on a :

$$\alpha_\beta(s) = \beta(s) + R_\beta(s)\cdot \vec{N}_\beta(s) = \gamma(s) + (\ell-s)\,\gamma'(s) - (\ell-s)\,\gamma'(s) = \gamma(s).$$

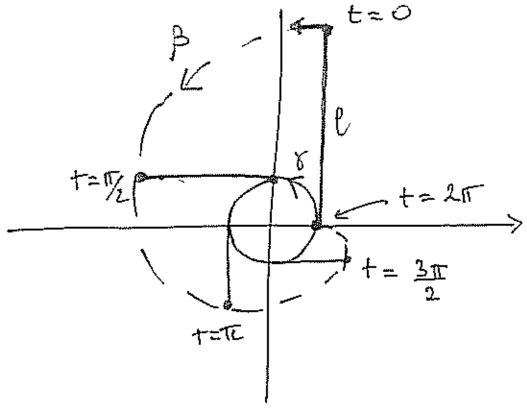
Donc la développée de β est égale à γ.

5. Dessiner la développante du cercle.

Cercle : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ déja param. par longueur d'arc, car $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = 1 \ \forall t$. Supposons $t \in [0, 2\pi]$.

Développante : $\beta(t) = \gamma(t) + (\ell - t)\,\gamma'(t) = \big(\cos t + (\ell-t)\sin t,\ \sin t + (\ell - t)\cos t\big)$.

Dessin pour $\ell = 2\pi$:



$\ell = 2\pi \Rightarrow$ $\beta(0) = (1, \ell) = (1, 2\pi)$

$\beta(\pi/2) = (\frac{\pi}{2} - \ell, 1) = (-\frac{3\pi}{2}, 1)$

$\beta(\pi) = (-1, \pi - \ell) = (-1, -\pi)$

$\beta(2\pi) = (1, \ell - 2\pi) = (1, 0)$

et aussi $\beta'(2\pi) = \underbrace{(\ell - 2\pi)}_{=0}\cdot\gamma''(2\pi) \perp \gamma'(2\pi)$

$\beta'(0) = \underset{2\pi}{\ell}\cdot\gamma''(0) \perp \gamma'(0)$!

6. Quelle est la forme de β si le fil traverse un point ~~singulier~~ d'inflexion de γ ?

γ a un point d'inflexion en s_0 si les premières deux dérivées non nulles de γ en s_0 sont $\gamma^{(p)}(s_0)$ et $\gamma^{(q)}(s_0)$ avec p impair et q impair aussi.

Calculons les dérivées de β :

$\beta(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\gamma'(s)$

$\beta'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (\ell-s)\gamma''(s) = (\ell - s)\gamma''(s)$

$\beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell - s)\gamma'''(s)$

$\beta'''(s) = -2\gamma'''(s) + (\ell-s)\gamma^{(4)}(s)$ etc, et en général :

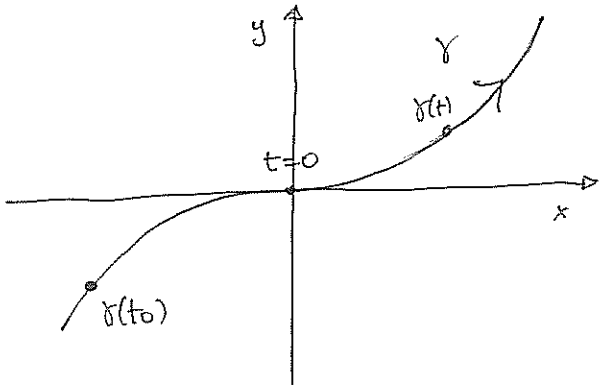
$\beta^{(n)}(s) = -(n-1)\,\gamma^{(n)}(s) + (\ell - s)\,\gamma^{(n+1)}(s)$.

Puisque γ est régulière en s_0, on a $\gamma'(s_0) \neq 0$, donc $p = 1$.
Puisque s_0 est un point d'inflexion, on a q impair > 1, donc $q \geq 3$.
Alors $\gamma''(s_0) = 0$ et donc $\beta'(s_0) = 0$, i.e. β est singulière en s_0.

La première dérivée non nulle de β en s_0 est donc $\beta''(s_0)$ si $q = 3$ ou bien $\beta^{(4)}(s_0)$ si $q = 5$, i.e. $\beta^{(q-1)}(s_0)$, où $q-1$ est pair.
Donc $\beta(s_0)$ est un point cuspidal.

Suite Ex. 11, 6.

Dessiner la développante de la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$.



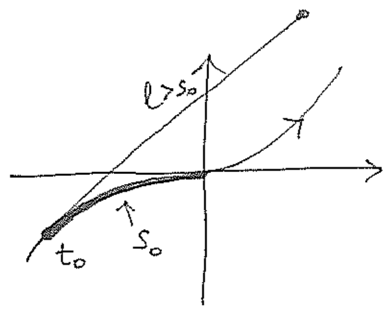
La courbe γ a un point d'inflexion en $t=0$.
Choisissons alors un point de départ $t_0<0$ et un $t>0$ pour traverser l'inflexion.

Cette courbe n'est pas parametrée par longueur d'arc, car $\gamma'(t) = (1, 3t^2)$ a longueur $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+9t^4} = 1 \Leftrightarrow t=0$.
La paramétrisation de sa développante β doit donc être modifiée :

$$\beta(t) = \gamma(t) + (\ell - s(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

où $s(t)$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \underbrace{\int_{t_0}^{0} \sqrt{1+9u^4}\, du}_{s_0} + \int_0^t \sqrt{1+9u^4}\, du$$



Supposons que la longueur de l'arc entre t_0 et 0 soit s_0. Pour traverser le point d'inflexion on suppose alors que $\ell > s_0$.
Ensuite choisissons $t>0$ proche de 0, on a alors :

$$\sqrt{1+9u^4} = (1+9u^4)^{\frac{1}{2}} \underset{u\to 0}{\sim} 1 + \frac{9}{2}u^4 + \mathcal{O}(u^8)$$

donc

$$s(t) = s_0 + \int_0^t \left(1 + \frac{9}{2}u^4 + \mathcal{O}(u^8)\right) du = s_0 + t + \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)$$

$$\frac{\ell - s(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\ell - s_0 - t - \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)}{1 + \frac{9}{2}t^4 + \mathcal{O}(t^8)} = \left((\ell - s_0) - t - \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)\right)\left(1 - \frac{9}{2}t^4 + \mathcal{O}(t^8)\right)$$

$$= (\ell - s_0) - t - \frac{9}{2}(\ell - s_0)t^4 + \mathcal{O}(t^5)$$

La développante de $\gamma(t) = (t, t^3)$ est donc

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \left[(l-s_0) - t - \frac{9}{2}(l-s_0)t^4 + \theta(t^5) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{t} + (l-s_0) \cancel{-t} - \frac{9}{2}(l-s_0)t^4 + \theta(t^5) \\ t^3 + 3(l-s_0)t^2 - 3t^3 + \theta(t^5) \end{pmatrix}$$

$$= \left((l-s_0) - \frac{9}{2}(l-s_0)t^4 + \theta(t^5) \ , \ 3(l-s_0)t^2 - 2t^3 + \theta(t^5) \right).$$

On a alors:

$\beta'(t) = \left(-18(l-s_0)t^3 + \theta(t^4) \ , \ 6(l-s_0)t - 6t^2 + \theta(t^4) \right)$,

donc $\beta'(0) = (0,0)$, β est singulière en $t=0$.

$\beta''(t) = \left(-54(l-s_0)t^2 + \theta(t^3), \ 6(l-s_0) - 12t + \theta(t^3) \right)$

donc $\beta''(0) = (0, 6(l-s_0)) \neq (0,0)$ $\rightarrow$ première dérivée $\beta^{(p)}(0)$ non nulle pour $p=2$

$\beta'''(t) = \left(-108(l-s_0)t + \theta(t^2), \ -12 + \theta(t^2) \right)$

donc $\beta'''(0) = (0, -12) \neq (0,0)$ mais $\beta'''(0) \mathbin{/\!/} \beta''(0)$

donc il n'est pas lin. indép.

$\beta^{(4)}(t) = \left(-108(l-s_0) + \theta(t) \ , \ \theta(t) \right)$

donc $\beta^{(4)}(0) = (-108(l-s_0), 0) \neq (0,0)$ et $\beta^{(4)}(0) \perp \beta''(0)$!

Le développante de γ a donc un point de rebroussement de 2ème espèce dans le point d'inflexion de γ :