Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de Mathématiques 2ème année
Printemps 2016

UE Géométrie et Calcul Différentiel
A. Frabetti (CM), V. Borrelli et V. Dang (TD)
http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/

FICHE TD 2 - COURBES GAUCHES

Exercice 1 Considerons la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que γ est C^∞.
2. Montrer que γ est régulière et que $k(t) \neq 0$ si $t \neq 0$ et $t \neq \pm\sqrt{2/3}$.
3. Montrer que le plan osculateur est le plan $y = 0$ pour $t > 0$ ($t \neq \sqrt{2/3}$) et le plan $z = 0$ pour $t < 0$ ($t \neq -\sqrt{2/3}$).
4. Montrer que la torsion de γ est nulle en tout point birégulier, mais la courbe n'est pas plane.

Exercice 2 L'*hélice circulaire* est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, où $a \neq 0$.

1. Déterminer l'abscisse curviligne.
2. Déterminer la courbure et la torsion.
3. Déterminer son plan osculateur.
4. Montrer que, pour tout t, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(t)$ coupe l'axe Oz sous un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe Oz un angle constant.

Exercice 3 Soit γ une courbe de $\mathbb{R}^3$ de courbure $k = \frac{1}{\rho}$ et torsion τ.

1. Montrer que si $k \neq 0$ et $\tau \neq 0$, alors la condition
$$\rho^2 + (\rho')^2/\tau^2 = r^2$$
est nécessaire pour que γ soit tracée sur une sphère de rayon r.
2. Montrer que si de plus $\rho' \neq 0$, alors la condition est aussi suffisante.