FICHE TD 4 - INTÉGRALES MULTIPLES

Exercice 1 En utilisant le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales doubles et le théorème de Fubini, montrer le lemme de Schwarz suivant:

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction admettant les dérivées partielles $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$ continues sur U, alors $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ sur U.

[*Hint:* raisonner par l'absurde.]

INTÉGRALES CURVILIGNES

Exercice 2 Calculer les intégrales curvilignes suivantes:

a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \big(xy^2\ dx + 2xy\ dy\big)$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0), (1,0), (0,1)$ parcouru dans le sens positif.

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y + xy)\ dx$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par l'arc de parabole $y = x^2$ et la portion de droite $y = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \Big((3x^2 - 8y^2)\ dx + (4y - 6xy)\ dy\Big)$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par les arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

d) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \Big(\frac{x^2}{y}\ dx + \frac{y^2}{x}\ dy\Big)$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine, parcouru dans le sens antihoraire.

e) $\displaystyle\int_{\gamma} f\ ds$, où γ est la portion d'hélice paramétrée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pour $t \in [a, b]$ et $f(x, y, z) = xy + z$.

INTÉGRALES DOUBLES

Exercice 3 Calculer les intégrales doubles suivantes:

a) $\displaystyle\iint_D xy\ dx\, dy$, où $D = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D (x - y)\ dx\, dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x = 0$, $y = x + 2$, $y = -x$.

c) Même intégrale mais en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

d) $\displaystyle\iint_D (4 - x^2 - y^2)\ dx\, dy$, où $D = \big\{(x, y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ est le quart de disque unité.

[*Hint:* utiliser les coordonnées polaires.]

Exercice 4 Calculer l'aire des surfaces S suivantes:

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

b) $S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{2} \leq x \leq 2\Big\}$. Comparer l'aire de S à l'intégrale

$$\iint_S (1 + xy)\ dx\ dy.$$

c) S est la sphère de rayon r centrée en l'origine.

d) S est le tore de revolution.

e) S est le tronc d'hélicoïde paramétré par

$$f(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au), \qquad \text{avec } u \in [0,\pi/2],\ v \in [0,1] \text{ et } a > 0.$$

Exercice 5 Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

INTÉGRALES TRIPLES

Exercice 6 Calculer les intégrales triples suivantes:

a) $\displaystyle\iiint_D (x^2y + xz^2)\, dx\, dy\, dz$, où $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_D \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, où D est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.
[*Hint:* utiliser les coordonnées sphériques.]

Exercice 7 Calculer le volume de la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon r.

Exercice 8 (Culbuto homogène en équilibre)

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo: MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Pour que ce culbuto revienne à sa position verticale d'équilibre il faut que le centre de masse G se trouve strictement en dessous du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Pour quelles valeurs de a le culbuto revient-il donc à l'équilibre en position verticale?

Concrètement, soit K_a l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \le z \le a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 & \text{si } -1 \le z \le 0, \\ x^2+y^2 \le \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \le z \le a. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1,a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.