Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de Mathématiques 2ème année
Printemps 2016

UE Géométrie et Calcul Différentiel
A. Frabetti (CM), V. Borrelli et V. Dang (TD)
http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/

FICHE TD 5 - FORMES DIFFÉRENTIELLES ET THÉORÈME DE STOKES

FORMES DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 Soient f la fonction et α, β, ω les formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^2 \\ \alpha(x,y) &= \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\ \beta(x,y) &= y\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \\ \omega(x,y) &= xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

1. Calculer les produits extérieurs $\alpha \wedge \alpha$, $\alpha \wedge \beta$ et $\alpha \wedge \omega$.
2. Calculer les différentielles $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$ et $\mathrm{d}\omega$.

Exercice 2 Soient f la fonction et α, β, ω les formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3y + \mathrm{e}^z \\ \alpha(x,y,z) &= z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z \\ \beta(x,y,z) &= y\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}z \\ \omega(x,y,z) &= \cos(z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \sin(z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

1. Calculer les produits extérieurs $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \omega$, $\mathrm{d}f \wedge \alpha \wedge \beta$ et $\omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}f$.
2. Calculer les différentielles $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$ et $\mathrm{d}\omega$.

Exercice 3 Pour chacune des formes différentielles ω suivantes, définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, dire si ω est fermée, si elle est exacte, et dans ce cas trouver les fonctions f sur U telles que $\omega = \mathrm{d}f$.

1. $\omega(x,y) = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$,
2. $\omega(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ sur $U = \{x > 0, y > 0\}$. Et sur $\mathbb{R}^2_*$?
3. $\omega(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{xy}$ sur $U = \{x > 0, y > 0\}$.
4. $\omega(x,y) = y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$.
   [*Hint*: Chercher η sous la forme $\eta(x,y) = f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ou $\eta(x,y) = g(x,y)\,\mathrm{d}y$.]

THÉORÈME DE GREEN-RIEMANN

Exercice 4 Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\big\}$. On pose

$$I = \int_{\partial D} xy^2 \,\mathrm{d}x + 2xy \,\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad J = \int_{\partial K} xy^2 \,\mathrm{d}x + 2xy \,\mathrm{d}y.$$

1. Calculer I et J directement.
2. Calculer I et J en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 5 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - x)^2\}.$$

1. Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. Calculer l'intégrale double
$$I = \int\int_D (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$
3. Calculer l'intégrale curviligne
$$J = \int_{\partial D^+} (2y - y^3) \,\mathrm{d}x + (2x + x^3) \,\mathrm{d}y.$$
4. Comparer I et J. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 6 La *cardioïde* est la courbe plane définie en coordonnées polaires par

$$\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi \qquad \text{(ou bien } \rho(\varphi) = 1 + \sin\varphi\text{, etc).}$$

Calculer l'aire du domaine D entouré par cette courbe et vérifier l'inegalité isoperimétrique.

Exercice 7 La *cycloïde* est la courbe plane paramétrée par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = a\,\big(t - \sin t, 1 - \cos t\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

où a est une constante réelle strictement positive. Calculer l'aire du domaine D entouré par l'arche de cycloïde correspondant à $t \in [0, 2\pi]$ et par l'axe des abscisses.

Exercice 8 La *lemniscate de Bernoulli* est la courbe plane donnée en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)}.$$

Dessiner la lemniscate et calculer l'aire du domaine qu'elle entoure.

THÉORÈME DE GAUSS-OSTROGRADSKI

Exercice 9 Calculer les intégrales de surfaces suivantes de deux façons différentes: par calcul direct et en utilisant la formule de Gauss.

1. $\displaystyle\iint_S z^2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x^2 \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,$
où S est la boîte cylindrique composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ (avec $R > 0$) et $0 \leq z \leq h$ (avec $h > 0$), et de deux disques de rayon R aux niveaux $z = 0$ et $z = h$.
2. $\displaystyle\iint_S x^2y^2z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + xy \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - x^2 \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,$
où S est le bord du cube $[-1, 1]^3$.