

## COURS DE GÉOMÉTRIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

### Programme du cours

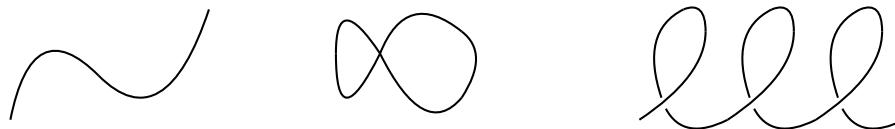
<b>1</b>	<b>Courbes planes et gauches</b>	<b>3</b>
1.1	Courbes paramétrées . . . . .	3
1.2	Courbes régulières et birégulières . . . . .	7
1.3	Longueur et abscisse curviligne . . . . .	8
1.4	Repère de Frenet, courbure et torsion . . . . .	10
1.5	Courbes définies implicitement . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Surfaces</b>	<b>21</b>
2.1	Surfaces paramétrées . . . . .	21
2.2	Courbes sur une surface . . . . .	23
2.3	Surfaces régulières . . . . .	23
2.4	Surfaces de révolution et surfaces réglées . . . . .	25
2.5	Aire des surfaces [à voir après Ch. 3] . . . . .	27
2.6	Surfaces définies implicitement . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Intégrales multiples, curvilignes et de surface</b>	<b>29</b>
3.1	Intégrale de Riemann des fonctions d'une variable . . . . .	29
3.2	Intégrales doubles . . . . .	35
3.3	Intégrales triples . . . . .	44
3.4	Aire et volume . . . . .	47
3.5	Intégrales curvilignes et de surface . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Champs de vecteurs et formes différentielles</b>	<b>51</b>
4.1	Espace tangent et espace cotangent d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ . . . . .	52
4.2	Champs de vecteurs . . . . .	54
4.3	Formes différentielles . . . . .	56
4.4	Différentielle de de Rham . . . . .	61
4.5	Formes exactes et fermées . . . . .	62
4.6	Lemme de Poincaré . . . . .	64
4.7	Intégrales des formes différentielles . . . . .	66
4.8	Théorèmes de Stokes, Gauss-Ostrogradski et Green-Riemann . . . . .	68
	<b>Références</b>	<b>70</b>

**Notations.** Dans l'espace ambiant on fixe un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  qui donne un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'ensemble des vecteurs de l'espace appliqués en  $O$  et  $\mathbb{R}^3$ . Les points  $P$  de l'espace, et les vecteurs correspondants  $\vec{OP}$ , sont donc identifiés à leurs coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

Sauf mention explicite, par "plan" on entend le plan avec le repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , identifié à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . Les points  $P$  du plan, et les vecteurs correspondants  $\vec{OP}$ , sont donc identifiés à leurs coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ .

# 1 Courbes planes et gauches

Une *courbe* est un sous-ensemble du plan ou de l'espace avec "degré de liberté intrinsèque" égal à 1, par exemple:



Pour décrire une courbe, soit on donne des contraintes aux coordonnées de ses points (*courbes définies implicitement*), par exemple

$$\text{Cercle du plan de rayon } r \text{ centré en l'origine} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\},$$

soit on décrit ses points comme fonctions d'un paramètre (*courbes paramétrées*), par exemple

$$\text{Même cercle} = \{(r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

La description implicite des courbes est la plus courante, mais c'est la description paramétrique qui permet d'en définir la *longueur* et les deux *invariants* réels qui caractérisent les courbes à déplacement près: la *courbure* et la *torsion*.

Dans ce chapitre on présente d'abord les courbes paramétrées, et ensuite on montre comment trouver une paramétrisation *locale* pour toute courbe *régulière*.

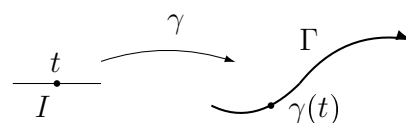
## 1.1 Courbes paramétrées

**Définition.** Une **courbe paramétrée** (ou **chemin**) de classe  $C^k$  (avec  $k \geq 0$ ) est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  de la forme

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I \subset \mathbb{R}\} = \gamma(I),$$

où  $I \subset \mathbb{R}$  est un interval et l'application  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^k$ , c'est-à-dire que les fonctions  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^k$ . Si la classe  $C^k$  n'est pas indiquée on suppose que la courbe soit lisse, c'est-à-dire de classe  $C^\infty$ . On appelle:

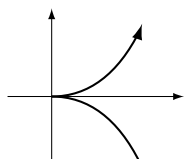
- **paramétrisation** de la courbe  $\Gamma$   
l'application  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;
- **paramètre** la variable  $t \in I$ ;
- **support (géométrique)** de la paramétrisation  $\gamma$  son image  $\text{supp}\gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ ;
- **orientation** de la courbe  $\Gamma$  le sens de parcour déterminé par  $t \in \mathbb{R}$  croissant.



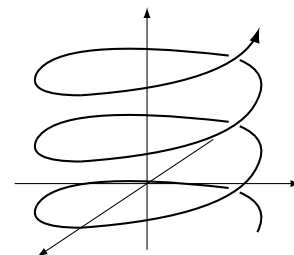
Ainsi, une courbe paramétrée est naturellement orientée.

**Exemples.**

- *Courbe cuspidale*  
 $\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$   
 $t \in \mathbb{R}$



- *Hélice circulaire*  
 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$   
 $t \in \mathbb{R}$ .



Si la paramétrisation est suffisamment dérivable, on appelle aussi:

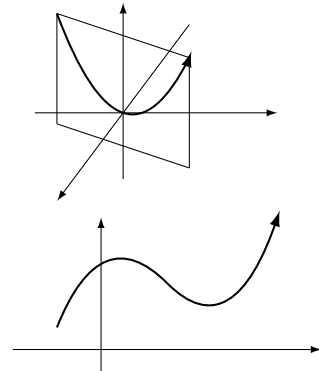
- **point**, ou **position**, de la courbe  $\Gamma$  à l'instant  $t$  le vecteur  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ ;
- **vitesse** de la courbe  $\Gamma$  à l'instant  $t$  le vecteur  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ ;
- **accélération** de la courbe  $\Gamma$  à l'instant  $t$  le vecteur  $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \in \mathbb{R}^3$ .

**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de classe  $C^k$ . On dit que

- $\gamma$  est une **droite** si son support  $\Gamma = \text{supp}\gamma$  est contenu dans une droite de  $\mathbb{R}^3$ . Cela arrive si et seulement si, pour tout  $t \in I$ , toutes les dérivées  $\gamma^{(p)}(t)$  non nulles sont des vecteurs colinéaires.
- $\gamma$  est une **courbe plane** si son support  $\Gamma = \text{supp}\gamma$  est contenu dans un plan de  $\mathbb{R}^3$ . À moins d'un déplacement, on peut supposer que  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .
- $\gamma$  est une **courbe gauche** si elle n'est pas plane.

**Exemples.**

- La courbe  $\gamma(t) = (t^5, 3t^5 + 1, 2t^5)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , est une droite, car son support est la droite  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x + 1, z = 2x\}$ .
- La courbe cuspidale est une courbe plane.
- L'hélice circulaire est une courbe gauche.
- La courbe  $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , est plane, car son support  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x, z = x^2\}$  est une parabole contenue dans le plan d'équation  $y = x$ .
- Le graphe de toute fonction réelle  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  est une courbe plane paramétrée par  $\gamma(t) = (t, f(t))$ , avec  $t \in I$ .



Donner une paramétrisation  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est donc suffisant pour déterminer une courbe paramétrée, et en particulier son support  $\Gamma = \gamma(I)$ . Le contraire n'est pas vrai: donner un support  $\Gamma$  n'est pas suffisant pour déterminer une courbe paramétrée, car un support peut admettre plusieurs paramétrisations différentes.

**Exemple.** Les paramétrisations

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

$$\beta : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \beta(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

ont le même support: le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  privé du point  $(-1, 0)$ .

**Définition.** Une fonction  $\varphi : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$  est un **difféomorphisme** de classe  $C^k$  si

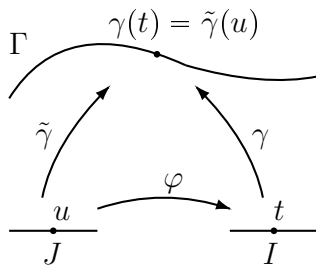
- $\varphi$  est dérivable de classe  $C^k$  sur  $J$ ;
- $\varphi$  est inversible, c'est-à-dire qu'il admet la réciproque  $\varphi^{-1} : I \longrightarrow J$ ;
- la réciproque  $\varphi^{-1}$  est dérivable de classe  $C^k$  sur  $I$ .

En particulier, une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  est un difféomorphisme si et seulement si  $\varphi'(x) \neq 0$  pour tout  $x$ .

**Exemples.**

- La fonction  $\varphi(x) = x^3$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , n'est pas un difféomorphisme car  $\varphi'(0) = 0$ . Cela entraîne que sa réciproque  $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$  n'est pas dérivable en  $y = 0$ .
- Par contre, la fonction  $\varphi(x) = x^3$ , avec  $x \in ]0, +\infty[$ , est bien un difféomorphisme.

**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de classe  $C^k$ . Un **reparamétrage** (ou **reparamétrisation**) de classe  $C^k$  de  $\gamma$  est une nouvelle paramétrisation  $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  obtenue en composant  $\gamma$  avec un difféomorphisme  $\varphi : J \longrightarrow I$  de classe  $C^k$ , i.e. telle que  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ :



Le nouveau paramètre  $u \in J$  est l'antécédent du vieux paramètre  $t \in I$ :

$$u = \varphi^{-1}(t) \quad \text{et} \quad t = \varphi(u).$$

En omettant  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$ , on note aussi

$$u = u(t) \quad \text{et} \quad t = t(u).$$

**Exemple.** Pour le cercle privé d'un point, les deux paramétrisations

$$\alpha(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

sont l'une un reparamétrage de l'autre, car  $\beta = \alpha \circ \varphi$  où  $\varphi(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est un difféomorphisme.

Le support d'une courbe  $\gamma$  coïncide avec celui d'un reparamétrage  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , car un difféomorphisme  $\varphi$  est en particulier une bijection. Le contraire n'est pas vrai: si un même support admet deux paramétrisations, celles-ci ne sont pas forcément l'une un reparamétrage de l'autre.

**Exemple.** Le support  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$  admet les deux paramétrisations

$$\alpha(t) = (t, t^3), \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

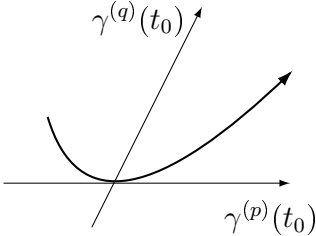
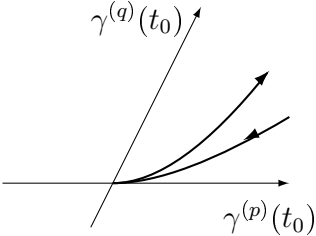
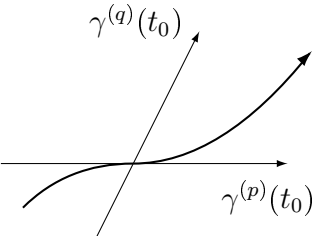
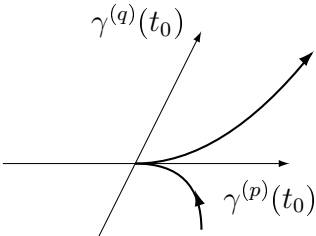
$$\beta(u) = (u^3, u^9), \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}.$$

Mais celles-ci ne sont pas l'une un reparamétrage de l'autre, car  $\beta = \alpha \circ \varphi$  où  $t = \varphi(u) = u^3$  n'est pas un difféomorphisme sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition.** [Allure locale d'une courbe paramétrée.]

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée qui n'est pas une droite, et soit  $t_0 \in I$  fixé. Soit  $p \geq 1$  le plus petit entier tel que  $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$  et soit  $q > p$  le plus petit entier tel que  $\gamma^{(q)}(t_0)$  soit linéairement indépendant de  $\gamma^{(p)}(t_0)$ .

Alors localement, autour du point  $\gamma(t_0)$ , la courbe a l'une des formes suivantes, suivant la parité de  $p$  et  $q$ :

	$p$ impair	$p$ pair
$q$ pair	 <p><i>point d'apparence ordinaire</i></p>	 <p><i>point de rebroussement de 2<sup>eme</sup> espece</i></p>
$q$ impair	 <p><i>point d'inflexion</i></p>	 <p><i>point de rebroussement de 1<sup>ere</sup> espece</i></p>

**Preuve.** Il suffit de regarder le développement limité de  $\gamma(t)$  en  $t_0$ :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!} \left(1 + o(t - t_0)\right) \gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} \gamma^{(q)}(t_0) + o((t - t_0)^q).$$

□

## 1.2 Courbes régulières et birégulières

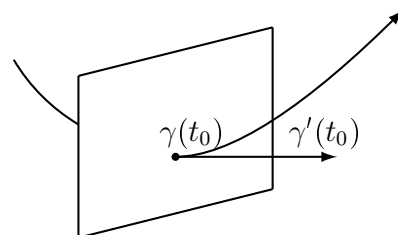
**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée. On dit que

- $\gamma$  est **régulière** en  $t_0 \in I$  si  $\gamma'(t_0) \neq 0$  (i.e. si et seulement si  $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$ );
- $\gamma$  est **singulière** en  $t_0 \in I$  si  $\gamma'(t_0) = 0$  (i.e. si et seulement si  $\|\gamma'(t_0)\| = 0$ );
- $\gamma$  est **régulière** si elle est régulière en tout point  $t \in I$ .

Si  $\gamma$  est régulière en  $t_0$ , alors il existe la **droite tangente** à son support  $\Gamma = \gamma(I)$  au point  $\gamma(t_0)$ : c'est la droite de vecteur directeur  $\gamma'(t_0)$  passant par  $\gamma(t_0)$ ,

$$\Delta_{t_0}(\gamma) = \left\{ \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tous les plans contenant la droite tangente sont tangents à  $\gamma$  en  $t_0$ . Pour une courbe, le "plan tangent" n'est pas une notion significative. Par contre, il existe un unique **plan normal** à  $\gamma$  en  $t_0$ : le plan orthogonale à  $\gamma'(t_0)$  passant par  $\gamma(t_0)$ .



**Exemples.**

- La courbe  $\alpha(t) = (t, t^3)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , est régulière partout, car  $\alpha'(t) = (1, 3t^2) \neq (0, 0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- La courbe  $\beta(u) = (u^3, u^9)$ , avec  $u \in \mathbb{R}$ , est singulière au point  $(0, 0) = \beta(0)$ , car  $\beta'(u) = (3u^2, 9u^8) = (0, 0)$  si et seulement si  $u = 0$ .

**Proposition.** Si  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe paramétrée régulière, alors tout reparamétrage de  $\gamma$  est aussi régulier.

**Preuve.** Soit  $\tilde{\gamma}(u) = \gamma \circ \varphi(u) = \gamma(t)$  un reparamétrage de  $\gamma$ , donné par le difféomorphisme  $\varphi : J \longrightarrow I$ . On a toujours

$$\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(\varphi(u)) \varphi'(u)$$

avec  $\varphi'(u) \neq 0$  car  $\varphi$  est un difféomorphisme. Si  $\gamma$  est régulière on a aussi  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t = \varphi(u)$ , donc  $\tilde{\gamma}'(u) \neq 0$ .  $\square$

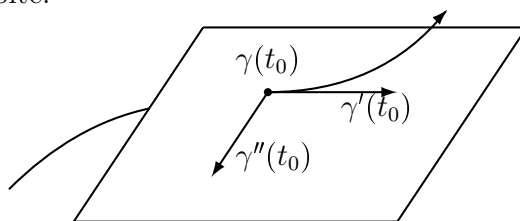
**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière. On dit que

- $\gamma$  est **birégulière** en  $t_0 \in I$  si  $\gamma'(t_0)$  et  $\gamma''(t_0)$  sont linéairement indépendants;
- $\gamma$  est **birégulière** si elle est birégulière en tout point  $t \in I$ .

Evidemment, une courbe birégulière ne peut être une droite.

Si  $\gamma$  est birégulière en  $t_0$ , alors les deux vecteurs  $\gamma'(t_0)$  et  $\gamma''(t_0)$  engendrent un plan, qui s'appelle **plan osculateur** à  $\gamma$  en  $t_0$

$$\pi_{t_0}(\gamma) = \left\{ \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0) + \mu \gamma''(t_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$



Le plan osculateur est le plan tangent à  $\gamma$  en  $t_0$  qui approche plus la courbe quand elle n'est pas plane. En effet, c'est le seul plan tangent qui reste constant (quant  $t$  varie) pour une courbe plane quelconque. En particulier: une courbe est plane si et seulement si tous ses plans osculateurs coïncident.

**Exemple.** La courbe  $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , est birégulière car les deux vecteurs

$$\gamma'(t) = (1, 1, 2t) \quad \text{et} \quad \gamma''(t) = (0, 0, 2)$$

sont linéairement indépendants (leur produit vectoriel  $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (2, -2, 0)$  est non nul), et le plan osculateur en tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\pi_t(\gamma) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \right\}$$

est indépendant de  $t$ .

### 1.3 Longueur et abscisse curviligne

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière, et supposons que  $I$  soit un interval fermé ou ouvert d'extrêmes  $a$  et  $b$ , i.e.  $I = [a, b]$  ou  $I = ]a, b[$ .

**Définition.** La **longueur** de la courbe  $\gamma$  est le nombre réel positif

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Exemple.** Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  une paramétrisation du cercle unitaire qui continue à tourner en rond. Alors

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{et} \quad \|\gamma'(t)\| = 1 \quad \text{donc} \quad L(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} dt = +\infty,$$

cette courbe paramétrée a longueur infinie. Mais si on restreint l'intervalle du paramètre, on peut obtenir des courbes avec longueur finie:

$$L(\gamma|_{[0, 2\pi]}) = 2\pi \quad \text{et} \quad L(\gamma|_{[0, 4\pi]}) = 4\pi.$$

**Proposition.** Si  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  est un reparamétrage de  $\gamma$ , alors  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .

**Preuve.** Supposons que  $\varphi : J \rightarrow I$  soit un difféomorphisme strictement croissant, i.e. que  $\varphi'(u) > 0$  pour tout  $u \in J$ . Alors on a

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_J \|\tilde{\gamma}'(u)\| du = \int_J \|\gamma'(\varphi^{-1}(u))\| \varphi'(u) du = \int_{\varphi^{-1}(J)} \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma).$$

□



**Définition.** On appelle **abscisse curviligne**, ou **paramètre par longueur d'arc**, tout paramètre  $s$  tel que la vitesse de la courbe ait module constant égal à 1, i.e.  $\|\gamma'(s)\| = 1$  pour tout  $s$ . Dans ce cas, la longueur de la courbe sur l'intervalle  $[a, b]$  vaut

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds = b - a.$$

**Exemple.** Le cercle  $\gamma(s) = (a \cos(bs), a \sin(bs))$  est paramétré par longueur d'arc si et seulement si  $b = 1/a$ . En effet

$$\gamma'(s) = (-ab \sin(bs), ab \cos(bs)) \quad \text{donc} \quad \|\gamma'(s)\|^2 = a^2 b^2 = 1 \iff b = \frac{1}{a}.$$

**Théorème.** Toute courbe régulière  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  admet un reparamétrage par longueur d'arc.

**Preuve.** Soit  $I = [a, b]$  ou  $I = ]a, b[$  et posons

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du.$$

L'application  $\varphi$  est dérivable en tout  $t \in I$ , car sa dérivée  $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$  est bien définie partout. On a aussi  $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$ , car  $\gamma$  est régulière, donc  $\varphi$  est un difféomorphisme sur son image. Puisque  $\varphi'(t) > 0$ , on a que  $\varphi$  est une fonction strictement croissante, donc son image  $J = \varphi(I)$  est un intervalle de la forme  $[\varphi(a), \varphi(b)]$  ou bien  $] \varphi(a), \varphi(b)[$ . Plus explicitement, si  $\varphi$  est strictement croissante elle est inversible, et sa réciproque  $\varphi^{-1} : J \longrightarrow I$  est aussi dérivable car, pour tout  $s = \varphi(t) \in J$ , on a

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}.$$

Soit  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$ , i.e.  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi^{-1}(s))$  pour tout  $s \in J$ . On a alors

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s) = \gamma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{\gamma'(\varphi^{-1}(s))}{\|\gamma'(\varphi^{-1}(s))\|},$$

donc  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$  pour tout  $s \in J$ . Autrement dit,  $\tilde{\gamma}$  est bien une paramétrisation par longueur d'arc.

□

Le paramètre par longueur d'arc n'est pas unique: tout reparamétrage du type

$$s(t) = \pm \int_a^t \|\gamma'(u)\| du + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

est admis, car ces choix n'affectent pas  $\|\tilde{\gamma}'(s)\|$ . En variant la constante  $c$  on change le point de la courbe où le paramètre vaut zéro, et en mettant le signe  $-$  on change d'orientation à la courbe.

**Exemple.** La spirale logarithmique  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , est une courbe régulière car  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t \neq 0$  pour tout  $t$ . La courbe passe par  $(1, 0)$  à  $t = 0$ , s'enroule sur l'origine pour  $t \rightarrow -\infty$  et s'éloigne pour  $t \rightarrow +\infty$ .

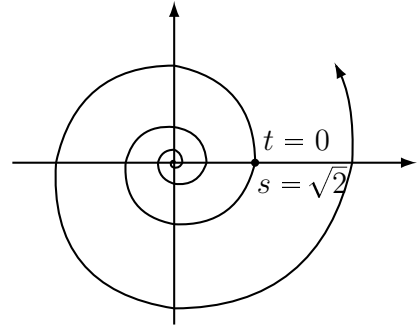
Un paramètre par longueur d'arc est donné par

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{2}e^u \, du = \sqrt{2}e^t \in ]0, \infty[$$

et le reparamétrage correspondant est

$$\tilde{\gamma}(s) = (\sqrt{2}s \cos(\ln(s/\sqrt{2})), \sqrt{2}s \sin(\ln(s/\sqrt{2}))).$$

Avec ce choix, la courbe s'enroule sur l'origine pour  $s \rightarrow 0$ , et passe par  $(1, 0)$  à  $s = \sqrt{2}$ .

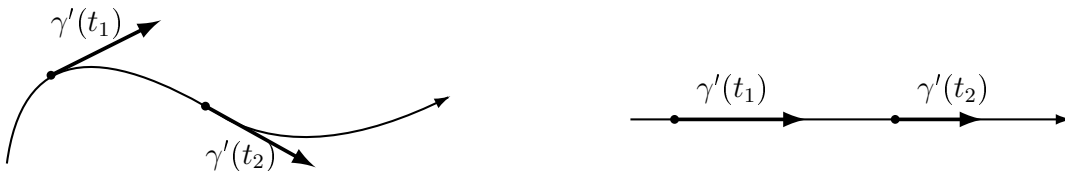


En conclusion, si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe régulière avec  $I = [a, b]$  ou  $I = ]a, b[$ , sa longueur vaut:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b ds(t) = \int_{s(a)}^{s(b)} ds(t) = s(b) - s(a).$$

## 1.4 Repère de Frenet, courbure et torsion

Les caractéristiques d'une courbe s'évaluent en suivant la variation d'un repère "mobile" intrinsèque (s'il existe) le long de la courbe. Par exemple, si le vecteur vitesse ne change jamais de direction, la courbe est clairement une droite.



**Lemme.** Soit  $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un vecteur de l'espace dépendant d'un paramètre  $t \in I$ . Si  $V$  est constant en norme (non nulle), i.e.  $\|V(t)\| = c \neq 0$  pour tout  $t \in I$ , alors le produit scalaire de  $V(t)$  avec sa dérivée  $V'(t)$  est toujours nul:  $\langle V(t), V'(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in I$ . Cela signifie que  $V'(t)$  est orthogonal à  $V(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Preuve.** Si pour tout  $t \in I$  on a  $\|V(t)\|^2 = \langle V(t), V(t) \rangle = c^2$ , alors

$$0 = \frac{d}{dt} \|V(t)\|^2 = \langle V'(t), V(t) \rangle + \langle V(t), V'(t) \rangle = 2\langle V(t), V'(t) \rangle.$$

□

**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière. On appelle

- **vecteur tangent à  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le vecteur  $T_\gamma(t_0) := \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ , qui est non nul car  $\gamma$  est régulière.

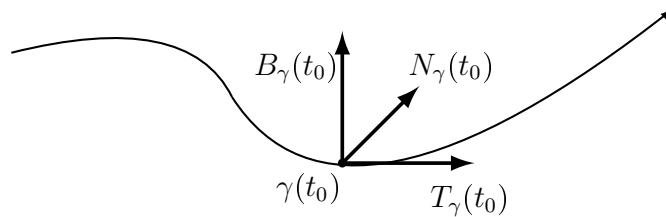
Si le support de  $\gamma$  est une droite, ce vecteur est suffisant pour en caractériser un repère mobile: il nous dit quelle est sa direction. Sinon, on appelle

- **vecteur normal à  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le vecteur  $N_\gamma(t_0) := \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|}$ . Ce vecteur est non nul si et seulement si le support de  $\gamma$  n'est pas une droite.

Si  $\gamma$  n'est pas une droite,  $N_\gamma(t_0)$  est forcément orthogonal à  $T_\gamma(t_0)$ , et les deux vecteurs  $(T_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0))$  forment une base orthonormale du plan osculateur de  $\gamma$  en  $t_0$ . Si  $\gamma$  est une courbe plane, ces deux vecteurs sont suffisant pour en caractériser un repère mobile, car ils engendrent le plan sur lequel vit la courbe. Sinon, on appelle

- **vecteur binormal à  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le vecteur  $B_\gamma(t_0) := T_\gamma(t_0) \wedge N_\gamma(t_0)$ , où  $\wedge$  indique le produit vectoriel. Ce vecteur est non nul si et seulement si le support de  $\gamma$  n'est pas une droite.

Si  $\gamma$  n'est pas une droite,  $B_\gamma(t_0)$  est forcément orthogonal à  $T_\gamma(t_0)$  et à  $N_\gamma(t_0)$ , et les trois vecteurs  $(T_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0), B_\gamma(t_0))$  forment une base orthonormale directe de l'espace, centré au point  $\gamma(t_0)$ , qui s'appelle **système de Frenet**.



**Alternative:** on peut définir le système de Frenet comme suit:

$$\begin{aligned} T_\gamma(t_0) &:= \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \\ B_\gamma(t_0) &:= \frac{\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)\|}, \\ N_\gamma(t_0) &:= B_\gamma(t_0) \wedge T_\gamma(t_0). \end{aligned}$$

**Proposition.** Si  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  est un reparamétrage de  $\gamma$ , alors

- les systèmes de Frenet de  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  coïncident si  $\varphi$  preserve l'orientation (i.e.  $\varphi'(u) > 0$  pour tout  $u \in J = \varphi^{-1}(I)$ );
- les vecteurs  $T_\gamma$  et  $B_\gamma$  changent de signe si  $\varphi$  inverse l'orientation (i.e.  $\varphi'(u) < 0$  pour tout  $u \in J = \varphi^{-1}(I)$ ).

**Preuve.** Soit  $t = \varphi(u)$ . On a

$$T_{\tilde{\gamma}}(u) = \frac{\tilde{\gamma}'(u)}{\|\tilde{\gamma}'(u)\|} = \frac{\gamma'(t) \varphi'(u)}{\|\gamma'(t) \varphi'(u)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|} = T_{\gamma}(t) \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|},$$

donc  $T_{\tilde{\gamma}}(u) = T_{\gamma}(t)$  si  $\varphi'(u) > 0$ , et  $T_{\tilde{\gamma}}(u) = -T_{\gamma}(t)$  si  $\varphi'(u) < 0$ . Le même raisonnement s'applique aux vecteurs normal et binormal.  $\square$

**Lemme.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe birégulière de classe  $C^k$ . Il existe deux fonctions  $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  telles que, pour tout  $t \in I$ , on a

$$\begin{aligned} T_{\gamma}'(t) &= a(t) N_{\gamma}(t), \\ N_{\gamma}'(t) &= -a(t) T_{\gamma}(t) + b(t) B_{\gamma}(t), \\ B_{\gamma}'(t) &= -b(t) N_{\gamma}(t). \end{aligned}$$

En outre,  $a(t) \geq 0$  pour tout  $t \in I$ .

Pour montrer ceci nous faisons appel à un petit résultat d'algèbre linéaire: Si  $(P; e_1, e_2, e_3)$  est un repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$  centré au point  $P$ , c'est-à-dire que

$$e_i \perp e_j \quad \text{si } i \neq j, \quad \text{et} \quad \|e_i\| = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

et  $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  appliqué à  $P$ , alors les coordonnées de  $V$  se trouvent à l'aide du produit scalaire euclidien (qui donne la projection):

$$v_1 = \langle V, e_1 \rangle, \quad v_2 = \langle V, e_2 \rangle, \quad v_3 = \langle V, e_3 \rangle.$$

En effet, par exemple pour la projection de  $V$  sur  $e_1$ , on a

$$\begin{aligned} \langle V, e_1 \rangle &= \langle v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, e_1 \rangle \\ &= v_1 \langle e_1, e_1 \rangle + v_2 \langle e_2, e_1 \rangle + v_3 \langle e_3, e_1 \rangle \\ &= v_1 \|e_1\|^2 = v_1, \end{aligned}$$

car  $\langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0$ .

**Preuve.** Puisque le système de Frenet forme une base orthonormale de l'espace en chaque point de la courbe, il est clair que tout vecteur  $V(t)$  appliqué en  $\gamma(t)$  peut s'exprimer comme combinaison linéaires des vecteurs  $T_{\gamma}(t)$ ,  $N_{\gamma}(t)$  et  $B_{\gamma}(t)$ , et que les coefficients sont des fonctions de  $t$  de la même régularité que  $\gamma$  donnés par le produit scalaire de  $V(t)$  avec les vecteurs du système de Frenet.

(1) Par définition, on a  $N_{\gamma}(t) = \frac{T_{\gamma}'(t)}{\|T_{\gamma}'(t)\|}$ , donc

$$T_{\gamma}'(t) = \|T_{\gamma}'(t)\| N_{\gamma}(t) = a(t) N_{\gamma}(t),$$

avec  $a(t) = \|T_{\gamma}'(t)\| \geq 0$ .

(2) Pour montrer que  $N_{\gamma}'(t) = -a(t) T_{\gamma}(t) + b(t) B_{\gamma}(t)$ , il suffit de montrer que  $\langle N_{\gamma}'(t), T_{\gamma}(t) \rangle = -a(t)$ . Puisque  $\langle N_{\gamma}(t), T_{\gamma}(t) \rangle = 0$  pour tout  $t$ , en dérivant on a

$$0 = \langle N_{\gamma}(t), T_{\gamma}(t) \rangle' = \langle N_{\gamma}'(t), T_{\gamma}(t) \rangle + \langle N_{\gamma}(t), T_{\gamma}'(t) \rangle,$$

donc

$$\langle N_{\gamma}(t), T_{\gamma}'(t) \rangle = -\langle N_{\gamma}'(t), T_{\gamma}(t) \rangle = -a(t).$$

(3) Pour montrer que  $B'_\gamma(t) = -b(t) N_\gamma(t)$ , il faut montrer que  $\langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle = 0$  et que  $\langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t) \rangle = -b(t)$ . On a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle' = \langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle + \langle B_\gamma(t), T'_\gamma(t) \rangle, \\ 0 &= \langle B_\gamma(t), N_\gamma(t) \rangle' = \langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t) \rangle + \langle B_\gamma(t), N'_\gamma(t) \rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle &= -\langle B_\gamma(t), T'_\gamma(t) \rangle = 0, \\ \langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t) \rangle &= -\langle B_\gamma(t), N'_\gamma(t) \rangle = -b(t). \end{aligned}$$

□

**Définition.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière de classe  $C^k$ . On appelle:

- **Courbure (géométrique) de  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le nombre

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t_0) &= \frac{a(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \frac{\|T'_\gamma(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|} \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle T'_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0) \rangle = -\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle N'_\gamma(t_0), T_\gamma(t_0) \rangle \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

La courbure mesure combien la courbe  $\gamma$  s'éloigne d'être une droite. En effet, si  $\gamma$  est une droite on a  $T'_\gamma(t_0) = 0$ , donc  $\kappa_\gamma(t) = 0$  (car le vecteur  $N_\gamma(t_0)$  est supposé unitaire).

- **Torsion de  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le nombre

$$\tau_\gamma(t_0) = \frac{b(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle N'_\gamma(t_0), B_\gamma(t_0) \rangle = -\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle B'_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0) \rangle \in \mathbb{R}.$$

La torsion mesure combien la courbe  $\gamma$  s'éloigne d'être plane. En effet, si  $\gamma$  est une courbe plane on a  $B'_\gamma(t_0) = 0$ , donc  $\tau_\gamma(t) = 0$ .

**Exemple.** L'hélice circulaire  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $a, b > 0$  fixés, a courbure et torsion constantes et non nulles:

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau_\gamma(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Conclusion.** Pour toute courbe birégulière  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$  on a donc les **Formules de Frenet**:

$$\begin{pmatrix} T'_\gamma \\ N'_\gamma \\ B'_\gamma \end{pmatrix} = \|\gamma'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\gamma & 0 \\ -\kappa_\gamma & 0 & \tau_\gamma \\ 0 & -\tau_\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_\gamma \\ N_\gamma \\ B_\gamma \end{pmatrix}.$$

**Corollaire.** Si  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  est un reparamétrage de  $\gamma$ , alors

- les courbures de  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  coïncident, i.e.  $\kappa_{\tilde{\gamma}}(u) = \kappa_{\gamma}(t)$  si  $t = \varphi(u)$ ;
- les torsions de  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  coïncident au signe près, selon l'orientation des courbes, i.e., pour  $t = \varphi(u)$ , on a  $\tau_{\tilde{\gamma}}(u) = \tau_{\gamma}(t)$  si  $\varphi$  preserve l'orientation et  $\tau_{\tilde{\gamma}}(u) = -\tau_{\gamma}(t)$  si  $\varphi$  inverse l'orientation.

**Preuve.** Suit directement de la modification du système de Frenet par reparamétrage.  $\square$

**Théorème.** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière de classe au moins  $C^3$ . Pour tout  $t \in I$  on a :

$$\begin{aligned}\kappa_{\gamma}(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \\ \tau_{\gamma}(t) &= \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}\end{aligned}$$

Si  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, i.e.  $\|\gamma'(s)\| = 1$  pour tout  $s \in I$ , on a

$$\begin{aligned}\kappa_{\gamma}(s) &= \|\gamma''(s)\|, \\ \tau_{\gamma}(s) &= \frac{1}{\kappa_{\gamma}(s)^2} \langle \gamma'(s) \wedge \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle.\end{aligned}$$

**Preuve.** i) Pour montrer la formule sur la courbure, on peut employer deux méthodes différentes, toutes les deux intéressantes.

**Méthode 1.** Pour simplifier les formules, on omet l'indice et la valeur du paramètre  $t \in I$ . Par définition, on a  $\kappa = \frac{\|T'\|}{\|\gamma'\|}$ . Calculons donc  $T'$  et  $\|T'\|$  à partir de la définition de  $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ . On a besoin de connaître

$$\left(\|\gamma'\|\right)' = \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}' = \frac{2\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{2\sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}} = \frac{\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{\|\gamma'\|},$$

et alors:

$$T' = \frac{\gamma''\|\gamma'\| - \gamma' \left(\|\gamma'\|\right)'}{\|\gamma'\|^2} = \frac{\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma'', \gamma' \rangle \gamma'}{\|\gamma'\|^3}.$$

Pour calculer  $\|T'\|$ , observons d'abord que si on appelle  $\theta$  l'angle formé par les vecteurs  $\gamma'$  et  $\gamma''$ , alors

$$\langle \gamma', \gamma'' \rangle = \|\gamma'\| \|\gamma''\| \cos \theta \quad \text{et} \quad \|\gamma' \wedge \gamma''\| = \|\gamma'\| \|\gamma''\| \sin \theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|T'\|^2 &= \frac{\|\gamma'\|^4 \|\gamma''\|^2 - 2\|\gamma'\|^2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle^2 + \langle \gamma'', \gamma' \rangle^2 \|\gamma'\|^2}{\|\gamma'\|^6} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^4 \|\gamma''\|^2 - \|\gamma'\|^2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle^2}{\|\gamma'\|^6} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^2 \|\gamma''\|^2 (1 - \cos^2 \theta)}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|^4},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\kappa = \frac{\|T'\|}{\|\gamma'\|} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

En particulier, si  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, on a  $\|\gamma'\| = 1$  et  $\gamma' \perp \gamma''$ , donc  $\|\gamma' \wedge \gamma''\| = \|\gamma'\| \|\gamma''\| = \|\gamma''\|$ , et par conséquent  $\kappa = \|\gamma''\|$ .

**Méthode 2.** Supposons d'abord que  $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  soit une courbe paramétrée par longueur d'arc, et montrons que  $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$ . Puisque  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ , on a

$$T_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}'(s) \quad \text{et} \quad T'_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}''(s) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) N_{\tilde{\gamma}}(s),$$

donc  $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|T'_{\tilde{\gamma}}(s)\| = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$ .

Soit maintenant  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de façon quelconque. Soit  $\varphi : J \longrightarrow I$  le difféomorphisme tel que  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  soit un reparamétrage par longueur d'arc de  $\gamma$ , et appelons  $\psi = \varphi^{-1} : I \longrightarrow J$  la réciproque de  $\varphi$ . Puisque la courbure est invariante par reparamétrage, pour tout  $t \in I$  on a

$$\kappa_{\gamma}(t) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|, \quad \text{où } s = \psi(t) \in J.$$

Calculons le terme  $\frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$  à partir de  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$  avec  $s = \psi(t)$ :

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s) \psi'(t) \quad \text{donc} \quad \|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(s)\| \|\psi'(t)\| = \|\psi'(t)\|,$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= \tilde{\gamma}''(s) \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s) \psi''(t) \\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \psi'(t) \psi''(t) \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}'(s) + \psi'(t)^3 \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s) \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \|\psi'(t)^3\| \|\tilde{\gamma}'(s)\| \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \|\gamma'(t)\|^3 \kappa_{\gamma}(t), \end{aligned}$$

d'où suit que  $\frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \kappa_{\gamma}(t)$ .

ii) Pour montrer la formule sur la torsion, la première méthode est possible mais les calculs sont horrible (à essayer comme exercice!). La deuxième méthode, bien qu'elle ne simplifie pas les formules, simplifie comme même les calculs, adoptons-la.

Supposons alors d'abord que  $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  soit une courbe paramétrée par longueur d'arc. On a alors que  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ ,  $\tilde{\gamma}'(s) \perp \tilde{\gamma}''(s)$ ,  $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$ . On sait aussi que

$$T_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}'(s), \quad N_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} \tilde{\gamma}''(s) \quad \text{et} \quad B_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s).$$

Montrons maintenant que  $\tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2} \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s) \rangle$ . Par définition, on a  $\tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \langle N'_{\tilde{\gamma}}(s), B_{\tilde{\gamma}}(s) \rangle$ , où

$$N'_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{\tilde{\gamma}'''(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} - \frac{\tilde{\gamma}''(s) \kappa'_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2},$$

donc

$$\tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} \langle \tilde{\gamma}'''(s), B_{\tilde{\gamma}}(s) \rangle - \frac{\kappa'_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2} \langle \tilde{\gamma}''(s), B_{\tilde{\gamma}}(s) \rangle = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2} \langle \tilde{\gamma}'''(s), \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s) \rangle$$

car  $\langle \tilde{\gamma}''(t), B_{\tilde{\gamma}}(s) \rangle = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) \langle N_{\tilde{\gamma}}(s), B_{\tilde{\gamma}}(s) \rangle = 0$ .

Enfin, considérons une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétrée de façon quelconque. Soit  $\varphi : J \rightarrow I$  le difféomorphisme tel que  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  soit un reparamétrage par longueur d'arc de  $\gamma$  qui preserve l'orientation (i.e.  $\varphi' > 0$ ), et appelons  $\psi = \varphi^{-1} : I \rightarrow J$  la réciproque de  $\varphi$ . Puisque la torsion est invariante par reparamétrage qui preserve l'orientation, pour tout  $t \in I$  on a

$$\tau_{\gamma}(t) = \tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2} \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s) \rangle, \quad \text{où } s = \psi(t) \in J.$$

Calculons  $\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$ : on a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \tilde{\gamma}'(s) \psi'(t) & \text{et} & & \|\gamma'(t)\| &= \psi'(t) \\ \gamma''(t) &= \tilde{\gamma}''(s) \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s) \psi''(t) \\ \gamma'''(t) &= \tilde{\gamma}'''(s) \psi'(t)^3 + 3\tilde{\gamma}''(s) \psi''(t) \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s) \psi'''(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \psi'(t)^3 \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s) \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \psi'(t)^3 \|\tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s)\| = \psi'(t)^3 \|\tilde{\gamma}''(s)\| \\ \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle &= \langle \psi'(t)^3 \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \psi'(t)^3 \tilde{\gamma}'''(s) \rangle = \psi'(t)^6 \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s) \rangle, \end{aligned}$$

d'où suit

$$\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{\psi'(t)^6 \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s) \rangle}{\psi'(t)^6 \|\tilde{\gamma}''(s)\|^2} = \tau_{\gamma}(t).$$

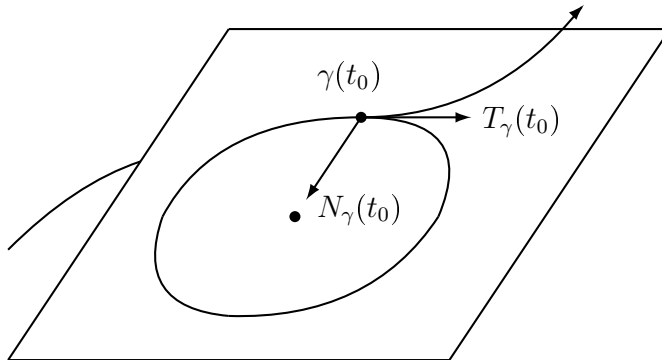
□

**Théorème.** À déplacement près, il existe une unique courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , paramétrée par longueur d'arc, ayant une courbure  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $C^1$  et une torsion  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^0$  données.

**Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe birégulière de courbure  $\kappa_{\gamma}$  et torsion  $\tau_{\gamma}$ . On appelle

- **rayon de courbure de  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le nombre  $R_{\gamma}(t_0) := \frac{1}{\kappa_{\gamma}(t_0)} > 0$ ;
- **cercle osculateur de  $\gamma$  en  $t_0 \in I$**  le cercle tangent à  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ , de rayon  $R_{\gamma}(t_0)$  et placé du côté de la concavité de  $\gamma$ . Le centre du cercle osculateur est donc le point  $\gamma(t_0) + R_{\gamma}(t_0) N_{\gamma}(t_0)$ .

Le cercle osculateur est la meilleure approximation de la courbe à l'ordre 2, et se trouve sur le plan osculateur.





**Remarque.** Pour une courbe plane  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , le système de Frénet  $(T_\gamma(t), N_\gamma(t))$  centré en tout point  $\gamma(t)$  est orthonormal mais pas forcément direct, car  $N_\gamma(t)$  pointe toujours dans le demi-plan contenant  $\gamma''(t)$  et, des deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $T_\gamma(t)$ ,  $N_\gamma(t)$  n'est pas forcément celui obtenu comme rotation d'angle  $\pi/2$  en sens antihoraire à partir de  $T_\gamma(t)$ .

Pour les courbes planes il y a donc un autre repère naturel, dit **algébrique**, ou l'on définit

- le **vecteur normal algébrique**  $N_\gamma^{alg}(t)$  tel que le repère  $(T_\gamma(t), N_\gamma^{alg}(t))$  soit orthonormal direct (évidemment  $N_\gamma^{alg}(t) = \pm N_\gamma(t)$ ),
- la **courbure algébrique**  $\kappa_\gamma^{alg}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle T_\gamma'(t), N_\gamma^{alg}(t) \rangle$  (donc  $\kappa_\gamma^{alg}(t) = \pm \kappa_\gamma(t)$ ).

Contrairement à la courbure  $\kappa_\gamma$ , la courbure algébrique  $\kappa_\gamma^{alg}$  détecte, en tout point, dans quel demi-plan se trouve la courbe par rapport à sa droite tangente:

- si la courbe vire à gauche, la courbure algébrique est positive;
- si la courbe vire à droite, la courbure algébrique est négative.



## 1.5 Courbes définies implicitement

Une courbe (définie implicitement) est le *lieu des zéros* d'une fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dans le plan, ou bien de deux fonctions  $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dans l'espace ambiant. C'est la notion de courbe comme *sous-variété* de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément:

**Définition.** Une **courbe plane** est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  de la forme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0, x \in A, y \in B\},$$

où  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction. La courbe est **régulière en un point**  $(x_0, y_0)$  si  $F$  est différentiable en  $(x_0, y_0)$  et le gradient de  $F$  en  $(x_0, y_0)$  est non nul, i.e.  $\nabla F(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq (0, 0)$ . Dans ce cas,  $\nabla F(x_0, y_0)$  est un vecteur normale à  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$ .

**Exemples.**

- Le cercle

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

est une courbe régulière partout, car le point  $(0, 0)$  qui annule le gradient de la fonction  $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$  n'appartient pas à la courbe.

L'arc de cercle contenu dans le premier quadrant est la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}.$$

- Le graphe d'une fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbe

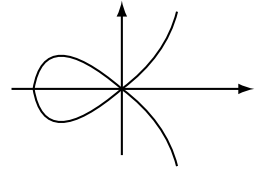
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in I\},$$

régulière partout où  $f$  est dérivable.

- La courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$$

est singulière en l'origine.



**Définition.** Une **courbe gauche** est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  de la forme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0, x \in A, y \in B, z \in C\},$$

où  $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions. La courbe est **régulière en un point**  $(x_0, y_0, z_0)$  si  $F$  et  $G$  sont différentiable en  $(x_0, y_0, z_0)$  et les deux gradients  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  et  $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$  sont linéairement indépendants, ce qui arrive si et seulement si

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Dans ce cas, ils engendrent le plan normal à  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Exemples.**

- Le cercle

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, 2x + y - z = 0\}$$

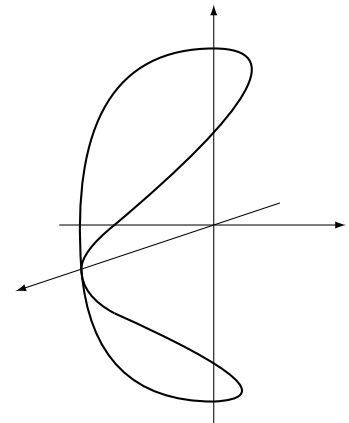
est une courbe régulière partout.

- La *fenêtre de Viviani*

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z^2 = 1\}$$

est singulière au point  $(1, 0, 0)$ , car ce point annule le produit vectoriel des gradients des fonctions

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  et  $G(x, y, z) = x + z^2 - 1$ .



Une courbe est **algébrique** si les fonctions  $F$  et  $G$  qui la définissent sont des polynômes. La *géométrie algébrique* moderne est l'évolution de la *géométrie analytique* ou *cartésienne* (René Descartes 1596-1650), après le théorème des zéros, *nullstellensatz* (David Hilbert 1862-1943), les travaux de Zariski et Mumford (années '30) et la théorie des *faisceaux* et des *schémas* (Alexander Grothendieck 1928-2014).

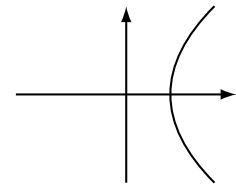
Le support d'une courbe paramétrée peut toujours être décrit de façon implicite, il suffit de trouver l'équation cartésienne qui contraint les coordonnées de ses points. Le contraire est faux: il existe des courbes définies implicitement qui n'admettent pas une paramétrisation globale.

### Exemples.

- La branche d'hyperbole

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

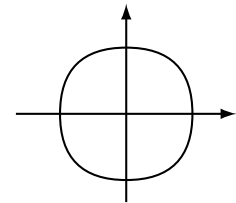
admet la paramétrisation  $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .



- La courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^6 = 1\}$$

n'admet pas de paramétrisation globale.



**Théorème.** *Toute courbe peut être paramétrée localement autour d'un point régulier, c'est-à-dire dans un voisinage ouvert du point.*

**Preuve.** Ceci est une conséquence du théorème des fonctions implicites. Pour donner l'idée du raisonnement, considérons le cas des courbes planes. Soit  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$  une courbe régulière en  $(x_0, y_0)$ , i.e. telle que  $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , et supposons que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Alors il existe un ouvert  $U$  contenant  $x_0$ , un ouvert  $V$  contenant  $y_0$  et une fonction différentiable  $\varphi : U \rightarrow V$  telle que  $\varphi(x_0) = y_0$  avec la propriété suivante:

$$\text{pour tout } (x, y) \in U \times V \text{ on a } F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

De plus, on a

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))}.$$

Par conséquent, l'application

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{pour tout } t \in U,$$

est une paramétrisation de  $\Gamma$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , régulière dans ce point.  $\square$

**Exemple.** La courbe  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^6 = 1\}$ , autour du point  $(0, 1)$ , admet la paramétrisation

$$\gamma(t) = (t, \sqrt[6]{1 - t^4}), \quad t \in ]-1, 1[.$$

Ce résultat permet de trouver la courbure et la torsion d'une courbe définie implicitement en tout point régulier.

Par exemple, on peut ainsi montrer que la courbure de la courbe plane d'équation cartésienne  $x^4 + y^6 = 1$  au point  $(0, 1)$  vaut 0!

**Remarque.** Si  $\gamma$  est une courbe paramétrée régulière, son support  $\Gamma$  est une courbe régulière. Le contraire est faux, on peut paramétrer un support régulier de façon non régulière.

**Exemple.** L'axe des abscisse

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

est évidemment une courbe implicite régulière, car le gradient de la fonction  $F(x, y) = y$  est le vecteur  $\nabla F(x, y) = (0, 1)$  constant et non nul. Cependant cet axe peut être paramétré de façon non régulière, par exemple par

$$\gamma(t) = (t^3, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

qui n'est pas régulier en  $t = 0$ .