2 Surfaces

Une *surface* est un sous-ensemble de l'espace avec "dégré de liberté intrensèque" égal à 2, par exemple:

Pour décrire une surface, comme pour les courbes aux chapitre 1, soit on donne des contraintes aux coordonnées de ses points (*surfaces définies implicitement*), par exemple

$$\text{Sphère de rayon } r \text{ centrée en l'origine} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\Big\},$$

soit on décrit ses points comme fonctions de deux paramètres (*surfaces paramétrées*), par exemple

$$\text{Même sphère} = \Big\{(r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in [0,2\pi],\ v \in \Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]\Big\},$$

Comme pour les courbes, la description paramétrique des surfaces permet d'en définir l'*aire* et toutes les courbures qui caractérisent les surfaces à déplacement près (la *courbure de Gauss* et la *courbure moyenne*, qui ne sont pas traités dans ce cours).

Dans ce chapitre on présente d'abord les surfaces paramétrées et ensuite celles défineis implicitement.

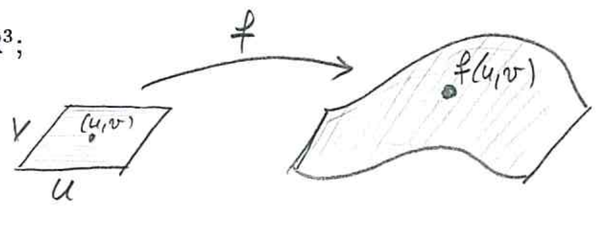
2.1 Surfaces paramétrées

Définition. Une **surface paramétrée** de classe C^k (avec $k \geq 0$) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$S = \Big\{f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in U \subset \mathbb{R},\ v \in V \subset \mathbb{R}\Big\} = f(U\times V),$$

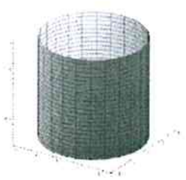
où $U, V \subset \mathbb{R}$ sont deux intervals et l'application $f : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^k, c'est-à-dire que les fonctions $x, y, z : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k. Si la classe C^k n'est pas indiquée on suppose que la surface soit lisse, c'est-à-dire de classe C^∞. On appelle:

- **paramétrisation** l'application $f : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$;
- **paramètres** les variables $u \in U$ et $v \in V$;
- **support (géométrique)** de f son image $\operatorname{supp} f = f(U\times V) \subset \mathbb{R}^3$.

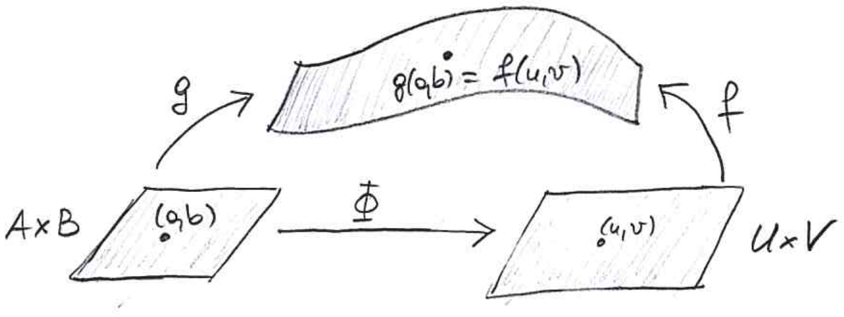


Exemples.

- *Cylindre* $f(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.
- *Hélicoïde* $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.



Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : U{\times}V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Un **reparamétrage** de S est une nouvelle paramétrisation $g : A{\times}B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S obtenue en composant f avec un difféomorphisme $\Phi : A{\times}B \longrightarrow U{\times}V$, i.e. telle que $g = f \circ \Phi$



Les nouveaux paramètres sont $(a, b) = \Phi^{-1}(u, v)$.

Exemples.

- L'application $\Phi(a, b) = (a^2, b)$ n'est pas inversible.

  L'application $\Phi(a, b) = (a^3, b)$ est inversible, mais sa réciproque $\Phi^{-1}(u, v) = (\sqrt[3]{u}, v)$ n'est pas différentiable en $u = 0$.

  L'application $\Phi(a, b) = (e^{a+b}, a - b)$ est un difféomorphisme, avec réciproque $\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{2}(\ln u + v), \frac{1}{2}(\ln u - v)\right)$.

- Soit S la surface paramétrée par

  $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; (u, v) \mapsto f(u, v) = (e^v, (u - v)\, e^{-v}, u - v).$$

  L'application

  $$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^*_+, \; (u, v) \mapsto \Phi^{-1}(u, v) = \big(u - v, e^v\big) =: (a, b)$$

  est un difféomorphisme avec réciproque

  $$\Phi : \mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; (a, b) \mapsto \Phi(a, b) = (a + \ln b, \ln b),$$

  donc l'application

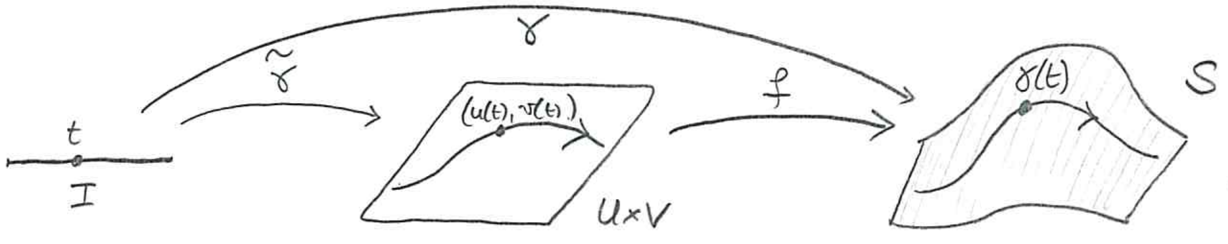
  $$g = f \circ \Phi : \mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; (a, b) \mapsto g(a, b) = f(a + \ln b, \ln b) = \Big(b, \frac{a}{b}, a\Big)$$

  est un reparamétrage de S.

2.2 Courbes sur une surface

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Une **courbe paramétrée sur** S est une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow S$ obtenue en composant f avec une paramétrisation $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow U \times V$ des paramètres, que l'on indique $\tilde{\gamma}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$:

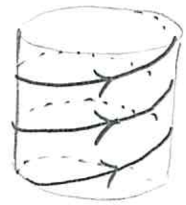
$$\gamma(t) = f\big(u(t), v(t)\big), \qquad \text{pour tout } t \in I.$$



Exemple. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'hélice $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$ est une courbe gauche qui peut être vu comme

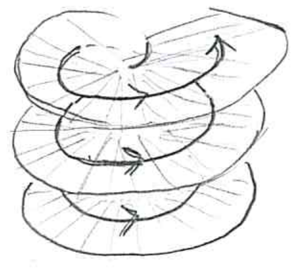
- courbe contenue dans le cylindre paramétrée par $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v) \in \mathbb{R}^3$: les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par

$$u(t) = t \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$



- courbe contenue dans l'hélicoïde paramétrée par $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \in \mathbb{R}^3$: les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par

$$u(t) = a \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$



2.3 Surfaces régulières

Définition. On dit que la surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

- **régulière en** $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs dérivées partielles de f en (u_0, v_0), qu'on note

$$\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u} = \partial_u f(u_0,v_0) = f_u(u_0,v_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v} = \partial_v f(u_0,v_0) = f_v(u_0,v_0),$$

  sont linéairement independants (et donc non nuls), i.e. si leur produit vectoriel est non nul:

$$\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0) \neq 0;$$

- **singulière en** $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs $\partial_u f(u_0,v_0)$ et $\partial_v f(u_0,v_0)$ sont linéaitrement dépendants, i.e. si

$$\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0) = 0.$$

Exemples.

- La surface paramétré par $f(u,v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$, est singulière en $(0,0)$, car
$$\begin{cases} \partial_u f(u,v) = (2u, 0, v) \\ \partial_v f(u,v) = (0, 2v, u) \end{cases} \implies \big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v) = (-2v^2, -2u^2, 4uv),$$
donc le vecteur $\big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v)$ s'annulle en $(0,0)$.

- Le graphe d'une fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donne une surface S paramétrée par $f(u,v) = \big(u, v, h(u,v)\big)$, avec $(u,v) \in D_h \subset \mathbb{R}^2$. Si h est de classe C^1, la surface S est régulière partout:
$$\begin{cases} \partial_u f(u,v) = \big(1, 0, \partial_u h(u,v)\big) \\ \partial_v f(u,v) = \big(0, 1, \partial_v h(u,v)\big) \end{cases} \implies \big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v) = (-\partial_u h(u,v), -\partial_v h(u,v), 1) \neq \vec{0}.$$

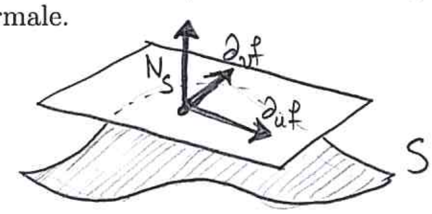
Définition. Soit S une surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et soit $P_0 = f(u_0, v_0)$ un point régulier de S. On appelle:

- **plan tangent** à S au point P_0 le plan engendré par les vecteurs $\partial_u f(u_0,v_0)$ et $\partial_v f(u_0,v_0)$ et passant par P_0,
$$\begin{aligned} T_{P_0}S &= P_0 + \mathrm{Vect}\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0)\Big) \\ &= \Big\{ f(u_0,v_0) + \lambda\, \partial_u f(u_0,v_0) + \mu\, \partial_v f(u_0,v_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Big\}; \end{aligned}$$

- **vecteur normale (unitaire)** de S en P_0 le vecteur
$$N_S(u_0,v_0) = \frac{\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0)}{\|\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0)\|}.$$

Le plan tangent à S en (u_0,v_0) contient la droite tangente à toutes les courbes régulières sur S passant par $f(u_0,v_0)$. En effet, si $\gamma(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$ est une telle courbe, et $(u_0,v_0) = \big(u(t_0), v(t_0)\big)$, on a
$$\gamma'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0,v_0)\; u'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0,v_0)\; v'(t_0) \in \mathrm{Vect}\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0)\Big).$$

Par définition, les trois vecteurs $\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0), N_S(u_0,v_0)\Big)$ forment une base directe de l'espace au-dessus du point $f(u_0,v_0)$ de la surface (c'est-à-dire un repère mobile). Mais attention: cette base n'est ni orthogonale ni normale.



La "courbure" d'une surface, c'est-à-dire combien elle s'éloigne d'être une portion de plan, est perçue de façon intrensèque par le mouvement du repère mobile $\Big(\partial_u f, \partial_v f, N_S\Big)$. Pour cela, il faut étudier la variation du vecteur normale N_S, i.e. la différentielle $-dN_S$, qui s'appelle *application de Weingarten*. Suite et détails en Master Général de Math!

2.4 Surfaces de révolution et surfaces réglées

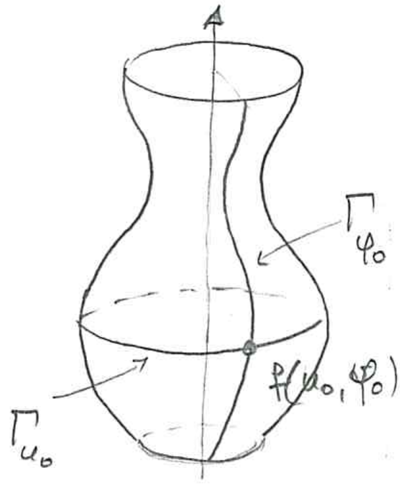
Définition. Une **surface de révolution** est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme

$$f : U \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (u, \varphi) \mapsto f(u, \varphi) = R_\varphi^{\vec{\ell}}(\alpha(u)),$$

où:

- $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane de classe C^1 qui s'appelle **méridien** de S;
- $R_\varphi^{\vec{\ell}}$ est la rotation d'angle φ autour d'une droite de direction $\vec{\ell}$ contenue dans le plan du meridien α, qui s'appelle **axe de révolution** de S.

On a alors $S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R_\varphi^{\vec{\ell}}\, \Gamma$, où $\Gamma = \alpha(U)$ est le support de α.



On appelle:

- **méridiens** de S les courbes Γ_{φ_0} sur S à angle φ_0 fixé:

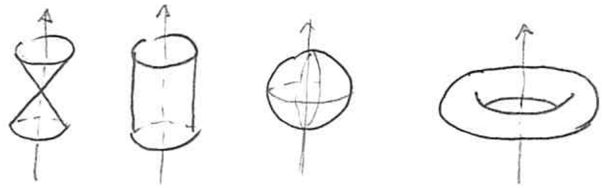
$$\Gamma_{\varphi_0} = \Big\{ \alpha(u) = f(u, \varphi_0) \mid u \in U \Big\};$$

- **parallèles** de S les courbes Γ_{u_0} sur S à hauteur u_0 fixée:

$$\Gamma_{u_0} = \Big\{ \beta(\varphi) = f(u_0, \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\Big\} = \text{ cercle};$$

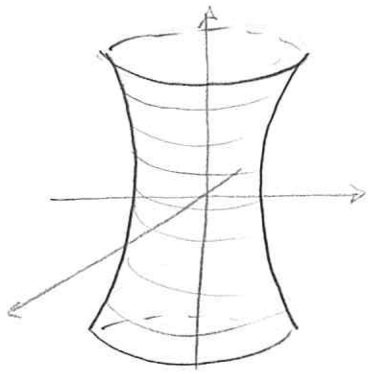
Exemples.

- Le *cône* $x^2 + y^2 = z^2$,
  le *cylindre* $x^2 + y^2 = r^2$,
  la *sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,
  le *tore* = donut, etc.



- L'*hyperboloïde à une nappe* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
  En effet, si on appelle S l'hyperboloïde, son intersection avec le plan $\pi = \{y = 0\}$ donne deux possibles méridiens:

$$S \cap \pi = \Big\{ (x, 0, z) \mid x^2 - z^2 = 1 \Big\} = \alpha(\mathbb{R}) \ \cup \ \tilde{\alpha}(\mathbb{R}),$$



  où $\alpha(u) = (\operatorname{ch} u, 0, \operatorname{sh} u)$ et $\tilde{\alpha}(u) = (-\operatorname{ch} u, 0, \operatorname{sh} u)$. L'un d'eux est suffisant pour couvrir S par rotation: si

$$R_\varphi^{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  on a

$$S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R_\varphi^{\vec{z}}\, \alpha(\mathbb{R}) = \Big\{ f(u, \varphi) = \big(\cos\varphi \operatorname{ch} u, \sin\varphi \operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u \big) \mid u \in \mathbb{R}, \ \varphi \in [0, 2\pi[\Big\}.$$

Définition. Une **surface réglé** est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme

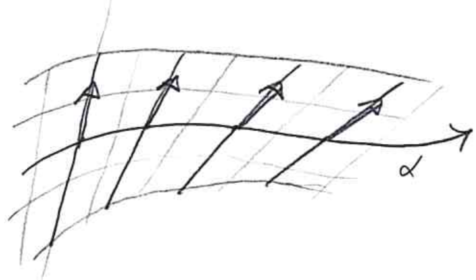
$$f : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (u,v) \mapsto f(u,v) = \alpha(u) + v \ \beta(u),$$

où:

- $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe C^1 qui s'appelle **diréctrice** de S;
- $\beta : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une famille de vecteurs non nuls, i.e. $\beta(u) \neq 0$ pour tout $u \in U$.

Pour tout $u \in U$, on appelle **génératrice** de S la droite

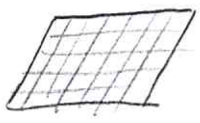
$$\Delta_u = \Big\{ v \mapsto f(u,v) = \alpha(u) + v \ \beta(u) \Big\},$$

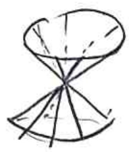


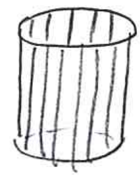
de direction $\beta(u)$ et passant par le point $\alpha(u)$.
On a alors $S = \bigcup_{u \in U} \Delta_u$. En somme, une surface réglée est l'union de ses droites génératrices le long de la courbe directrice.

Exemples.

- Les plans.
  Les cônes.
  Les cylindres.







- L'*hyperboloïde à une nappe* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
  En effet, si on appelle S l'hyperboloïde, son intersection avec le plan $\pi = \{x = 1\}$ donne deux droites:

$$S \cap \pi = \ \big\{(1,y,z) \mid y^2 - z^2 = 0\big\} \ = \ \Delta^+ \ \cup \ \Delta^-,$$

  où $\Delta^+ = \big\{(1,y,z) \mid z = y\big\}$ et $\Delta^- = \big\{(1,y,z) \mid z = -y\big\}$ sont les droites de direction respectivement $\beta^+ = (0,1,1)$ et $\beta^- = (0,1,-1)$. Puisque S est une surface de révolution, on a

$$S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^+) \cup R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^-).$$

  Mais une droite est suffisante pour remplir S, car pour tout $P \in R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^-)$ il existe un $\psi \in [0, 2\pi]$ tel que $P \in R^{\vec{z}}_{\psi}(\Delta^+)$.
  En conclusion on a

$$\Delta^+ = \big\{(1,0,0) + v \ (0,1,1) \mid v \in \mathbb{R}\big\},$$

  donc

$$S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^+) = \big\{R^{\vec{z}}_{\varphi} \ (1,0,0) + v \ R^{\vec{z}}_{\varphi} \ (0,1,1) \mid \varphi \in [0,2\pi[, \ v \in \mathbb{R}\big\}$$

$$= \Big\{ f(\varphi, v) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + v \ (-\sin\varphi, \cos\varphi, 1) \mid \varphi \in [0,2\pi[, \ v \in \mathbb{R} \Big\}.$$

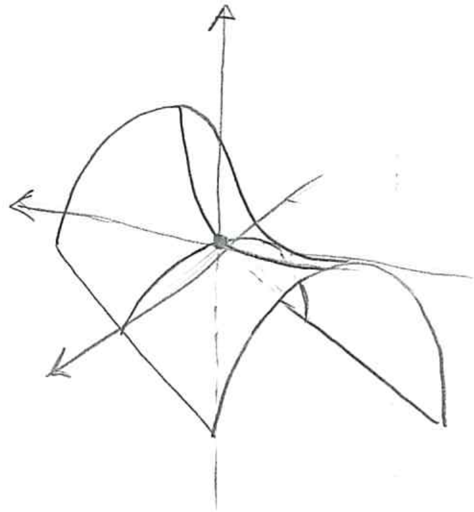
- Le *paraboloïde hyperbolique* $x^2 - y^2 - z = 0$.
  En effet, si on l'appelle S, son intersection avec les plans

$$\pi_u^{\pm} = \Big\{(x, y, z) \mid x \pm y = u\Big\}$$

donne deux droites

$$S \cap \pi_u^+ = \Big\{(x, y, z) \mid x + y = u,\ z = -2uy + u^2\Big\} = \Delta_u^+$$
$$S \cap \pi_u^- = \Big\{(x, y, z) \mid x - y = u,\ z = 2uy + u^2\Big\} = \Delta_u^-$$

et on montre facilement que $S = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} \Delta_u^+ = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} \Delta_u^-$.



2.5 Aire des surfaces [à voir après Ch. 3]

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface régulière de classe C^1 paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si f est bijective sur son image S, on appelle **aire de** S le nombre réel positif

$$\mathrm{Aire}\,(S) = \iint_{U\times V} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv.$$

Lemme. *Le nombre* Aire (S) *ne dépend pas de la paramétrisation (bijective) choisie.*

Preuve. Soit $g : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une autre paramétrisation régulière et bijective de S, et soit $\Phi = g^{-1} \circ f : U \times V \longrightarrow A \times B$ le difféomorphisme qui donne le changement de paramètres, $\Phi(u, v) = (a, b)$. Puisque $f = g \circ \Phi$, on a $df = dg \circ d\Phi$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} df_{(u,v)} &= dg_{(a,b)} \circ d\Phi_{(u,v)} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a, b)\ \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a, b)\ \frac{\partial b}{\partial u}(u, v)\right) du + \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a, b)\ \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a, b)\ \frac{\partial b}{\partial v}(u, v)\right) dv, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial a}(a, b)\ \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a, b)\ \frac{\partial b}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial a}(a, b)\ \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a, b)\ \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

d'où suit que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u, v)\ \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial a}{\partial v}(u, v)\ \frac{\partial b}{\partial u}(u, v)\right)\ \frac{\partial g}{\partial a}(a, b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a, b),$$

et donc que

$$\begin{aligned} \iint_{U\times V} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv &= \iint_{U\times V} \left\|\det d\Phi_{(u,v)}\right\|\ \left\| \frac{\partial g}{\partial a}(\Phi(u, v)) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(\Phi(u, v)) \right\| du\, dv \\ &= \iint_{A\times B} \left\| \frac{\partial g}{\partial a}(a, b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a, b) \right\| da\, db. \end{aligned}$$

□

2.6 Surfaces définies implicitement

Définition. Une **surface (définie implicitement)** est le *lieu des zéros* d'une fonction $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$S = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0,\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C\}.$$

La surface est **algébrique** si F est un polynôme.

La surface est **régulière** au point (x_0, y_0, z_0) si F est différentiable en (x_0, y_0, z_0) et le gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est non-nul. Dans ce cas, il engendre une droite normale à S en (x_0, y_0, z_0), et le plan tangent se trouve comme plan orthogonal à $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ passant par (x_0, y_0, z_0).

Exemples.

- La surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = e^z\}$ est régulière partout.
- La surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ est algébrique, et régulière partout.
- La surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ est singulière en $(0, 0, 0)$. En effet, il s'agit du cône circulaire.
- Le graphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_g,\ z = g(x, y)\}$$

régulière si g est différentiable. En effet:

$$F(x, y, z) = g(x, y) - z \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1\right) \neq (0, 0, 0)$$

pour tout $(x, y, z) \in S$.