4 Champs de vecteurs et formes différentielles

Introduction au chapitre. Le théorème fondamental du calcul intégrale permet de calculer l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'une seule variable sur un intervalle $[a, b]$ à partir de sa primitive $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Autrement dit, il répond à la question suivante:

- Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, combient vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$?

  Réponse (**théorème fondamental du calcul intégrale**): si $f(x) = F'(x)$, on a
  $$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$
  On note ici que l'ensemble $\{a, b\}$ est le *bord* de l'intervalle $[a, b]$.

Ce résultat peut être étendu aux dimensions supérieurs: soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de plusieurs variables, et D un ensemble compact. Alors:

- Si $D \subset \mathbb{R}^2$, combient vaut $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$?

  Réponse (**théorème de Green-Riemann**): si $f(x, y) = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial y} - \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial x}$, on a
  $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$
  où ∂D est la courbe qui compose le *bord* de D.

- Si $D \subset \mathbb{R}^3$, combient vaut $\displaystyle\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$?

  Réponse (**théorème de Gauss-Ostrogradski**): si $f(x, y, z) = \dfrac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} + \dfrac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} + \dfrac{\partial R(x, y, z)}{\partial y}$, on a
  $$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz = \oint_{\partial D} P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx,$$
  où ∂D est la surface qui compose le *bord* de D.

La logique de ces résultats se voit seulement dans un énoncé générale, qui est le suivant (**théorème de Stokes**):

- Si $D^q \subset \mathbb{R}^n$ est une *hypersurface* compacte de dimension q dans $\mathbb{R}^n$, avec $q \leqslant n$, et ω^{q-1} est une $(q-1)$-*forme différentielle* continue sur D^q, alors on a
  $$\int_{D^q} (d\omega)^q = \oint_{(\partial D)^{q-1}} \omega^{q-1},$$
  où d est la *différentielle extérieure* qui transforme la $(q-1)$-forme différentielle ω^{q-1} en une q-forme différentielle $(d\omega)^q$, et $(\partial D)^{q-1}$ est l'hypersurface qui compose le *bord* de D^q.

Pour comprendre le théorème de Stokes nous avons donc besoin de donner un sens aux *formes différentielles*, à l'opérateur de *différentielle extérieur* et à *l'intégrale d'une forme différentielle sur une hypersurface* de dimension opportunée.

4.1 Espace tangent et espace cotangent d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, avec $n = 2, 3$ pour notre but, mais $n = 1$ et $n > 3$ aussi possible.

Définition. Pour tout point $P \in U$, l'**espace tangent à** U **en** P est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à U en P, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents en P à toutes les courbes paramétrées contenues dans U passant par P:

$$T_P U = \Big\{ \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \mid \gamma : I \longrightarrow U,\ \gamma(0) = P \Big\}.$$

Proposition. *L'espace tangent $T_P U$ est un espace vectoriel de dimension n, donc il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. L'espace tangent $T_P U$ est un espace vectoriel réel, car si $\alpha'(0)$ et $\beta'(0)$ sont deux vecteurs de $T_P U$, et donc $t \mapsto \alpha(t)$ et $t \mapsto \beta(t)$ sont deux courbes contenues dans U passant par P en $t = 0$, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ le vecteur

$$\lambda\, \alpha'(0) + \mu\, \beta'(0) = \gamma'(0)$$

est tangent en $t = 0$ à la courbe

$$\gamma(t) = P + \lambda \big(\alpha(t) - P\big) + \mu \big(\beta(t) - P\big),$$

telle que $\gamma(0) = P + \lambda \big(\alpha(0) - P\big) + \mu \big(\beta(0) - P\big) = P$.

Pour trouver la dimension (et une base canonique) de $T_P U$, il suffit de fixer les coordonnées cartesiennes de $P = (x_1, ..., x_n)$ et de considérer les **courbes coordonnées** $\gamma_i : I \longrightarrow U$, pour $i = 1, ..., n$, définies sur un intervalle $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contenant 0 par

$$\gamma_i(t) = (x_1, x_2, ..., x_i + t, ..., x_n), \qquad t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

qui sont telles que, pour tout $i = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} \gamma_i(0) &= (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = P, \\ \gamma_i'(0) &= (0, 0, ..., 1, ..., 0). \end{aligned}$$

On voit alors que les n vecteurs $\{\gamma_i'(0),\ i = 1, ..., n\}$ engendrent $T_P U$ comme espace vectoriel,

$$T_P U = \mathrm{Vect}\{\gamma_i'(0),\ i = 1, ..., n\},$$

et que l'application $\gamma_i'(0) \mapsto e_i$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels $T_P U \cong \mathbb{R}^n$. Donc $\{\gamma_i'(0),\ i = 1, ..., n\}$ est la **base canonique** de $T_P U$. $\square$

Remarque. Géométriquement, il faut considérer $T_P U$ plutôt comme l'*espace affine* de vecteurs tangents appliqués en P, c'est-à-dire

$$T_P U = P + \mathrm{Vect}\{\gamma_i'(0),\ i = 1, ..., n\}.$$

Définition. Pour tout point $P \in U$, l'**espace cotangent à** U **en** P est l'espace vectoriel dual de T_PU, c'est-à-dire l'espace vectoriel

$$T_P^*U = \mathrm{Lin}(T_PU, \mathbb{R}) = \Big\{ \alpha : T_PU \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire} \Big\}$$

des applications linéaires de T_PU vers $\mathbb{R}$, qui s'appellent aussi **formes linéaires** ou **covecteurs**.

Proposition. *L'espace cotangent T_P^*U est un espace vectoriel réel de dimension n, avec* **base canonique** *donnée par la base duale $\{\alpha_i,\ i = 1, ..., n\}$ de la base $\{\gamma_i'(0),\ i = 1, ..., n\}$ fixée sur T_PU. Cela signifie que les covecteurs α_i sont défini (sur les vecteurs de base, car ce sont des applications linéaires) par*

$$\alpha_i\big(\gamma_j'(0)\big) = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & si\ j \neq i \end{cases}.$$

Preuve. Algèbre linéaire: relation entre un espace vectoriel V et son dual V^*. □

Remarque. Les bases canoniques de T_PU et T_P^*U sont notées respectivement

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\Big) \qquad \text{et} \qquad \Big((dx_1)_P, ..., (dx_n)_P\Big),$$

avec l'identification formelle

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P = \gamma_i'(0) \qquad \text{et} \qquad (dx_i)_P = \alpha_i \qquad \text{pour } i = 1, ..., n,$$

car si $(x_1, ..., x_n) = \phi(u_1, ..., u_n)$ est un changement de coordonnées pour P, où $\phi : \tilde{U} \longrightarrow U$ est un difféomorphisme et on note $\tilde{P} = \phi^{-1}(P)$, et donc chaque coordonnée $x_i = x_i(u_1, ..., u_n)$ est vue comme fonction des nouvelles variables, les bases $\{\gamma_i'(0)\}$ et $\{\alpha_i\}$ se transforment exactement comme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(P)\, \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_{\tilde{P}} \qquad \text{et} \qquad (dx_i)_P = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(\tilde{P})\, (du_j)_{\tilde{P}}$$

où $(dx_i)_P$ est la différentielle de la fonction x_i au point $\tilde{P}$. En notation matricielle, les transformation de ces bases sont données par les matrices Jacobienne de ϕ^{-1} et ϕ respectivement:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P \end{pmatrix} = J_{\phi^{-1}}(P) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{\tilde{P}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_{\tilde{P}} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} (dx_1)_P \\ \vdots \\ (dx_n)_P \end{pmatrix} = J_\phi(\tilde{P}) \begin{pmatrix} (du_n)_{\tilde{P}} \\ \vdots \\ (du_n)_{\tilde{P}} \end{pmatrix}.$$

Ces lois de transformations disent que:

- *les vecteurs se transforment de façon* **contravariante** *(comme ϕ^{-1}),*
- alors que *les covecteurs se transforment de façon* **covariante** *(comme ϕ).*

À noter aussi que normalement les points P et $\tilde{P}$ sont sous-entendus.

Exemples. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ et $P = (x, y)$, on a

$$T_P U = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P \right) \qquad \text{et} \qquad T_P^* U = \text{Vect}\left(dx_P, dy_P \right).$$

Si $U \subset \mathbb{R}^3$ et $P = (x, y, z)$, on a

$$T_P U = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P \right) \qquad \text{et} \qquad T_P^* U = \text{Vect}\left(dx_P, dy_P, dz_P \right).$$

4.2 Champs de vecteurs

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Nous voulons décrire une application V qui associe à tout point P un vecteur $V_P \in T_P U$. Les espaces tangents $T_P U$ sont tous des espaces vectoriels de dimension n, donc isomorphes l'un à l'autre, mais *ils ne sont pas le même espace vectoriel*, car en réalité ce sont des espaces affines avec *un repère centré au point P*. Donc, bien que pour tout $P \in U$ on ait un isomorphisme $T_P U \cong \mathbb{R}^n$, une application V qui associe à tout point P un vecteur $V_P \in T_P U$ n'est pas une fonction vectorielle $V : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition. Un **champ de vecteurs**, ou **champ vectoriel**, sur U est une application

$$\begin{aligned} V: \ U &\longrightarrow \bigcup_{P \in U} T_P U \\ P &\longmapsto V_P \in T_P U \end{aligned}$$

où chaque vecteur V_P est appliqué au point P.

- Si $P = (x_1, ..., x_n)$, le vecteur V_P est une combinaison linéaire

  $$V(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, ..., x_n) \ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P,$$

  où les coefficients $a_i(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ dépendent du point P.

- L'expression générale d'un champ de vecteur est donc

  $$V = \sum_{i=1}^n a_i \ \frac{\partial}{\partial x_i},$$

  où les **coefficients** $a_1, ..., a_n$ sont des fonctions $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Le **domaine de définition** du champ V est l'intersection des domaines de définition de tous ses coefficients $a_1, ..., a_n$.

- Le champ vectoriel V est **de classe** C^k si ses coefficients a_i sont des fonctions de classe C^k.

- On note $\mathcal{V}(U)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur U.

Exemples.

- $V(x,y) = \sin x \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos y \dfrac{\partial}{\partial y}$ est un champ vectoriel C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
- $V(x,y,z) = e^{xz} \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{x} \dfrac{\partial}{\partial y} + xz \dfrac{\partial}{\partial z}$ est un champ vectoriel C^∞ sur $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$.

Proposition. *L'ensemble $\mathcal{V}(U)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie) et aussi un module sur l'anneau des fonctions $C^\infty(U)$, de rang n et de base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, ..., n \right\}$.*

N.B. Un **module sur un anneau** est l'analogue d'un espace vectoriel sur un corps, quand le corps n'a pas forcement tous les inverses (c'est un anneau). La dimension s'appelle alors **rang**. Voir le livre de Serge Lang "Algèbre".

Preuve. D'abord on définie sur $\mathcal{V}(U)$ la structure de module sur $C^\infty(U)$, come suit:

- On muni $\mathcal{V}(U)$ d'une addition: si $A = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $B = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs, on pose
$$A + B = \sum_{i=1}^n \big(a_i + b_i\big) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$
Cette addition est associative, commutative, et a l'élément neutre $0 = \sum_{i=1}^n 0 \frac{\partial}{\partial x_i}$.
- On muni $\mathcal{V}(U)$ d'un produit par scalaire (les fonctions): si $V = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est un champ de vecteurs et f une fonction sur U, on pose
$$f\,V = \sum_{i=1}^n \big(f\,a_i\big) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$
Ce produit donne évidement un champ de vecteur. Et il est associatif, dans le sens que $f\,\big(g\,V\big) = \big(f\,g\big)\,V$.
- Enfin, on vérifie que vaut la distributivité: $f\,\big(A + B\big) = f\,A + f\,B$, pour tout $A, B \in \mathcal{V}(U)$ et pour tout $f \in C^\infty(U)$.

Ensuite, vu la forme générale $V = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ d'un champ vectoriel, avec $a_i \in C^\infty(U)$, il est évident que l'ensemble $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, ..., n \right\}$ forme une base de $\mathcal{V}(U)$ comme module sur $C^\infty(U)$. $\square$

4.3 Formes différentielles

Définition. Une 1-**forme différentielle sur** U est une application

$$\begin{array}{rccl} \omega: & U & \longrightarrow & \bigcup\limits_{P\in U} \mathrm{Lin}\big(T_PU,\mathbb{R}\big) = \bigcup\limits_{P\in U} T_P^*U \\ & P & \longmapsto & \omega_P \end{array}$$

à valeurs dans l'espace cotangent à U en tout point.

- Si $P = (x_1, ..., x_n)$, on a

$$\omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, ..., x_n)\ (dx_i)_P,$$

  où les coefficients $a_i(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ dépendent du point P.

- L'expression générale d'une 1-forme différentielle est donc

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\ dx_i,$$

  où les **coefficients** $a_1, ..., a_n$ sont des fonctions $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Le **domaine de définition** de la 1-forme ω est l'intersection des domaines de définition de tous ses coefficients $a_1, ..., a_n$.

- Le 1-forme ω est **de classe** C^k si ses coefficients a_i sont des fonctions de classe C^k.

- On note $\Omega^1(U)$ l'ensemble des 1-formes différentielles C^∞ sur U.

Exemples.

- dx, dy et dz sont des 1-formes différentielles C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, car en tout point P elles donnent bien des covecteurs $(dx)_P, (dy)_P, (dz)_P \in T_P^*U$, et leur coefficients sont données par la fonction constante égale à 1, qui est C^∞.

- $\omega(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\, dx - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\, dy$ est une 1-forme différentielle C^∞ sur l'ouvert $U = \big\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0) \,\big\}$.

Proposition. *L'ensemble $\Omega^1(U)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie) et aussi un module sur l'anneau des fonctions $C^\infty(U)$, de rang n et de base $\{dx_i,\ i = 1, ..., n\}$.*

Preuve. Comme pour l'espace $\mathcal{V}(U)$ des champs de vecteurs sur U. $\square$

Définition. Pour tout entier $q \geqslant 1$, une **forme différentielle de degré q sur U**, ou **q-forme différentielle**, est une application

$$\begin{aligned} \omega : \ U &\longrightarrow \bigcup_{P \in U} \mathrm{Lin}^{alt}\big((T_PU)^q, \mathbb{R}\big) \\ P &\longmapsto \omega_P \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathrm{Lin}^{alt}\big((T_PU)^q, \mathbb{R}\big)$ des applications q-multilinéaires alternées sur T_PU, c'est-à-dire l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} \omega_P : \ T_PU \times \cdots \times T_PU &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(V_P^1, ..., V_P^q\big) &\longmapsto \omega_P\big(V_P^1, ..., V_P^q\big) \end{aligned}$$

définies sur q vecteurs tangents, telles que

- ω_P est linéaire (et additive) en chacune des variables V_P^i,
- si on permute les variables, le signe de $\omega_P\big(V_P^1, ..., V_P^q\big)$ change selon le signe de la permutation: pour tout permutation $\sigma \in \Sigma_q$ on a

  $$\omega_P\big(V_P^{\sigma(1)}, ..., V_P^{\sigma(q)}\big) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \omega_P\big(V_P^1, ..., V_P^q\big).$$

  Par exemple,

  $$\begin{aligned} &\omega_P(A_P, B_P) = -\omega_P(B_P, A_P) \\ &\omega_P(A_P, B_P, C_P) = -\omega_P(B_P, A_P, C_P) = \omega_P(B_P, C_P, A_P) = -\omega_P(C_P, B_P, A_P) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour décrire explicitement une q-forme différentielle, nous avons besoin d'une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Lin}^{alt}\big((T_PU)^q, \mathbb{R}\big)$ (voir un cours d'algèbre linéaire, ou le livre de Lang). En alternative, nous pouvons faire appel à un produit entre formes. D'abord, nous avons besoin de pouvoir multiplier les formes par des fonctions.

Lemme. *Si ω est une q-forme différentielle sur U et f est une fonction sur U, le produit (par scalaire) $f\omega$ défini en tout point $P \in U$ par*

$$(f\omega)_P = f(P)\,\omega_P \in \mathrm{Lin}^{alt}\big((T_PU)^q, \mathbb{R}\big)$$

donne bien une q-forme différentielle sur U.

Preuve. Évident. □

Définition. Soient ω une q-forme différentielle et η une p-forme différentielle sur U. Le **produit extérieur** de ω et η, ou **produit wedge**, est la $q+p$-forme différentielle $\omega \wedge \eta$ définie en tout point P comme l'application

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)_P : \quad \big(T_PU\big)^{q+p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(V_P^1, ..., V_P^{q+p}\big) &\longmapsto \textstyle\sum_{\sigma \in \Sigma_{q+p}} \mathrm{sgn}(\sigma)\ \omega_P\big(V_P^{\sigma(1)}, ..., V_P^{\sigma(q)}\big)\ \eta_P\big(V_P^{\sigma(q+1)}, ..., V_P^{\sigma(q+p)}\big) \end{aligned}$$

Proposition. *Le produit extérieur* $\wedge$ *est une opération avec les propriétés suivantes:*

- $\wedge$ *est bilinéaire sur* $C^\infty(U)$*:*

$$\begin{aligned}\big(f_1\omega_1 + f_2\omega_2\big)\wedge\eta &= f_1\omega_1\wedge\eta + f_2\omega_2\wedge\eta,\\ \omega\wedge\big(f_1\eta_1 + f_2\eta_2\big) &= f_1\omega\wedge\eta_1 + f_2\omega\wedge\eta_2.\end{aligned}$$

- $\wedge$ *est associatif:* $\big(\omega\wedge\eta\big)\wedge\xi = \omega\wedge\big(\eta\wedge\xi\big)$.
- $\wedge$ *est anti-symétrique: si* ω *est une* q*-forme et* η *est une* p*-forme, alors*

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{qp}\eta\wedge\omega.$$

En particulier, si ω *et* η *sont des* 1*-formes, on a* $\omega\wedge\eta = -\eta\wedge\omega$*, donc*

$$\omega\wedge\omega = 0.$$

Preuve. Calculs (horribles) en utilisant la définition. $\square$

Exemples.

- $dx\wedge dy$ est une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ (avec coordonnées cartesiennes (x,y)) et aussi sur $\mathbb{R}^3$ (avec coordonnées cartesiennes (x,y,z)).
- $(dx\wedge dy)\wedge dz = dx\wedge(dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz$ est une 3-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$.
- Si $\alpha = x\,dx + y\,dy$ et $\beta = y\,dx - x\,dy$ sont deux 1-formes sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta &= xy\,dx\wedge dx - x^2\,dx\wedge dy + y^2\,dy\wedge dx - xy\,dy\wedge dy\\ &= -(x^2+y^2)dx\wedge dy\end{aligned}$$

  est une 2-forme sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $\alpha = x\,dx + y\,dz$ est une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ et $\beta = z\,dx\wedge dy + x\,dy\wedge dz$ est une 2-forme sur $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta &= xz\,dx\wedge(dx\wedge dy) + x^2\,dx\wedge(dy\wedge dz) + yz\,dz\wedge(dx\wedge dy) + xy\,dz\wedge(dy\wedge dz)\\ &= xz\,dx\wedge dx\wedge dy + x^2\,dx\wedge dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx\wedge dy + xy\,dz\wedge dy\wedge dz\\ &= xz\,0\wedge dy + x^2\,dx\wedge dy\wedge dz + (-1)^2 yz\,dx\wedge dy\wedge dz + (-1)xy\,dy\wedge dz\wedge dz\\ &= (x^2+yz)\,dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

  est une 3-forme sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Les* q*-formes différentielles sur* U *sont toutes de la forme*

$$(x_1,\dots,x_n)\longmapsto\omega(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_q\leqslant n} a_{i_1\cdots i_q}(x_1,\dots,x_n)\;dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_q},$$

où les coefficients $a_{i_1\cdots i_q}$ *sont des fonctions sur* U.

À noter que l'ensemble des suites de nombres entiers $(i_1, ..., i_q)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant n$ est donné par le coefficient binomial

$$\binom{n}{q} = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}.$$

Preuve. Complètement algébrique: il s'agit de montrer que l'ensemble des applications q-multilinéaires alternées sur un espace vectoriel V est isomorphe à l'espace vectoriel $\bigwedge^q(V^*)$ des *q-puissances extérieurs* sur son dual V^*. Pour ceci, il faut d'abord définir les *q-puissances tensorielles* $(V^*)^{\otimes q}$ à l'aide du *produit tensoriel* $\otimes$ entre espaces vectoriels, car les puissances extérieurs en sont un espace quotient. Tout ceci est hors programme en Licence. Pour en savoir plus, voir le livre de Serge Lang "Algèbre". $\square$

Exemples. Sur $U \subset \mathbb{R}^2$, les formes différentielles sont toutes des formes suivantes:

1-formes: $\alpha(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ avec $a, b \in C^\infty(U)$;

2-formes: $\omega(x,y) = a(x,y)\,dx \wedge dy$ avec $a \in C^\infty(U)$;

3-formes: $\eta(x,y) = 0$.

Sur $U \subset \mathbb{R}^3$, les formes différentielles sont toutes des formes suivantes:

1-formes: $\alpha(x,y,z) = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$ avec $a, b, c \in C^\infty(U)$;

2-formes: $\omega(x,y,z) = a(x,y,z)\,dx\wedge dy + b(x,y,z)\,dx\wedge dz + c(x,y,z)\,dy\wedge dz$ avec $a, b, c \in C^\infty(U)$;

3-formes: $\eta(x,y,z) = a(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz$ avec $a \in C^\infty(U)$;

4-formes: $\xi(x,y,z) = 0$.

Définition.

- Le **domaine de définition** d'une q-forme différentielle $\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_q}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ est l'intersection des domaines de définition des coefficients $a_{i_1 \cdots i_q}$.
- Une q-forme $\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_q}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ est **de classe** C^k si ses coefficients $a_{i_1 \cdots i_q}$ sont de classe C^k.
- On note $\Omega^q(U)$ l'ensemble des q-formes différentielles de classe C^∞ sur U.
- On appelle 0-**formes différentielles** les fonctions, et on note aussi $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Voici un resumé de la structure des formes différentielles.

Proposition.

1. *Pour tout $q \geqslant 0$, l'ensemble $\Omega^q(U)$ des q-formes différentielles de classe C^∞ sur U est un espace vectoriel (de dimension infinie) et un module sur $C^\infty(U)$ de rang $\binom{n}{q}$ et base*

$$\left\{ \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant n \, \right\},$$

où la somme de deux q-formes $\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_q} \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ et $\eta = \sum b_{i_1 \cdots i_q} \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ est la q-forme

$$\omega + \eta = \sum \left(a_{i_1 \cdots i_q} + b_{i_1 \cdots i_q} \right) \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q},$$

et le produit de ω par une fonction f est la q-forme

$$f \, \omega = \sum \left(f \, a_{i_1 \cdots i_q} \right) \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}.$$

En particulier, on a $\Omega^q(U) = 0$ pour tout $q \geqslant n+1$.

2. *Le produit extérieur est une opération*

$$\wedge : \Omega^q(U) \times \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{q+p}(U)$$

$C^\infty(U)$-bilinéaire, associative et anti-symétrique, qui agit sur $\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_q} \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ et $\eta = \sum b_{j_1 \cdots j_p} \; dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$ comme

$$\omega \wedge \eta = \sum a_{i_1 \cdots i_q} \; b_{j_1 \cdots j_p} \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}.$$

3. *Les formes différentielles agissent sur les champs de vecteurs de façon $C^\infty(U)$-multilinéaire et alternée.*

Autrement dit, $\Omega^1(U)$ est le $C^\infty(U)$-module duale de $\mathcal{V}(U)$:

$$\Omega^1(U) = \mathrm{Lin}_{C^\infty(U)}\Big(\mathcal{V}(U), C^\infty(U) \Big) = \mathcal{V}(U)^*,$$

avec la dualité suivante: pour tout $\omega \in \Omega^1(U)$ et $V \in \mathcal{V}(U)$, on obtient une fonction

$$\begin{array}{rccl} \omega(V) : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \omega(V)(P) = \omega_P(V_P). \end{array}$$

De même, on a:

$$\Omega^q(U) = \mathrm{Lin}^{alt}_{C^\infty(U)}\Big(\big(\mathcal{V}(U)\big)^q, C^\infty(U) \Big).$$

Exemple. Pour le champ de vecteurs $V(x,y) = \sin x \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \, \frac{\partial}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour la 1-forme différentielle $\omega(x,y) = y \, dx - x \, dy$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $\omega(V)$ vaut:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= y \, dx\big(\sin x \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \, \frac{\partial}{\partial y} \big) - x \, dy\big(\sin x \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \, \frac{\partial}{\partial y} \big) \\ &= y \sin x \, dx\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) + y \sin y \, dx\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) - x \sin x \, dy\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) - x \sin y \, dy\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) \\ &= y \sin x - x \sin y. \end{aligned}$$

4.4 Différentielle de de Rham

Définition. La **différentielle extérieur**, ou **différentielle de de Rham**, est l'application

$$d : \Omega^q(U) \longrightarrow \Omega^{q+1}(U), \qquad \text{pour tout } q \geqslant 0,$$

définie sur tout $\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant n} a_{i_1\cdots i_q}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_q} \in \Omega^q(U)$ par

$$d\omega = \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_q}}{\partial x_j}\, dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_q}.$$

La différentielle extérieur donne donc une suite finie d'opérateurs:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Omega^0(U) & \xrightarrow{\quad d\quad} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{\quad d\quad} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{\quad d\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad d\quad} & \Omega^n(U)\\
f & \longmapsto & df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j & & & & & & \\
 & & \alpha = \sum_{i=1}^n a_i\, dx_i & \longmapsto & d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, dx_j\wedge dx_i & & & &
\end{array}$$

Exemples. Sur $U\subset\mathbb{R}^2$:

$$f\in C^\infty(U) \quad\Longrightarrow\quad df = \tfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$\alpha = a\,dx + b\,dy \quad\Longrightarrow\quad d\alpha = \tfrac{\partial a}{\partial x}\, dx\wedge dx + \tfrac{\partial a}{\partial y}\, dy\wedge dx + \tfrac{\partial b}{\partial x}\, dx\wedge dy + \tfrac{\partial b}{\partial y}\, dy\wedge dy = \left(\tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

$$\omega = a\,dx\wedge dy \quad\Longrightarrow\quad d\omega = 0.$$

Sur $U\subset\mathbb{R}^3$:

$$f\in C^\infty(U) \quad\Longrightarrow\quad df = \tfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz \quad\Longrightarrow\quad d\alpha = \left(\tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\tfrac{\partial c}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial z}\right) dx\wedge dz + \left(\tfrac{\partial c}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial z}\right) dy\wedge dz$$

$$\omega = a\,dx\wedge dy + b\,dx\wedge dz + c\,dy\wedge dz \quad\Longrightarrow\quad d\omega = \left(\tfrac{\partial c}{\partial x} - \tfrac{\partial b}{\partial y} + \tfrac{\partial a}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\eta = a\,dx\wedge dy\wedge dz \quad\Longrightarrow\quad d\eta = 0.$$

Proposition. *La différentielle extérieur a les propriétés suivantes:*

- *d est un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}$:*

$$d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda\, d\omega + \mu\, d\eta, \qquad \textit{pour tout } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

- *d vérifie la* **règle de Leibniz***:*

$$\begin{aligned}
f\in C^\infty(U),\ \omega\in\Omega^q(U) \quad&\Longrightarrow\quad d\big(f\,\omega\big) = df\wedge\omega + f\, d\omega,\\
\omega\in\Omega^q(U), \eta\in\Omega^p(U) \quad&\Longrightarrow\quad d\big(\omega\wedge\eta\big) = d\omega\wedge\eta + (-1)^q\omega\wedge d\eta.
\end{aligned}$$

- *d est* **de carré nul**, *$d \circ d = 0$, c'est-à-dire:*

$$d(d\omega) = 0 \qquad \textit{pour tout } \omega \in \Omega^q(U).$$

Preuve. Toutes les propriétés se vérifient facilement à partir de la définition de d. À noter que la troixième est une consèquence du Théorème de Schwarz: si $f \in C^\infty(U)$, on a $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$, donc

$$d(df) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j$$

où $dx_i \wedge dx_j$ s'annulle si $i = j$ et $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ si $i > j$, donc

$$d(df) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

car f est de classe C^∞. Pour une q-forme $\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$, le raisonnement est le même sur les coefficients $a_{i_1 \cdots i_q}$. □

4.5 Formes exactes et fermées

Si η est une $(q-1)$-forme différentielle sur U, sa différentielle $d\eta$ est une q-forme qu'on sait calculer. Viceversa, une q-forme ω est-elle toujours de la forme $d\eta$? La réponse dépend des propriétés topologique de U.

Définition. Une q-forme différentielle ω sur $U \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle

- **fermée** si $d\omega = 0$;
- **exacte** si $\omega = d\eta$, où η est une $(q-1)$-forme différentielle sur U qui s'appelle **primitive** ou **potentiel** de ω.

Toute n-forme ω sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est fermée, car $d\omega \in \Omega^{n+1}(U) = 0$.

Exemples.

- $\omega(x,y,z) = yz\, dx - xz\, dy + xy\, dz \in \Omega^1(R^3)$ n'est pas fermée, car

$$d\omega = -2z\, dx \wedge dy + 2x\, dy \wedge dz \neq 0.$$

- $\omega(x,y,z) = yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz \in \Omega^1(R^3)$ est fermée car $d\omega = 0$, et elle est aussi exacte car $\omega = df$ avec

$$f(x,y,z) = xyz + c.$$

- $\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2}\, dy \in \Omega^1(R^2 \backslash \{(0,0)\})$ est fermée car $d\omega = 0$, et elle est aussi exacte sur $R^2 \backslash \{(0,0)\}$ car $\omega = df$ avec

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c, \qquad \text{définie sur } R^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

- $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega^1(R^2\backslash\{(0,0)\})$ est fermée car $d\omega = 0$, mais elle n'est pas exacte sur $R^2\backslash\{(0,0)\}$ car l'égalité $\omega = df$ est vérifiée par des fonctions différentes selon les secteurs de $R^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \arctan(x/y) & \text{si } y > 0, \\ \arctan(x/y) + \pi & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

  et aucune de ces expressions ne peut être étendue à tout le domaine $R^2\backslash\{(0,0)\}$.

Proposition. *Toute forme exacte est fermée.*

Preuve. Cela suit banalement du fait que d soit de carré nul, $d \circ d = 0$. □

La question non banale est le contraire: *toute forme fermée sur U est-elle exacte sur U ?*

Le défaut des formes fermées d'être exactes est une propriété *topologique* de l'ouvert U, qui peut être "mesuré" par des *invariants*, les *groupes de cohomologie de de Rham.*

Définition. Pour tout $q \geqslant 0$, on pose

$$Z^q(U) = \Big\{ \omega \in \Omega^q(U) \mid \omega \text{ est fermée} \Big\}$$
$$B^q(U) = \Big\{ \omega \in \Omega^q(U) \mid \omega \text{ est exacte} \Big\}.$$

Les ensembles $Z^q(U)$ et $B^q(U)$ sont des espaces vectoriels, et en particulier ils sont des groupes abéliens par rapport à l'addition. De plus, la propriété ω *exacte* $\Longrightarrow$ ω *fermée* implique qu'on a une inclusion de groupes

$$B^q(U) \subset Z^q(U) \subset \Omega^q(U).$$

On appelle **q-ième groupe de cohomologie de de Rham de** U le groupe additif quotient (coset)

$$H^q_{dR}(U) = Z^q(U)/B^q(U) = \Big\{ \ [\omega]_\sim \mid \omega \in Z^q(U) \ \Big\},$$

où

$$\omega \sim \tilde{\omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\omega} = \omega + d\eta, \quad \text{avec } \eta \in \Omega^{q-1}(U),$$

et où la structure de groupe est relative à l'addition

$$[\alpha]_\sim + [\beta]_\sim = [\alpha + \beta]_\sim.$$

On a alors que

$$[\omega]_\sim = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = d\eta \quad \text{i.e. } \omega \text{ est exacte.}$$

Donc le q-ième groupe de cohomologie $H^q_{dR}(U)$ mesure combient de q-formes fermées sur U ne sont pas exactes.

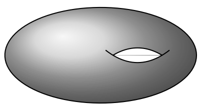
Exemple. On a vu que la 1-forme $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega^1(R^2\backslash\{(0,0)\})$ est fermée et elle n'est pas exacte, donc $[\omega]_\sim \neq 0$, et par conséquent

$$H^1_{dR}(R^2\backslash\{(0,0)\}) \neq 0.$$

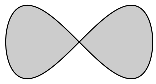
4.6 Lemme de Poincaré

Définition. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que:

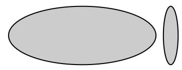
- U est **connexe (par arcs)** si deux points quelconques de U peuvent être joint par une courbe contenue dans U. Exemples:



connexe

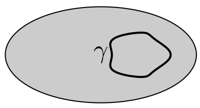


connexe

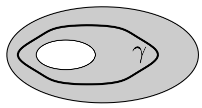


non connexe

- U est **simplement connexe** s'il est connexe et toute courbe <u>fermée</u> dans U peut être déformée continûment en un point (intuitivement cela signifie qu'il n'y a pas de “trous” dans U). Exemples:



simplement connexe

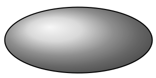


non simplement connexe

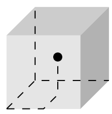
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots, \mathbb{R}^n$
simplement connexe

$\mathbb{R}^2 \setminus$ point, $\mathbb{R}^3 \setminus$ droite
non simplement connexe

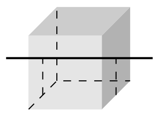
- U est **contractile** s'il existe une déformation continue qui le transforme en un point (et donc il est aussi simplement connexe). Exemples:



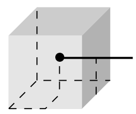
contractile



non contractile
simplement connexe



non contractile
non simplement connexe



contractile

Théorème. **[Lemme de Poincaré.]** *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors, pour tout $q > 0$, toute q-forme fermée est exacte. Autrement dit:*

$$H^q_{dR}(U) = 0 \qquad \textit{pour tout } q > 0.$$

Pour $q = 1$ il suffit que U soit simplement connexe.

Preuve. On donne l'idée de la preuve pour $q = 1$.

- Pour $n = 1$, le lemme de Poincaré dit que toute forme différentielle $\omega(x) = a(x)\,dx$ de classe C^∞, qui est automatiquement fermée car $\Omega^2(U) = 0$ si $U \subset \mathbb{R}$, est exacte, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $\omega(x) = df(x) = f'(x)\,dx$ pour une fonction $f \in C^\infty(U)$. Cela est vrai, car U contractile signifie que U est un intervalle, et il suffit de prendre une primitive de a:

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \qquad \text{pour tout } x_0 \in U.$$

- Pour $n = 2$, le lemme de Poincaré dit que toute forme différentielle $\omega(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ de classe C^∞ sur $U \subset \mathbb{R}^2$ qui est fermée, c'est-à-dire telle que

$$d\omega(x,y) = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = 0, \qquad \text{i.e.} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y},$$

est aussi exacte, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $\omega = df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$ pour une fonction $f \in C^\infty(U)$.

Montrons que cela est vrai, sous l'hypothèse que l'ouvert U soit non seulement simplement connexe, mais **étoilé par rapport à un point** $P_0 = (x_0, y_0)$, c'est-à-dire que U contient le segment

$$[P_0, P] = \left\{\, P_0 + t(P - P_0) \mid t \in [0,1] \,\right\}$$

pour tout $P \in U$. Dans ce cas, pour trouver la valeur $f(x,y)$ de la primitive f de ω, l'idée est d'intégrer ω le long du segment γ qui joigne P_0 à (x,y), paramétré par $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ avec

$$x(t) = x_0 + t(x - x_0) \qquad \text{et} \qquad y(t) = y_0 + t(y - y_0),$$

de telle sorte que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ et $\gamma(1) = (x,y)$. On pose donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_\gamma \omega \\ &= \int_0^1 a(x(t), y(t))\,(x - x_0) + b(x(t), y(t))\,(y - y_0)\,dt, \end{aligned}$$

car le long de γ on a $dx = x'(t)\,dt = (x - x_0)\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = (y - y_0)\,dt$.

Puisque $a(x(t), y(t)) = a(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$ et $b(x(t), y(t)) = b(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\big(a(x(t), y(t))\,(x - x_0)\big) &= a(x(t), y(t)) + t\,\frac{\partial}{\partial x}\big(a(x(t)), y(t))\big)\,(x - x_0), \\ \frac{\partial}{\partial x}\big(b(x(t), y(t))\,(y - y_0)\big) &= t\,\frac{\partial}{\partial x}\big(b(x(t)), y(t))\big)\,(y - y_0). \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 a(x(t), y(t))\,dt + \int_0^1 t\left(\frac{\partial a(x(t), y(t))}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial b(x(t), y(t))}{\partial x}\,(y - y_0)\right) dt$$

Posons $g(t) = a(x(t), y(t))$. On a alors:

$$g'(t) = \frac{\partial a(x(t), y(t))}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial a(x(t), y(t))}{\partial y}\,(y - y_0),$$

et puisque ω est fermée on a aussi

$$g'(t) = \frac{\partial a(x(t), y(t))}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial b(x(t), y(t))}{\partial x}\,(y - y_0).$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \Big(g(t)+tg'(t)\Big)\,dt\\ &= \int_0^1 \Big(tg(t)\Big)'\,dt\\ &= \Big[\,tg(t)\,\Big]_0^1 = g(1) = a(x,y).\end{aligned}$$

De la même façon on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$, ce qui prouve que $df = \omega$.

$\square$

Exemples.

- Si U est $\mathbb{R}^n$ ou une boule de $\mathbb{R}^n$, on a U contractile: par le lemme de Poincaré, toutes les formes fermées sont exactes. Le groupes de cohomologies sont donc: $H^q_{dR}(U) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$ et $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}$.
- Si U est la sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n, où un tore, U n'est pas contractile: il existe des formes fermées qui ne sont pas exactes. Par exemple, sur la sphère $\mathbb{S}^n$ il existe exactement une n-forme fermée non exacte (modulo des formes exactes), et on a donc $H^q_{dR}(\mathbb{S}^n) = 0$ pour tout $1 \leqslant q \leqslant n-1$ et $H^q_{dR}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ pour $q = 0, n$.

4.7 Intégrales des formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\,dx_i \in \Omega^1(U)$ une 1-forme différentielle sur U et $\gamma : I \longrightarrow U$ une courbe paramétrée contenue dans U, avec $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ pour tout $t \in I$. On appelle **intégrale curviligne de ω le long de γ** l'intégrale

$$\int_\gamma \omega = \int_I \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1(t), ..., x_n(t))\, x_i'(t)\,dt.$$

Exemple. Pour $\omega(x,y) = y\,dx + x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt = 0.$$

Définition. Soit $\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\,dx_i\wedge dx_j \in \Omega^2(U)$ une 2-forme différentielle sur U et $f : I\times J \longrightarrow U$ la paramétrisation d'une surface S compacte contenue dans U, avec $f(u,v) = (x_1(u,v), ..., x_n(u,v))$ pour tout $u \in I$ et $v \in J$. On appelle **intégrale de surface de ω sur** S l'intégrale

$$\int_S \omega = \iint_{I\times J} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(x_1(u,v), ..., x_n(u,v)) \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right) du\,dv.$$

Exemples.

- Pour $\omega(x,y) = xy\,dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ et $S = \{f(u,v) = (uv, u^2+v^2) \mid u,v \in [0,1]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_S \omega &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} uv\,(u^2+v^2)\,(v\,2v - u\,2u)\,du\,dv \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,1]} uv\,(u^2+v^2)\,(v\,2v - u\;2u)\,du\,dv \\
&= 2 \iint_{[0,1]\times[0,1]} (uv^5 - u^5 v)\,du\,dv \\
&= 2\int_0^1 du \int_0^1 (uv^5 - u^5 v)\,dv \\
&= 2\int_0^1 (\frac{1}{6}u - \frac{1}{2}u^5)\,du \\
&= 2(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}) = 0.
\end{aligned}$$

- Pour $\omega(x,y,z) = z\,dx\wedge dy - y\,dx\wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ et $S = \{f(u,v) = (uv, u^2+v^2, v^3) \mid u,v \in [0,1]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_S \omega &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left[v^3\,(v\,2v - u\;2u) - (u^2+v^2)\,(v\,3v^2 - u\,0)\right] du\,dv \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (2v^5 - 2u^2v^3 - 3u^2v^3 - 3v^5)\,du\,dv \\
&= -\iint_{[0,1]\times[0,1]} (5u^2v^3 + v^5)\,du\,dv \\
&= -\int_0^1 du \int_0^1 (5u^2v^3 + v^5)\,dv \\
&= -\int_0^1 (\frac{5}{4}u^2 + \frac{1}{6})\,du \\
&= -\frac{5}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Définition. Pour $U \subset \mathbb{R}^3$, soit $\omega = a\,dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(U)$ une 3-forme différentielle sur U et $D \subset U$ un ensemble compact. On appelle **intégrale de** ω **sur** D l'intégrale

$$\int_D \omega = \iiint_D a(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

4.8 Théorèmes de Stokes, Gauss-Ostrogradski et Green-Riemann

Définition. Une **hypersurface paramétrée de dimension** q **dans** $\mathbb{R}^n$ est un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ de la forme

$$S = \big\{ f(u_1, u_2, ..., u_q) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 \in I_1, ..., u_q \in I_q \big\},$$

où $f : I_1 \times \cdots \times I_q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la **paramétrisation** de S. Si les intervalles I_i sont fermés et f est de classe C^1 par morceaux, alors S est compacte.

Le **bord de** S, noté ∂S, est l'union des hypersurfaces de dimension $q-1$ paramétrées par la restriction de f aux extrèmes des intervalles I_i, pour chaque paramètre u_i, avec $i = 1, ..., q$. Par exemple, le bord d'un disque est le cercle qui l'entoure.

Une hypersurface S est **fermée** si son bord ∂S est vide. À son tour, le bord ∂S d'une surface est toujours fermé, c'est-à-dire que $\partial\big(\partial S\big) = \varnothing$.

Théorème. [**Stokes.**] *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface de dimension q, compacte et avec bord ∂S, et soit $d\omega$ une q-forme exacte sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant S. Alors on a:*

$$\int_S d\omega = \oint_{\partial S} \omega,$$

où le symbol $\oint$ indique un intégrale sur une hypersurface fermée.

Cas particuliers:

- Cas $n = 2$ et $q = 2$:

  Théorème. [**Green-Riemann.**] *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ une surface plane et compacte, et soit $\gamma = \partial S$ la courbe qui forme son bord. Alors pour toute 1-forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant S, on a:*

  $$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

- Cas $n = 3$ et $q = 2$:

  Théorème. [**Stokes-Ampère.**] *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte, et soit $\gamma = \partial S$ la courbe qui forme son bord. Alors pour toute 1-forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ contenant S, on a:*

  $$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

- Cas $n = 3$ et $q = 3$:

  Théorème. **[Gauss-Ostrogradski.]** *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble compact, et soit $S = \partial D$ la surface qui forme son bord. Alors pour toute 2-forme différentielle $\omega = P\,dx \wedge dy + Q\,dy \wedge dz + R\,dz \wedge dx$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ contenant D, on a:*

$$\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \oiint\limits_{S} P\,dx \wedge dy + Q\,dy \wedge dz + R\,dz \wedge dx.$$

Preuve. Idée de la preuve dans le cas plus simple (Green-Riemann, $n = 2$ et $q = 2$).

Considerons le cas d'une surface $S \subset \mathbb{R}^2$ plane et compacte qui est de la forme

$$S = \big\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c(x) \leqslant y \leqslant d(x)\big\},$$

avec bord $\partial S = \gamma \cup \delta$ où

$$\gamma = \big\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ y = c(x)\big\} \quad \text{et} \quad \delta = \big\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ y = d(x)\big\}.$$

La même surface peut aussi être décrite comme

$$S = \big\{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y)\big\},$$

avec bord $\partial S = \alpha \cup \beta$ où

$$\alpha = \big\{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ x = a(y)\big\} \quad \text{et} \quad \beta = \big\{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ x = b(y)\big\}.$$

Considerons une 1-forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant S. On a alors:

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint\limits_{S} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy &= \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \\ &= \int_c^d \big(Q(b(y), y) - Q(a(y), y)\big)\,dy \\ &= \int_\alpha Q(x, y)\,dy + \int_\beta Q(x, y)\big)\,dy = \oint\limits_{\partial S} Q(x, y)\,dy. \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_\gamma Q(x, y)\,dy - \int_\delta Q(x, y)\big)\,dy = -\oint\limits_{\partial S} P(x, y)\,dx.$$

Par conséquent, on a

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint\limits_{\partial S} Q(x, y)\,dy + \oint\limits_{\partial S} P(x, y)\,d = \oint\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy.$$

$\square$