Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – Vendredi 10 janvier 2014

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1 [**1 point**] – Écrire la différentielle de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{xy^3}$.

Exercice 2 [**3 points**] – Trouver les points critiques de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3y - 4xy$ et détérminer leur nature.

Exercice 3 [**3 points**] –

a) Calculer la circulation du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y) = 5xy\ \vec{i} - (x^3 + y)\ \vec{j}$$

le long de l'arc de courbe C^+ d'équation cartésienne $y = 1 - x^3$, pour $0 \leq x \leq 1$, orientée dans le sens allant du point $(0, 1)$ vers le point $(1, 0)$.

b) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe C^- précédente, mais orientée dans le sens opposé, de $(1, 0)$ vers $(0, 1)$.

Exercice 4 [**2 points**] – Calculer la circulation du champ de gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, où $f(x, y) = x^2y^3$, le long du segment de droite allant du point $(7, 1)$ au point $(5, 2)$.

Exercice 5 [**11 points**] – Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soient

D le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$;
S le tronc de cône d'équation $x^2 + y^2 = 4 - z$ avec $0 \leq z \leq 4$;

et soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\,\vec{i} + 3y\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}$.

a) [2 points] Calculer le volume de l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ délimité par les deux surfaces D et S.

b) [3 points] Le disque D^+ orienté par le vecteur normal pointant vers le bas admet la paramétrisation suivante :

$$\sigma(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \qquad \theta \in [0, 2\pi], \qquad \rho \in [0, 2].$$

En utilisant cette paramétrisation, calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers D^+.

c) [2 points] En utilisant la formule d'Ostrogradski, calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant de la surface fermée $\Sigma = D \cup S$.

d) [2 points] En utilisant b) et c), déduire le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant du cône S.

e) [2 points] En utilisant la formule de Stokes, calculer le flux du champ rotationnel $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V}$ sortant du cône S.