

Math2 - CC3 - 24 avril 2015

Num. étudiant :

NOM :

Prénom :

Université Claude Bernard Lyon 1

PCSI L1 - UE Math 2

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 3 - Vendredi 24 avril 2015

Règlement - L'épreuve dure 20 minutes. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso.

Exercice - Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - xy}$$

autour du point (0, 0).

Réponse -

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - xy}$$

$$f(0, 0) = 1 \quad (1 \text{ pt})$$

$$(2 \text{ pts}) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1-y}{(1-x-xy)^2} = \frac{1+y}{(1-x-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad (1 \text{ pt})$$

$$(2 \text{ pts}) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{-x}{(1-x-xy)^2} = \frac{x}{(1-x-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad (1 \text{ pt})$$

$$(2 \text{ pts}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{(1+y)}{(1-x-xy)^3} \cdot 2(1-x-xy) \cdot (-1-y) = \frac{2(1+y)^2}{(1-x-xy)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 \quad (1 \text{ pt})$$

$$(2 \text{ pts}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{(1-x-xy)^{-2} - x \cdot 2(1-x-xy)^{-3} \cdot (-1-y)}{(1-x-xy)^3} \\ = \frac{1-x-xy + 2x+2xy}{(1-x-xy)^3} = \frac{1+x+xy}{(1-x-xy)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \quad (1 \text{ pt})$$

$$(2 \text{ pts}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2x(-x)}{(1-x-xy)^3} = \frac{2x^2}{(1-x-xy)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \quad (1 \text{ pt})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x-xy} = 1 + x + x^2 + xy + o(x^2+y^2)$$

(4 pts)