1/ Math 2 - corrigé du CCS

math 2 - juin 2015

4pts

**exo 1** $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+y}$

en $(0,0)$

0,5 pt par ligne

$f(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\ln(1+x)}{(1+y)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(1+x)^2(1+y)}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{-1}{(1+x)(1+y)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2\ln(1+x)}{(1+y)^3}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

pour $(x,y)$ proche de $(0,0)$ $f(x,y) = 0 + 1(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}(-1)(x-0)^2 - 1(x-0)(y-0)$

1 pt formule $\longrightarrow$ $+ \frac{1}{2} \times 0 + o(x^2+y^2) = x - \dfrac{x^2}{2} - xy + o(x^2+y^2)$.

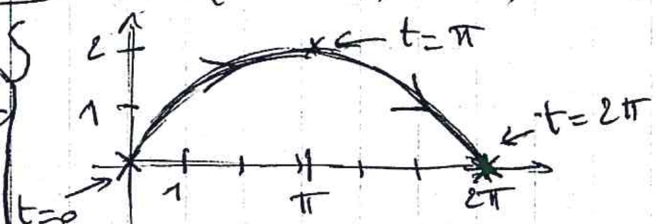
---

4pts

**exo 2** $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

| $t$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$ | $2$ | $0$ |

Bonus 1




1pt $\rightarrow$ $\vec{\gamma}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ $\qquad \vec{V}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{V}(\vec{\gamma}(t))\begin{pmatrix} t - \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix}$

1pt formule $\rightarrow$ $\displaystyle\int_{C^+} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{V}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \big(t - \sin t - t\cos t + \cos t \sin t - \sin t + \sin t \cos t\big)\, dt$

2pts calculs

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} \big(t - 2\sin t - \underbrace{t\cos t}_{\text{I.P.P.}} + 2\sin t \cos t\big)\, dt$

$\displaystyle = \left[\frac{t^2}{2} + 2\cos t - (t \sin t + \cos t) + \sin^2 t\right]_0^{2\pi}$

$\cos t$

$= 2\pi^2 + 1 - 1 = 2\pi^2$

(I.P.P.) $\displaystyle\int \underset{u}{t}\, \underset{v'}{\cos t}\, dt = [t \sin t] - \int \sin t\, dt$

2

3pts — exo 3

$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \times \frac{1}{r^2}\vec{e_r}$  $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \times \frac{1}{r}$ / $\vec{E}(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(r)$

- en physique -

Circulation sur $C^+$ allant de $A(5,0,0)$ à $B(0,5,0)$

~~C.R. $\int_{C^+} \vec{A}.\vec{dl} = f(Q) - f(P)$ ($\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ et $C^+$ va de P à Q)~~

2pts théorème

1pt calculs

ici $\int_{C^+} \vec{E}(r)\cdot\vec{dl} = -\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(r) = -(\phi(B) - \phi(A))$

or pour A on a $r_A = 5$ et pour B on a $r_B = 5$

donc $\int_{C^+} \vec{E}(r).\vec{dl} = -(5-5) = \boxed{0}$

---

6pts — exo 4

$\vec{V}(x,y,z) = z^2\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$  Flux de $\vec{V}$ à travers le paraboloïde $S = \left( f(u,v) = (\overset{x}{u}, \overset{y}{v}, \overset{z}{u^2v}),\ u,v \in [0,1] \right.$

1pt formule → Flux $\iint_{S^+} \vec{V}.\vec{dS} = \iint_{S^+} \vec{V}(f(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right) du\,dv$

$\frac{\partial f}{\partial u}\begin{pmatrix}1\\0\\v\end{pmatrix}$  $\frac{\partial f}{\partial v}\begin{pmatrix}0\\1\\u\end{pmatrix}$  $\vec{V}(f(u,v)) = \begin{pmatrix}u^2v^2\\-uv\\u\end{pmatrix}$  $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix}-v\\-u\\1\end{pmatrix}$

1pt   1pt

produit scalaire : $-u^2v^3 + u^2v + u$

3pts calculs →

$\iint_{S^+} \vec{V}.\vec{dS} = \int_0^1 dv \int_0^1 du\,(-u^2v^3 + u^2v + u) = \int_0^1 dv \left[-\frac{u^3v^3}{3} + \frac{u^3}{3}v + \frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=1}$

$= \int_0^1 \left(-\frac{v^3}{3} + \frac{v}{3} + \frac{1}{2}\right) dv = \left[-\frac{v^4}{4} + \frac{v^2}{6} + \frac{v}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{12}}$

---

3pts — exo 5

$\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu I}{2\pi} \times \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi}$ donc $\left| \begin{array}{l} A_\rho = 0 \\ A_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi} \times \frac{1}{\rho} \\ z = 0 \end{array} \right.$

La bouteille est une surface fermée donc on peut appliquer le th. de gauss :

1pt théorème → $\oiint_{S^+} \vec{B}.\vec{dS} = \iiint_\Omega \text{div}\,\vec{B}\,dx\,dy\,dz$  $\Omega$ = solide de bord $S^+$ et situé à l'intérieur de $S^+$

1pt calcul div → en coordonnées cylindriques : $\text{div}\,\vec{B} = 0 + \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + 0$

donc $\text{div}\,\vec{B} = \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu I}{2\pi} \times \frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \times 0 = 0$ donc $\iiint_\Omega \text{div}\,\vec{B}\,dx\,dy\,dz = 0$

1pt résultat → Le flux vaut $\boxed{0}$