TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

COURS ET EXERCICES

Semestre de printemps 2015

Thierry Fack

Professeur de mathématiques à Lyon 1

Sommaire

1 Avertissement

1.1 Une nouvelle organisation de l'unité TMB

Au semestre de printemps 2015, l'organisation de l'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » est modifiée à titre expérimental. Un nouveau mode d'organisation, proche de celui des universités anglo-saxonnes, est mis en place pour faciliter la transition du lycée à l'université.

Le volume horaire du cours est porté à 3h par semaine (pendant 12 semaines) alors que celui des travaux dirigés passe à 2h par semaine. L'allongement du cours doit permettre d'illustrer les notions enseignées en traitant des exercices élémentaires. La nouvelle organisation des travaux dirigés obligera les étudiants à travailler par eux-mêmes. Enfin, l'évaluation des connaissances se fera uniquement en travaux dirigés, même si le contrôle terminal demeure.

1.2 Les cours magistraux

Les cours intègreront désormais le traitement d'exemples ou d'exercices simples permettant de comprendre une définition ou d'illustrer une technique de calcul. Ils dresseront un panorama des résultats et techniques mathématiques à connaître, sans entrer dans de longs développements, en privilégiant le point de vue de l'utilisateur. Les étudiants se familiariseront ainsi avec les connaissances et les savoir-faire indispensables, qui ne seront pas répétés en travaux dirigés.

1.3 Les travaux dirigés

Ils seront l'occasion de mettre en application les connaissances acquises en cours. Chacun sera invité à résoudre, à son rythme propre, les exercices d'une fiche type. Les chargés de travaux dirigés seront là pour répondre aux questions de chaque étudiant, préciser un point mal compris ou vérifier la justesse d'une solution. C'est en dialoguant avec eux que chaque étudiant apprendra à s'organiser pour résoudre des exercices de façon autonome. Les travaux dirigés seront des temps de préparation intensive à la résolution d'exercices, sous la direction d'un enseignant. Cette manière d'apprendre à apprendre tout en résolvant des exercices choisis place ainsi le travail de chaque étudiant au cœur du dispositif d'apprentissage.

1.4 Le contrôle des connaissances

Pour lui donner un caractère véritablement continu, le contrôle des connaissances sera réalisé lors de chaque séance de travaux dirigés. Chaque étudiant sera invité à corriger des exercices résolus à la maison et à résoudre seul un exercice en fin de séance. Il pourra ainsi vérifier la bonne acquisition des savoir-faire utilisés.

Le contrôle continu terminal, nécessaire pour délivrer le diplôme, vérifiera la bonne acquisition des techniques apprises tout au long du semestre.

–

2 Les méthodes de travail

2.1 Réfléchir à ses méthodes de travail

Est-il nécessaire de réfléchir à ses méthodes de travail pour valider l'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » ? Oui, sans aucun doute, car les étudiants travaillent différemment en entrant à l'université.

Au lycée, les cours sont donnés en petits effectifs et le professeur passe du cours aux exercices en s'adaptant aux élèves qu'il a devant lui. À l'université, l'enseignement magistral est délivré en amphithéâtre et ne comporte que du cours. Si vous n'avez pas tout compris, vous poserez vos questions en travaux dirigés. Ces derniers n'ont toutefois pas vocation à reprendre le cours magistral ; ils sont consacrés à la résolution d'exercices et supposent la connaissance du cours.

Il vous faudra donc changer vos méthodes de travail pour assimiler le cours avant les séances de travaux dirigés et être actif lors de la recherche d'exercices. Votre efficacité en dépend.

2.2 Objectifs de cet enseignement

L'objectif principal de l'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » est d'introduire des notions mathématiques dont vous aurez besoin en physique, en mécanique ou en chimie. Cet objectif est très loin du bachotage que vous avez connu au lycée et auquel vous allez substituer un travail régulier pour décrocher un master dans cinq ans. Les notions au programme de l'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » sont :

- *Les nombres complexes*, intimement liés à la trigonométrie et qui sont utiles partout. En physique, ils interviennent notamment pour décrire les phénomènes ondulatoires ;

- *Les vecteurs de l'espace*, utilisés pour représenter les forces ou les vitesses, et qui permettent de traduire des questions de géométrie en calculs sur des coordonnées ;

- *Les fonctions d'une variable réelle*, utilisées pour décrire la dépendance d'une quantité vis à vis d'un paramètre. L'enseignement introduit plus spécifiquement le *calcul infinitésimal* de NEWTON et LEIBNITZ, qui joue un rôle important dans toutes les sciences. Ce calcul permet d'effectuer des passages à la limite, de dériver et d'intégrer les fonctions. Il est utile pour résoudre des équations différentielles, étudier les variations des fonctions ou analyser leur comportement au voisinage d'un point.

Toutes ces notions seront traitées sous l'angle du calcul, le but étant de maîtriser des outils mathématiques pour les utiliser. L'accent sera mis sur l'aptitude à se débrouiller convenablement dans un exercice calculatoire en faisant preuve d'intelligence et de méthode. L'enseignement de « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » n'a donc pas pour objet de tester une fois de plus votre valeur en mathématiques, mais de vous apprendre à vous servir correctement d'outils mathématiques indispensables.

Un autre objectif de cet enseignement est de vous aider à vous organiser dans votre travail pour acquérir plus d'autonomie, de créativité, d'esprit de responsabilité. Ces qualités vous serviront dans vos études, mais aussi dans votre future vie professionnelle. Ainsi, développer une écoute attentive à un discours, apprendre à réaliser une synthèse de notes de cours, à travailler en groupe, à être rigoureux, à exposer clairement une idée, à se fixer une discipline de travail, à ménager des moments de pause, à s'autoévaluer, à réfléchir sur ses faiblesses, à utiliser au mieux ses connaissances, à contourner une difficulté, à se fixer des objectifs réalistes, à se faire aider, à prendre du recul par rapport à son travail, etc. sont autant de savoir-faire que vous aurez l'occasion de développer en travaux dirigés.

2.3 Étudier le cours

Tous les enseignants insistent sur la nécessité d'étudier le cours. Mais comment procéder ? Est-il même besoin de « travailler » un cours ?

Tout d'abord, soulignons qu'il importe de « suivre » le cours avec attention. Le pédagogue ANTOINE DE LA GARANDERIE parle à ce propos de *geste d'attention*. Une écoute attentive devrait vous permettre de résumer en moins de cinq minutes un cours auquel vous venez d'assister.

Ensuite, il est crucial de « travailler » le cours de manière active. En effet, pour résoudre des exercices, il importe de connaître les théorèmes ainsi que les démonstrations qui ont valeur de méthode (comme par exemple la résolution d'une équation du second degré). Un *travail par couches* (étude du plan, des définitions, des théorèmes, des exemples et de quelques démonstrations), avec une feuille et un crayon, est recommandé. En revanche, il est inutile de passer des heures sur un cours, surtout sans faire d'exercices. C'est du temps perdu car un cours magistral, aussi brillant soit-il, n'est jamais qu'un catalogue de moyens pour résoudre des exercices. Il est rarement utilisable en l'état et n'a finalement aucune fin en soi.

Il importe plutôt d'apprendre son cours de façon dynamique, en dressant une liste structurée de méthodes directement applicables aux exercices. Les cours magistraux, conçus comme des « cours orientés exercices », vous aideront à concevoir une telle liste, courte et résolument synthétique. La réalisation de *fiches et de résumés* doit être le but recherché en « repassant » votre cours.

Pour y parvenir, il vous faudra comprendre votre propre mode de fonctionnement car il n'y a pas de méthode de travail universelle. Certains ont besoin de réentendre (dans leur tête) les explications données par le professeur, d'autres ont besoin d'une feuille et d'un crayon pour réécrire les idées les plus importantes, d'autres encore ont « photographié » le tableau et ont besoin de faire de même avec les pages du polycopié. C'est en réfléchissant sur votre propre mode de fonctionnement que vous serez capables de « revoir » le cours par vous-même, de mémoriser les éléments qui vous semblent importants et de dresser la liste structurée de méthodes que vous pourrez réutiliser plus tard. Les exercices d'application directe du cours inclus dans le présent livret vous aideront à vérifier la bonne compréhension des notions étudiées.

Vous constaterez vite que « travailler » un cours présente de nombreux avantages. Cela vous permet de suivre avec profit les travaux dirigés, de mieux comprendre les cours qui suivent et de travailler plus régulièrement. Mais il faut savoir fermer ses notes de cours après le cours et juste avant le cours suivant pour *apprendre à travailler en « feed-back »*.

2.4 Travailler durant les travaux dirigés

Les exercices proposés en travaux dirigés sont l'occasion d'utiliser et d'approfondir le cours. Certains exercices sont à préparer en avance, d'autres vous sont proposés en séance. Il est important d'être actif, de chercher des pistes pour démarrer, de mettre en œuvre vos propres connaissances. Si vos pistes de recherche ne sont pas bonnes, l'enseignant pourra vous aider ; cette démarche d'essais est commune et propre aux

sciences. Si vous avez l'impression que le rythme est trop rapide, n'hésitez pas à revoir chez vous les exercices traités afin d'identifier la démarche utilisée.
Les enseignants interviennent pour donner des conseils ou aider les étudiants à s'organiser et à mettre correctement en œuvre les techniques apprises en séance. C'est lorsque qu'un étudiant travaille à la résolution d'un exercice que les enseignants peuvent apporter une aide réellement efficace. Ce système, assez proche de celui des lycées et des universités anglo-saxonnes, implique une participation active et continue des étudiants. Il correspond bien aux objectifs de l'unité d'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE ».

2.5 Apprendre à résoudre des exercices

Pour s'assurer qu'une technique mathématique est bien maîtrisée, le mieux est de résoudre des exercices type. A cet effet, il faut être capable :

- D'analyser l'exercice pour comprendre ce qui est demandé ;
- De s'organiser pour décider ce que l'on va faire afin de ramener la résolution de l'exercice à une question connue ;
- De réaliser le programme imaginé en appliquant correctement les techniques apprises ;
- De pouvoir repartir dans une autre direction si le programme imaginé échoue ;
- De vérifier, en conclusion, si la réponse fournie est raisonnable et si les hypothèses ont bien toutes été utilisées.

Lorsque vous vous lancez dans la résolution d'un exercice, vous commencez par faire le tour des méthodes à votre disposition. A cet effet, une liste de méthodes dressée en étudiant le cours (apprise ou non par cœur) est très utile. Elle permet d'orienter votre recherche mais aussi, en cas d'impasse, de disposer de méthodes alternatives pour rebondir.
Le plus difficile reste cependant « *d'avoir une idée* » pour démarrer l'exercice, même lorsque celui-ci est construit sur des questions enchaînées constituant autant d'indications précieuses. Cette difficulté est toutefois moindre si l'exercice posé est très court et porte - afin d'en réduire le caractère abrupt - sur un sujet bien délimité qui vient d'être vu. Dans l'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE », le choix a été fait de ne poser que des exercices très courts, à la fin de chaque séance de travaux dirigés. Les étudiants peuvent ainsi prendre à l'avance la me-

sure du sujet et s'entraîner à résoudre par eux-mêmes des exercices du même type. En échange, l'enseignant s'attend à ce que chaque étudiant soit à même de résoudre vite et bien l'exercice test de fin de séance. L'incapacité de s'acquitter honnêtement de cette « formalité » conduira à s'interroger sur un manque de travail ou d'organisation.
Il est inutile de multiplier les exercices, sauf s'il s'agit d'acquérir une habileté (comme le calcul des dérivées) qui nécessite une certaine pratique. Pour chaque chapitre, une liste d'exercices classiques est proposée ; il suffit d'être capable de les résoudre pour valider l'enseignement. Mais chaque exercice doit être compris « à fond », en repérant les erreurs commises et qui devront être éliminées. Ceci demande un minimum de rigueur et ne peut s'accommoder d'un absentéisme chronique.
Cette méthode, assez proche de celle des lycées et qui domine dans les universités anglo-saxonnes, répond parfaitement aux objectifs de l'unité d'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE ». Elle est basée sur une participation active et continue des étudiants et donne de bons résultats.

2.6 S'adapter au contrôle continu

Le contrôle des connaissances dans l'unité d'enseignement « TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE » ne comporte plus d'examen au sens où l'entend PAUL VALÉRY[1]: « *Les examens sont des exercices de volonté. En cela ils sont beaux et bons (…). L'épreuve de l'examen est utile et juste, et en dépit de faciles déclamations, celui qui ne l'a point surmontée n'en surmontera aucune autre.* » L'étudiant doit en revanche réussir les brefs contrôles organisés à la fin de chaque séance de travaux dirigés. L'examen terminal, qui vérifie la sédimentation des connaissances acquises tout au long du semestre, est lui-même composé de petits exercices semblables à ceux posés en travaux dirigés. Chacun devra prendre en compte ce nouveau mode de fonctionnement ; attendre la fin du semestre pour fournir un effort n'a plus de sens car l'évaluation est réalisée « en continu » lors de chaque séance de travaux dirigés.

—

[1] In *Variété III.*

3 Nombres complexes

3.1 Le corps des nombres complexes

3.1.1 DES NOMBRES « IMPOSSIBLES »

Les nombres complexes ont été introduits à la Renaissance pour résoudre les équations du troisième degré. Objet de scepticisme et qualifiés d'« impossibles » par certains mathématiciens, ils étendent les nombres réels par adjonction d'une racine carrée « imaginaire » $i=\sqrt{-1}$ de -1. Au XIX[e] siècle, Gauss leur donne une réalité en les représentant géométriquement comme points du plan et en définissant rigoureusement leur somme et leur produit. On les utilise depuis dans de nombreux domaines des mathématiques. Ils constituent le cadre naturel de la théorie des équations algébriques du fait qu'ils contiennent les racines de tout polynôme à coefficients réels ou complexes.

3.1.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Les *nombres complexes* sont des expressions de la forme

$$z=x+iy$$

où x,y sont des nombres réels et i un nombre *imaginaire* de carré égal à -1. Cette écriture de z est unique ; on dit que $x=\operatorname{Re}z$ est la *partie réelle* de z et que $y=\operatorname{Im}z$ est sa *partie imaginaire*. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble de ces nombres complexes. Ceux de la forme $x+i0$ sont dits *réels* et ceux qui s'écrivent $0+iy$ sont appelés *imaginaires purs*. Le nombre complexe $\overline{z}=x-iy$ s'appelle *le complexe conjugué* de z et le nombre $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ est appelé le *module* de z.

EXEMPLE. Le nombre complexe $z=\sqrt{2}-i$ a pour partie réelle $\operatorname{Re}z=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, pour partie imaginaire $\operatorname{Im}z=-1\in\mathbb{R}$, pour conjugué $\overline{z}=\sqrt{2}+i$ et pour module $|z|=\sqrt{3}$. ■

3.1.3 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ s'additionnent et se multiplient au moyen des règles suivantes, fixées par EULER :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$
$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \ .$$

En particulier, $i^2 = -1$. On pose $x = x + i0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; le nombre complexe $0 = 0 + i0$ est encore appelé le zéro car il vérifie $z + 0 = 0 + z = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Formellement, les règles algébriques de calcul sur les nombres complexes sont les mêmes que celles sur les nombres réels. Elles dotent l'ensemble des nombres complexes d'une structure de corps. Par exemple, on a les identités remarquables suivantes :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \text{ et } (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2 \ .$$

EXEMPLE. *Soit à calculer la somme et le produit de $z = 1 + i$ et $z' = 2 - i$, ainsi que le carré de z.*

On a $z + z' = 3 + i0 = 3$ et $z\,z' = 3 + i$. Le carré de z est donné par : $z^2 = (1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$. ■

Quotients de nombres complexes. Le quotient $\dfrac{z}{z'}$ de deux nombres complexes z et z' est défini lorsque $z' \neq 0$; c'est le nombre complexe donné par :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\,\overline{z'}}{|z'|^2} = \frac{xx' + yy' + i(-xy' + x'y)}{x'^2 + y'^2} \ .$$

EXEMPLE. L'inverse de $1 + i$ est : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$. ■

3.2 Représentation géométrique des complexes

3.2.1 LE PLAN COMPLEXE

Rapportons le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tout point M du plan est entièrement déterminé par ses coordonnées cartésiennes x et y, qui sont définies par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \ .$$

On note $M(x, y)$ le point de coordonnées x et y. $M(x, y)$ le point de coordonnées x et y.

Tout point $M(x,y)$ du plan détermine un unique nombre complexe $z = x + iy$ appelé *l'affixe* de M .

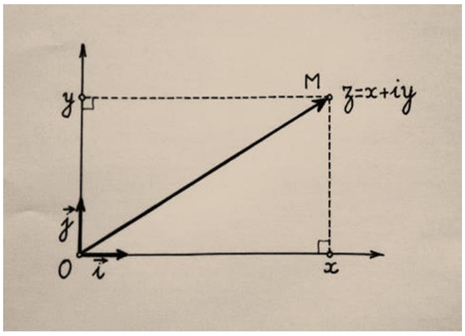


Figure 1

Inversement, tout nombre complexe $z = x + iy$ est l'affixe d'un unique point $M(x,y)$ appelé *l'image* de z . La correspondance :

$$M \leftrightarrow z = x + iy$$

permet d'identifier les points du plan aux nombres complexes. Le nombre imaginaire i correspond ainsi au point $M(0,1)$.

Si $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur, l'affixe $z = x + iy$ de l'unique point M tel que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ est appelée par extension *l'affixe du vecteur* $\vec{V}$. La correspondance $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} \leftrightarrow z = x + iy$ permet d'identifier les vecteurs du plan aux nombres complexes.

On notera que, si A est un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. L'affixe du milieu I du segment $[A,B]$ est la demi-somme des affixes des points A et B. La distance entre A et B est donnée par $AB = |z_B - z_A|$.

EXEMPLE. *Déterminer les affixes des points* $A(1,2)$ *et* $B(2,3)$ *du plan, l'affixe du milieu du segment* $[A,B]$, *l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *et la distance de* A *à* B.

Les points $A(1,2)$ et $B(2,3)$ du plan ont pour affixes respectives $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 2 + 3i$. Le milieu du segment $[A,B]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A = 1 + i$ et la distance de A à B est $AB = |1 + i| = \sqrt{2}$. ■

3.2.2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE DES COMPLEXES

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe d'image M . Notons $r = OM$ la distance de O à M et, pour $O \neq M$, soit

$$\theta = angle\,(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = arctg\,\frac{y}{x}$$

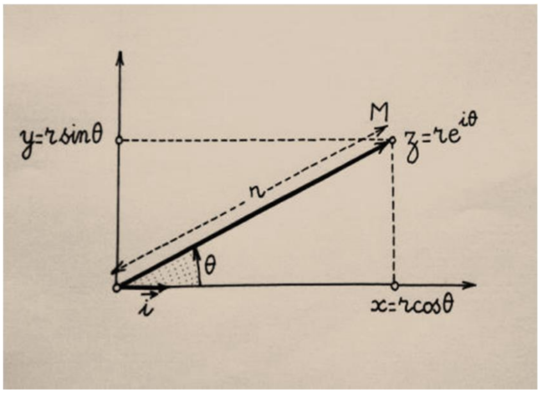


Figure 2

une détermination (définie à l'addition d'un multiple entier de 2π) de l'angle orienté des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$. On dit que $\theta = \arg z$ est un *argument* de z. On a :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et}$$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

d'où la *forme trigonométrique* du nombre complexe $z \neq 0$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ .$$

Définissons *l'exponentielle complexe* en posant :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.$$

La forme trigonométrique s'écrit alors :

$$z = re^{i\theta}\,.$$

EXEMPLE. *Soit à déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z = 1 + i$.*

Ce nombre complexe a pour module $|z| = \sqrt{2}$. On a donc :

$$z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}},$$

d'où la forme trigonométrique de z . ■

3.2.3 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT

Des formules d'addition des sinus et cosinus, on déduit facilement que l'on a (formule d'EULER) :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a alors $z\,z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, ce qui s'écrit encore :

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \text{ et } \arg(z\,z') = \arg z + \arg z' \quad (\text{mod } 2\pi)\,.$$

THÉORÈME. *Le module du produit de deux nombres complexes est le produit des modules ; l'argument du produit de ces nombres est la somme de leurs arguments (modulo 2π).*

En particulier, on a (formule de MOIVRE) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,,$$

$$|z^n| = |z|^n \text{ et } \arg(z^n) = n\arg z \,(\text{mod } 2\pi) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Si z et z' sont non nuls, on a également :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\ ,\ \arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad (\text{mod } 2\pi)\,.$$

EXEMPLE. *Soit à calculer* $(1+i)^4$.

On utilise la forme trigonométrique $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où l'on tire, compte tenu de la formule de MOIVRE :

$$(1+i)^4 = 4e^{i\pi} = -4\,.\ \blacksquare$$

3.3 Polynômes et nombres complexes

3.3.1 RACINES *N*-IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

On appelle *racine* n *– ième* (n entier ≥ 2) d'un nombre complexe z tout nombre complexe u tel que $u^n = z$.

THÉORÈME. *Tout nombre complexe possède des racines n – ièmes dans l'ensemble des nombres complexes.*

Si $z = 0$, alors $u = 0$ est l'unique racine n – ième de z. Si $z = re^{i\theta}$ est non nul, il admet n racines n – ièmes distinctes u_k ($k = 0,1,\ldots,n-1$) données par les formules suivantes :

$$u_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = u_o\omega^k \quad \text{où } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}\,.$$

EXEMPLE. *Déterminer les racines carrées de* i.

Puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, ses racines carrées sont les nombres complexes $u_o = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $u_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}}$. Mais $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ de sorte que les racines carrées de i sont finalement $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. $\blacksquare$

3.3.2 ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Une *équation du second degré à coefficients complexes* est une équation de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0$$

où a,b,c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$. L'inconnue est ici le nombre complexe z ; les solutions de cette équation sont appelées les *racines* du trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$. La résolution de ce type d'équations est une question importante en pratique ; elle a d'ailleurs conduit à introduire les nombres complexes. On résout une telle équation en utilisant la *forme canonique* du trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$, qui s'écrit :

$$P(z) = az^2 + bz + c = a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$. Le nombre complexe Δ est appelé le *discriminant* du trinôme P ; il admet toujours des racines carrées complexes. L'équation $P(z) = 0$ équivaut à la relation :

$$\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2,$$

d'où l'on déduit les formules de résolution suivantes :

THÉORÈME. *L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes a,b,c (avec $a \neq 0$) admet toujours deux racines complexes distinctes ou confondues données par les formules :*

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où $\sqrt{\Delta}$ désigne une racine carrée complexe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$. On a en outre la factorisation canonique :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Enfin, si les coefficients a,b,c sont réels, les racines z_1 et z_2 sont toutes deux réelles (si $\Delta \geq 0$) ou bien sont complexes conjuguées (si $\Delta < 0$).

EXEMPLE. *Soit à déterminer les racines de l'équation du second degré $z^2 + 2z + 2 = 0$.*

Le discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ de cette équation est négatif, de sorte que cette équation ne possède pas de racine réelle. Comme $\Delta = -4 = (2i)^2$, une racine complexe de Δ est $\sqrt{\Delta} = 2i$. D'après ce qui précède, les racines de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i, \quad z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i.$$

On vérifie qu'elles sont complexes conjuguées et que l'on a la factorisation :

$$z^2+2z+2=(z+1-i)(z+1+i)\,. \blacksquare$$

3.3.3 THÉORÈME DE D'ALEMBERT - GAUSS

On appelle *racine* d'un polynôme $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_o$ à coefficients complexes tout nombre complexe z tel que $P(z)=0$. On montre que z est une racine de P si et seulement si P se factorise sous la forme $P(X)=(X-z)P_1(X)$, où P_1 est un polynôme à coefficients complexes. Il existe alors $m>0$ tel que $P(X)=(X-z)^mQ(X)$, où le polynôme Q vérifie $Q(z)\neq 0$; on dit que m est la *multiplicité* de la racine z.

THÉORÈME (D'ALEMBERT - GAUSS). *Tout polynôme non constant à coefficients complexes $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_o$ ($a_n\neq 0$) possède n racines complexes $z_1,\ldots,z_n$ distinctes ou confondues et se factorise sous la forme :*

$$P(X)=a_n(X-z_1)\ldots(X-z_n)\,.$$

En regroupant les racines de P qui sont égales, on obtient encore la factorisation :

$$P(X)=a_n(X-z_1)^{m_1}\ldots(X-z_k)^{m_k}\,,$$

où $z_1,\ldots,z_k$ ($1\leq k\leq n$) sont les k racines distinctes de P et où m_i désigne la multiplicité de z_i.
Si les coefficients du polynôme P sont réels, on montre que les racines de P sont réelles ou bien deux à deux complexes conjuguées. Si on note $z_1,\ldots,z_p$ ses racines réelles et $z_{p+1},\overline{z_{p+1}},z_{p+2},\overline{z_{p+2}},\ldots,z_q,\overline{z_q}$ ses racines complexes deux à deux conjuguées, on obtient alors la décomposition :

$$P(X)=a_n(X-z_1)^{m_1}\ldots(X-z_p)^{m_p}\left((X-z_{p+1})(X-\overline{z_{p+1}})\right)^{m_{p+1}}\ldots\left((X-z_q)(X-\overline{z_q})\right)^{m_q}.$$

Dans cette décomposition, $(X-z_j)(X-\overline{z_j})=X^2+b_jX+c_j$ ($p+1\leq j\leq q$) est un polynôme de degré deux à coefficients réels et à discriminant négatif. La factorisation :

$$P(X)=a_n(X-z_1)^{m_1}\ldots(X-z_p)^{m_p}\left(X^2+b_{p+1}X+c_{p+1}\right)^{m_{p+1}}\ldots\left(X^2+b_qX+c_q\right)^{m_q}$$

est appelée *décomposition canonique de P en facteurs irréductibles* sur le corps des réels.

EXEMPLE. *Soit à factoriser le polynôme :*

$$P(z)=z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i$$

sachant qu'il admet une racine réelle.

Une racine réelle x de ce polynôme doit vérifier la relation $x^3+x^2-6x=0$, d'où $x=0$ ou bien $x^2+x-6=0$. Les racines du polynôme $x^2+x-6=0$ sont $x=2$ et $x=3$; on vérifie que $x=2$ est une racine réelle de P. On a alors :

$$P(z)=(z-2)\left[z^2+3(1-i)z-5i\right].$$

Le discriminant de $Q(z)=z^2+3(1-i)z-5i$ est $\Delta=2i=(1+i)^2$ de sorte que ses racines sont $z_1=2i-1$ et $z_2=i-2$. Il s'ensuit que $Q(z)=(z+1-2i)(z+2-i)$ d'où il résulte que la décomposition de P en facteurs irréductibles est :

$$\mathrm{P}(z)=(z-2)(z+1-2i)(z+2-i)\,. \ ■$$

3.4 Exercices

3.4.1 Calculs algébriques sur les nombres complexes

Simplifier l'écriture des nombres complexes suivants en les mettant sous la forme $a+ib$ et calculer leur module :

a) $(1+3i)\overline{(7-i)}$, b) $\dfrac{1+2i}{2+i}$, c) $(2+3i)^3$, d) $e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3.4.2 Mise sous forme trigonométrique

Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique :

a) $-1-i$, b) $-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$, c) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, d) $(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.4.3 Calcul de sommes de cosinus

1. Montrer que, si z est un nombre complexe distinct de 1, on a :

$$1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1} \quad \text{pour tout entier } n\geq 1 .$$

2. En utilisant la question 1, calculer $S=1+\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{2\pi}{6}+\ldots+\cos\dfrac{5\pi}{6}$.

3.4.4 Racines carrées de nombres complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$, de deux manières différentes, l'équation :

$$z^2=\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2} .$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

3.4.5 Racines cubiques de nombres complexes

Déterminer les racines cubiques de $1+i$.

3.4.6 Représentation de nombres complexes par des points du plan

Placer les nombres complexes suivants dans un plan muni d'un repère orthonormé :

$$\text{a) } 2i\,,\quad \text{b) } 2-i\,,\quad \text{c) } e^{\frac{2i\pi}{3}}\,,\quad \text{d) } 1-ie^{i\frac{\pi}{3}}\,,\quad \text{e) } \frac{1}{1+i}\,.$$

3.4.7 Applications géométriques des nombres complexes

On considère les points A, B, C, D, E du plan d'affixes respectives :

$$a=2+2i\,,\ b=-\sqrt{3}+i\,,\ c=1+i\sqrt{3}\,,\ d=-1+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\ e=-1+(2+\sqrt{3})i\,.$$

1. Montrer que les points A,B,C sont alignés.

2. Montrer que les points B,C appartiennent à un même cercle de centre E. Le point D appartient-t-il à ce cercle ?

3.4.8 Nombres complexes et lieux géométriques

Déterminer la nature géométrique des sous-ensembles suivants du plan complexe et tracer ces sous-ensembles :

a) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z\bar{z}=4\right\}$, b) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z+\bar{z}=1\right\}$,

c) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, |z-2|=|z+i|\right\}$, d) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, \arg(z-i)=\frac{\pi}{4}\right\}$,

e) $\left\{z\in\mathbb{C}-\{1\}\,\middle|\, Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=0\right\}$, f) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, |iz-5|<4\right\}$.

3.4.9 Résolution des équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

3.4.10 Factorisation des polynômes.

Montrer que le polynôme $P(z)=z^3-z^2+4z-4$ possède une racine réelle évidente et factoriser P sur le corps des complexes.

3.5 Exercices à traiter en travaux dirigés

3.5.1 Exercice 1.

Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$z=\left(\frac{-4i+4}{\sqrt{3}+i}\right)^3.$$

Dans le plan, placer le point M image de ce nombre complexe.

3.5.2 Exercice 2.

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $(z^2 - 3z + 5) \in \mathbb{R}$; b) $|z-2i| \leq 9$; c) $2Re(z) + Re(2-3z) \leq 1$;

d) $|z^3 - 5z^{-8}| \leq -1$; e) $\left|\dfrac{z^2-4z}{z+2}\right| < |3z|$; f) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z-1+i}\right) \geq 1$.

3.5.3 Exercice 3.

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant :

$$z = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)^4 \left(-\sqrt{3} + 3i\right).$$

3.5.4 Exercice 4.

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) $\dfrac{2z-i}{iz+2-3i}$ soit un nombre réel ; b) $\left|\dfrac{z-5i}{z-3+i}\right| = 1$;

c) $\dfrac{iz^2}{z+1}$ soit un nombre imaginaire ; d) $|z-(2+i)|^2 + |z-4|^2 = 5$.

3.5.5 Exercice 5.

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1) Montrer que : $\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right) - 1 = 0$.

2) En déduire la valeur de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$.

3.5.6 Exercice 6.

1) Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les racines cubiques du nombre complexe i et placer l'image de chacune dans le plan.

2) Montrer que la somme de ces racines est nulle.

3.5.7 Exercice 7.

1) Déterminer les racines carrées de chaque nombre complexe :

a) $z = 24 + 70\,i$; b) $z = 2 - 2\,i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + (4 + 2i)z + 6 + 8i = 0$;

b) $2i\,z^2 + (9 - i)z - 11 - 7i = 0$.

3.5.8 Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 5 = 0$; b) $z^2 + 2z + 3 = 0$; c) $z^2 + 2i\,z + 3 = 0$.

3.5.9 Exercice 9.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + 4 = 0$.

2. En déduire une factorisation du polynôme $P(X) = X^4 + 4$ en un produit de deux polynômes réels non constants.

3.5.10 Exercice 10.

Sachant qu'elle admet une racine réelle entière, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 2i\,z^2 + 5i\,z + 1 + 7i = 0 .$$

3.5.11 Exercice 11.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 2 + 6i$; b) $z^3 + 8i = 0$;

c) $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$, sachant que cette équation admet une solution imaginaire de module entier ;

d) $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$; e) $z^{2n} - 2z^n \sin(t) + 1 = 0$ où n est un entier ≥ 2.

—

4 Géométrie euclidienne

4.1 Vecteurs de l'espace

4.1.1 GÉOMÉTRIE, ALGÈBRE ET SCIENCES DE LA NATURE

Conçue comme un système formel basé sur des axiomes, la géométrie d'Euclide est la première description mathématique de notre monde sensible. Elle constitue le cadre « naturel » de la mécanique newtonienne. Au-delà de ce cadre, les questions posées par la géométrie d'Euclide ont conduit à d'autres géométries (non nécessairement euclidiennes) comme celle de Riemann. La relativité générale et la théorie des champs reposent sur ces nouvelles géométries, qui participent ainsi aux progrès de la technologie[2].

Les objets de la géométrie d'Euclide sont purement abstraits : ce sont des points, des droites, des plans, des triangles, des figures, etc. Pour pouvoir opérer sur ces objets, Descartes a imaginé de représenter les points de l'espace par des coordonnées, c'est à dire par des triplets de nombres réels. Ce point de vue a permis d'introduire les méthodes algébriques en géométrie. Nous montrons dans ce chapitre comment des questions élémentaires sur la position de droites et de plans dans l'espace peuvent être résolues en utilisant le point de vue « vectoriel » de l'algèbre linéaire.

4.1.2 LES VECTEURS EN GÉOMÉTRIE

On appelle *vecteur lié* de l'espace ordinaire un couple ordonné (A,B) de deux points. Le point A est appelé *l'origine* du vecteur et B son *extrémité.* La *norme* du vecteur lié (A,B) est par définition la distance $d(A,B)=AB$ entre les points A et B. Lorsque cette norme n'est pas nulle, on définit :

---

[2] Par exemple, la relativité générale a permis d'affiner le système de positionnement GPS par satellite.

- La *direction* $\Delta_{A,B}$ du vecteur lié (A,B), qui est celle commune à toutes les droites parallèles[3] à la droite passant par A et B ;
- Le *sens* $o_{A,B}$ du vecteur lié (A,B), c'est à dire le sens de parcours de la droite AB de A vers B. Ce sens oriente toutes les droites parallèles à la droite AB.

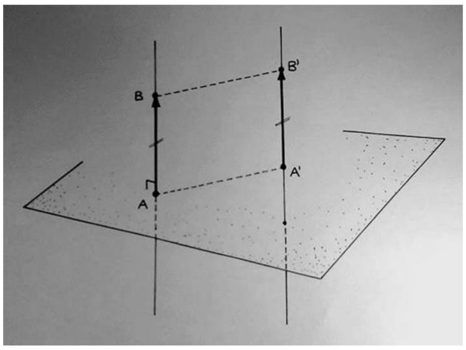


Figure 3

Deux vecteurs liés (A,B) et (A',B') sont dits *équipollents* s'ils ont même norme et, lorsque cette dernière est non nulle, même direction et même sens.
Un *vecteur* de l'espace est par définition une classe d'équipollence de vecteurs liés, c'est-à-dire l'ensemble tous les vecteurs équipollents à un vecteur lié donné. La classe d'équipollence de (A,B) est notée $\overrightarrow{AB}$; c'est le « vecteur libre » obtenu en identifiant tous les vecteurs liés équipollents à (A,B) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow (A,B) \text{ et } (A',B') \text{ sont équipollents.}$$

Comme deux vecteurs liés équipollents ont même norme, même direction, même sens (ils ne diffèrent que par leur origine), on peut parler de la norme :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = distance\ de\ A\ à\ B$$

du vecteur $\overrightarrow{AB}$, de sa direction $\Delta_{\overrightarrow{AB}}$ et de son sens $o_{\overrightarrow{AB}}$. Tout vecteur non nul est entièrement caractérisé par sa norme, sa direction et son sens. Les vecteurs de l'espace seront désignés dans ce chapitre par des lettres majuscules surmontées d'une flèche : $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{U}, \vec{V}$ etc. On a clairement $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ quels que soient les points A et B ; la classe d'équivalence de ce vecteur est appelé le *vecteur nul* et notée $\vec{0}$.

---

[3] Deux droites de l'espace sont dites parallèles si elles sont dans un même plan et parallèles dans ce plan.

Les vecteurs en physique. En physique, les forces sont représentées par des vecteurs. Par exemple, la force gravitationnelle exercée sur une masse ponctuelle m_A située au point A par une masse ponctuelle m_B située en B est $\vec{F} = -g\dfrac{m_A m_B}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^3}\overrightarrow{AB}$, où $g = 6{,}672\times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. La position d'un point, sa vitesse et son accélération, sont également des vecteurs.

Représentation des points par des vecteurs. Lorsqu'une origine O est fixée, tout vecteur $\vec{X}$ se représente sous la forme $\vec{X} = \overrightarrow{OM}$ où M est un point de l'espace uniquement déterminé par $\vec{X}$. L'application :

$$M \to \vec{X} = \overrightarrow{OM}$$

est une bijection qui permet d'identifier les points aux vecteurs de l'espace.

4.1.3 SOMME DE DEUX VECTEURS. PRODUIT PAR UN RÉEL

Somme de deux vecteurs. La règle de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

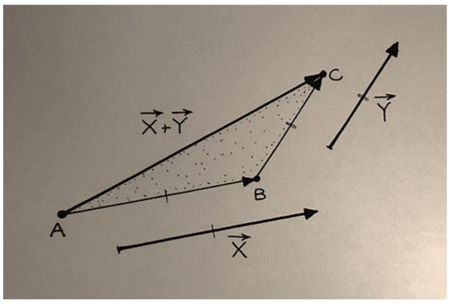


Figure 4

permet d'additionner deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de l'espace. En effet, un point A étant fixé on écrit $\vec{X} = \overrightarrow{AB}$, puis $\vec{Y} = \overrightarrow{BC}$, et on vérifie que le vecteur

$$\vec{X} + \vec{Y} = \overrightarrow{AC}$$

ne dépend pas du point A choisi.

EXEMPLE. *Soit à montrer que l'on a:* $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$.

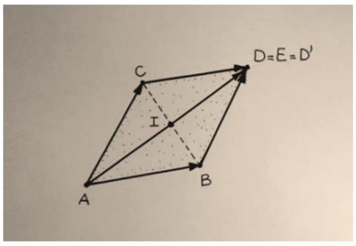


Figure 5

Fixons un point A et écrivons $\vec{X} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{Y} = \overrightarrow{AC}$. Soient D et D' les points définis par $\vec{Y} = \overrightarrow{BD}$ et $\vec{X} = \overrightarrow{CD'}$; on a :

$$\vec{X} + \vec{Y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\vec{Y} + \vec{X} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'},$$

de sorte qu'il suffit de prouver que $D = D'$. À cet effet, on se ramène facilement au cas où les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont non nuls et de directions distinctes. Soit alors E le symétrique (dans le plan ABC) du point A par rapport au milieu I du segment BC. Comme (B,D) est équipollent à (A,C) et que $ABEC$ est un parallélogramme, le point D est nécessairement égal à E. De même, $D' = E$ et $D = D'$. ■

En physique, la somme $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F_n}$ des forces qui s'appliquent à un point matériel est appelée la *résultante* des forces extérieures. Le « parallélogramme des forces » permet de déterminer graphiquement cette somme.

Opposé d'un vecteur. L'opposé $-\vec{X}$ d'un vecteur est défini par la formule $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

EXEMPLE. *Soit à montrer que l'on a, pour tout vecteur* $\vec{X}$ *:* $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$ *et* $\vec{X} + (-\vec{X}) = \vec{0}$.

Fixons un point A et écrivons $\vec{X} = \overrightarrow{AM}$. On a :

$$\vec{X} + \vec{0} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{AM} = \vec{X} \text{ et } \vec{X} + (-\vec{X}) = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0},$$

d'où les relations indiquées. ■

Produit d'un vecteur par un nombre réel. Le produit d'un vecteur $\vec{X} = \overrightarrow{AB}$ par un réel $\lambda \geq 0$ est par définition le vecteur $\lambda\vec{X} = \overrightarrow{AC}$, où C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport λ. Pour $\lambda < 0$, on définit $\lambda\vec{X}$ par :

$$\lambda\vec{X} = -|\lambda|\vec{X}.$$

On a $0.\vec{X} = \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Si $\lambda \neq 0$ et $\vec{X} \neq \vec{0}$, le vecteur $\lambda\vec{X}$ a pour norme $\|\lambda\vec{X}\| = |\lambda| \|\vec{X}\|$; il a même direction que $\vec{X}$ et même sens que $\vec{X}$ (ou sens opposé) selon que $\lambda > 0$ (ou $\lambda < 0$).

Vecteurs colinéaires. On dit que deux vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ sont *colinéaires* si l'un d'eux est produit de l'autre par un nombre réel. Deux vecteurs dont l'un est nul sont toujours colinéaires.

Combinaisons linéaires de vecteurs. On appelle *combinaison linéaire* de n vecteurs $\vec{X_1}, \vec{X_2}, ..., \vec{X_n}$ de l'espace tout vecteur de la forme

$$\vec{X} = \lambda_1\vec{X_1} + \lambda_2\vec{X_2} + ... + \lambda_n\vec{X_n}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des réels.

EXEMPLE. *Soient* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *n points de l'espace et* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *n réels tels que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$ *. Montrer qu'il existe un unique point* G *de l'espace tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} .$$

(On dit que le point G *est le* barycentre des points $M_1, M_2, \dots, M_n$ affectés respectivement des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *.)*

Posons $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ et fixons un point A. Si le point G existe, il doit vérifier :

$$\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} (\overrightarrow{AM_i} + \overrightarrow{M_i G})$$
$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M_i G} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i}.$$

Soit alors G l'unique point de l'espace défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i} .$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_i}) = \lambda \overrightarrow{GA} + \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i} \right)$$
$$= \lambda \overrightarrow{GA} + \lambda \overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de G. ■

Barycentre et centre d'inertie. En physique, le barycentre G d'un solide matériel constitué de n solides ponctuels A_i de masses m_i , affectés respectivement des coefficients m_i, est appelé le *centre d'inertie* du solide. La masse du solide est la somme $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Notons $\overrightarrow{\gamma_G}$ l'accélération du centre d'inertie G. La loi fondamentale de la mécanique (deuxième loi de Newton) exprime alors que la somme $\vec{F}$ des forces appliquées à un solide matériel de masse m est, dans tout référentiel galiléen, liée à l'accélération par la formule $\vec{F} = m\overrightarrow{\gamma_G}$.

Systèmes libres, systèmes générateurs. Considérons un système de n vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \dots, \overrightarrow{X_n}$ de l'espace. Si tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire de $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \dots, \overrightarrow{X_n}$, on dit que le système $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \dots, \overrightarrow{X_n})$ est *générateur*. Si $n \leq 2$, le système ne peut pas être générateur. On dit que le système $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \dots, \overrightarrow{X_n})$ est *libre* si l'on a, pour toute suite $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de réels :

$$\lambda_1 \overrightarrow{X_1} + \lambda_2 \overrightarrow{X_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{X_n} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Si $n \geq 3$, le système ne peut pas être libre.

4.1.4 COORDONNÉES DANS UNE BASE

On dit que trois vecteurs $\vec{I} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{J} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{K} = \overrightarrow{AD}$ forment une *base* (des vecteurs de l'espace) si les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires. Cette condition est indépendante du choix de l'origine A fixée pour représenter $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ par des vecteurs liés d'origine A. En effet, le système $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base si et seulement s'il est libre et générateur.

THÉORÈME. *Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une base des vecteurs de l'espace. Tout vecteur $\vec{X}$ de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{X} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}$ où x, y, z sont des nombres réels appelés coordonnées de $\vec{X}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.*

Inversement, si tout vecteur $\vec{X}$ de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{X} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}$, le système $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ forme une base.

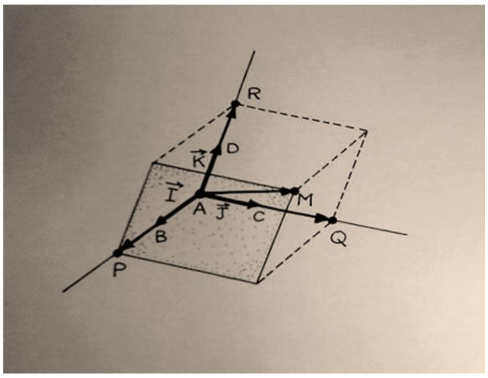


Figure 6

La coordonnée x de $\vec{X} = \overrightarrow{AM}$ sur $\vec{I} = \overrightarrow{AB}$ s'obtient en considérant le point P intersection de la droite AB avec le plan parallèle au plan ACD passant par M. Les points A, B, P sont alignés et il existe un unique réel x tel que

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} = x\vec{I}.$$

On définit de même (en échangeant les rôles de B, C, D) les points Q, R correspondant aux coordonnées y et z telles que :

$$\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC} = y\vec{J} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AR} = z\overrightarrow{AD} = z\vec{K}.$$

On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}.$$

Le choix d'une base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ permet d'identifier l'espace des vecteurs à l'espace $\mathbb{R}^3$ des triplets ordonnés (x,y,z) de nombres réels : à tout vecteur $\vec{X}=x\vec{I}+y\vec{J}+z\vec{K}$, on associe le triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On peut alors traduire analytiquement, c'est-à-dire sur les coordonnées, les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication par un scalaire.

> **THÉORÈME**. *Soient $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ une base des vecteurs de l'espace et $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$. Alors, quels que soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, le vecteur $\lambda_1\overrightarrow{X_1}+\lambda_2\overrightarrow{X_2}$ a pour coordonnées $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$ dans cette base.*

Structure d'espace vectoriel. À l'aide du théorème ci-dessus, on montre :

> **THÉORÈME**. *Les lois d'addition des vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un réel vérifient les propriétés suivantes :*
>
> *(i)* $\vec{X}+\vec{Y}=\vec{Y}+\vec{X}$ *quels que soient* $\vec{X},\vec{Y}$ *;*
>
> *(ii)* $\vec{X}+(\vec{Y}+\vec{Z})=\vec{X}+(\vec{Y}+\vec{Z})$ *quels que soient* $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$ *;*
>
> *(iii) Le vecteur nul vérifie* $\vec{X}+\vec{0}=\vec{X}$ *quel que soit* $\vec{X}$ *;*
>
> *(iv) Pour tout* $\vec{X}$*, le vecteur* $\vec{X}'=-\vec{X}$ *vérifie* $\vec{X}+\vec{X}'=\vec{0}$ *;*
>
> *(v)* $\lambda(\vec{X}+\vec{Y})=\lambda\vec{X}+\lambda\vec{Y}$ *quels que soient* $\vec{X},\vec{Y}$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *;*
>
> *(vi)* $(\lambda+\mu)\vec{X}=\lambda\vec{X}+\mu\vec{X}$ *quels que soient* $\vec{X}$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *;*
>
> *(vii)* $(\lambda\mu)\vec{X}=\lambda(\mu\vec{X})$ *quels que soient* $\vec{X}$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *;*
>
> *(viii)* $1.\vec{X}=\vec{X}$ *quel que soit* $\vec{X}$.

On résume ces propriétés en disant que l'ensemble des vecteurs de l'espace possède une *structure d'espace vectoriel* pour les lois d'addition de vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un réel. On note $\mathbf{E}_3$ cet espace vectoriel. Les vecteurs du plan et de la droite forment également des espaces vectoriels que l'on note respectivement $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_1$. Une base de $\mathbf{E}_2$ est un couple de deux vecteurs non colinéaires et tout vecteur non nul constitue une base de $\mathbf{E}_1$.

Bases orthonormées. Rappelons qu'une base $(\vec{I},\vec{J})$ des vecteurs du plan est *orthonormée* si les vecteurs $\vec{I},\vec{J}$ sont unitaires et si leurs directions sont orthogonales. De même, on dit qu'une base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ de $\mathbf{E}_3$ est *orthonormée* si les vecteurs de base sont de norme 1 et si leurs directions sont deux à deux orthogonales. Si $\vec{X}$ a pour coordonnées $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée, on a en vertu du théorème de Pythagore :

$$\|\vec{X}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

EXEMPLE. *Soit* $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ *une base orthonormée. On pose :* $\vec{U}=\vec{I}+\vec{J},\ \vec{V}=\vec{I}-\vec{J}+\vec{K},\ \vec{W}=\vec{J}+\vec{K}.$

Montrer que $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ *constitue une base des vecteurs de l'espace.*

Soit $\vec{X}=x\vec{I}+y\vec{J}+z\vec{K}$ un vecteur. Il nous faut montrer qu'il existe des réels uniques α,β,γ tels que l'on ait :

$$\vec{X}=x\vec{I}+y\vec{J}+z\vec{K}=\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}+\gamma\vec{W}\ .$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}+\gamma\vec{W}&=\alpha(\vec{I}+\vec{J})+\beta(\vec{I}-\vec{J}+\vec{K})+\gamma(\vec{J}+\vec{K})\\&=(\alpha+\beta)\vec{I}+(\alpha-\beta+\gamma)\vec{J}+(\beta+\gamma)\vec{K}\end{aligned}$$

et il suffit de montrer que le système

$$\begin{cases}\alpha+\beta\qquad=x\\\alpha-\beta+\gamma=y\\\qquad\beta+\gamma=z\end{cases}$$

admet, pour tous x,y,z fixés, une unique solution en α,β,γ. Or ce système équivaut à :

$$\begin{cases}\alpha\qquad-\gamma=x-z\\2\alpha\qquad+\gamma=x+y\\\qquad\beta+\gamma=z.\end{cases}$$

On tire des deux premières équations :

$$\alpha=\frac{2x+y-z}{3}\ ,\ \gamma=\frac{-x+y+2z}{3}$$

et, en reportant ces valeurs dans la troisième, on obtient :

$$\beta=\frac{x-y+z}{3}\ .$$

Ceci démontre que $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ est une base de l'espace des vecteurs de l'espace. ■

4.2 Notion générale d'espace vectoriel

4.2.1 DÉFINITION D'UN ESPACE VECTORIEL

On appelle *espace vectoriel* un ensemble E muni

- d'une loi d'addition $(X,Y)\in E\times E\to X+Y\in E$;
- d'une loi de multiplication extérieure $(\lambda,X)\in\mathbb{R}\times E\to\lambda X\in E$;

telles que les propriétés *(i)* à *(viii)* énoncées pour les vecteurs de $\mathbf{E}_3$ soient vérifiées (pour *(iii)* on demande l'existence d'un zéro noté 0 et pour *(iv)* on demande l'existence pour tout X d'un opposé $-X$).

Exemples. 1. L'ensemble des vecteurs (libres) de la droite (resp. du plan, de l'espace) est un espace vectoriel, noté $\mathbf{E}_1$ (resp. $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$). Le nombre d'éléments d'une base (1, 2 ou 3) est aussi le nombre de coordonnées nécessaires pour représenter un vecteur ; on dit que c'est la *dimension* de $\mathbf{E}_1$ (resp. $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$).

2. L'ensemble $E=\mathbb{R}^n$ des $n-$uplets $\mathrm{X}=(x_1,...,x_n)$ de nombres réels est un espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$$
$$\lambda(x_1,...,x_n)=(\lambda x_1,...,\lambda x_n).$$

Cet espace vectoriel est « de dimension n » car un vecteur est déterminé par n coordonnées $x_1,...,x_n$.

3. L'ensemble $E=\mathbb{R}^{[0,1]}$ des fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois :

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\ t\in[a,b]$$
$$(\lambda f)(t)=\lambda f(t)\ ,\ t\in[a,b]\ .$$

À la différence des exemples précédents, cet espace vectoriel est de « dimension infinie » car une fonction ne dépend pas que d'un nombre fini de paramètres réels.

4.2.2 SYSTÈMES GÉNÉRATEURS, SYSTÈMES LIBRES, BASES

Combinaisons linéaires. On appelle *combinaison linéaire* de n vecteurs $X_1,X_2,\dots,X_n$ d'un espace vectoriel E tout vecteur $X\in E$ de la forme :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Systèmes générateurs. On dit qu'un système $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n vecteurs de E est *générateur* si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Si E possède un système générateur (fini), on dit qu'il est de *dimension finie.*

Systèmes libres. On dit qu'un système $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est *libre* (ou que les vecteurs X_i sont *linéairement indépendants*) si l'on a, pour toute suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de réels :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 .$$

Bases. S'il existe n vecteurs $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de E tels que tout vecteur $X \in E$ s'écrive de manière unique sous la forme

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n ,$$

on dit que $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une *base* de E. L'espace E est alors de dimension finie. On montre que toutes les bases de E comportent dans ce cas n vecteurs et on dit que n est la *dimension* de E. Par exemple, les vecteurs

$$U_1 = (1,0,\ldots,0), U_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots , U_n = (0,0,\ldots,1)$$

forment une base de $E = \mathbb{R}^n$, qui est donc de dimension n. Les espaces vectoriels $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ ont donc pour dimensions respectives $1,2$ et 3. Dans un espace de dimension finie n, un système de vecteurs forme une base s'il est libre et générateur. Dans ce cas, il comporte n vecteurs.

Coordonnées dans une base. Supposons que E soit de dimension n et fixons une base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Tout vecteur $X \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$X = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \ldots + x_n U_n$$

et on dit que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* de X dans la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. L'application

$$X = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \ldots + x_n U_n \in E \to (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

permet d'identifier E à $\mathbb{R}^n$. C'est pourquoi $\mathbb{R}^n$ est le prototype d'espaces vectoriels de dimension n.

4.2.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS

Une partie F d'un espace vectoriel E est dite stable par les lois d'addition et de multiplication par les scalaires si, quels que soient

$X, Y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda X + \mu Y \in F$. Toute partie non vide F d'un espace vectoriel E qui est stable par les lois d'addition et de multiplication par les scalaires est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel ; on dit que c'est un *sous-espace vectoriel* de E.

Exemples. 1. Pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{X}$ de l'espace, l'ensemble des $\lambda\overrightarrow{X}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}_3$ appelé *droite vectorielle*.

2. Si $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{E}_3$, l'ensemble des $\lambda\overrightarrow{X} + \mu\overrightarrow{Y}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}_3$ appelé *plan vectoriel*.

3. L'ensemble des polynômes est un sous-espace vectoriel de l'espace $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$ des fonctions réelles définies sur $[0,1]$.

EXEMPLE. *Soient a, b, c trois réels non tous nuls. Pour $d \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$F_d = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = d\right\}.$$

Montrer que F_d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $d = 0$.

Si F_d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il doit contenir le vecteur nul $(0,0,0)$ d'où $d = 0$. Inversement, si $d = 0$, on a pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$:

$$\left((x,y,z) \in F_d \text{ et } (x',y',z') \in F_d\right) \Rightarrow (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \in F_d,$$

ce qui prouve que F_d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ■

4.3 Droites et plans

4.3.1 REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE DES POINTS

Rapportons l'espace à un repère orthonormé, c'est-à-dire fixons une origine O et une base orthonormée $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Tout point M de l'espace est alors entièrement déterminé par les coordonnées (x,y,z) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. On dit que (x,y,z) sont les *coordonnées cartésiennes* du point M et on écrit :

$$M(x,y,z), \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou } \overrightarrow{OM} = (x,y,z).$$

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ et } AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \text{ .}$$

4.3.2 DROITES DE L'ESPACE

Considérons une droite Δ de l'espace passant par deux points distincts $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à Δ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit par les équations :

$$(\Delta\ ) \begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) \end{cases}$$

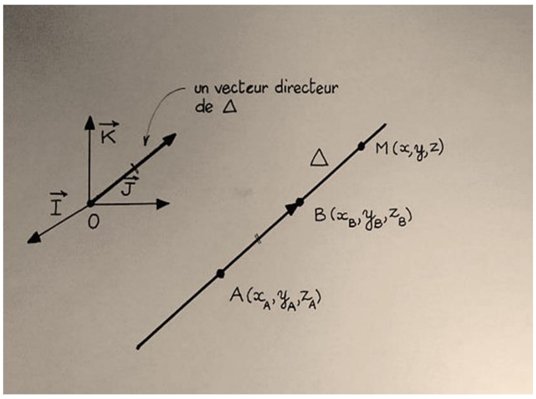


Figure 7

À toute valeur de λ correspond un point et un seul de Δ ; on dit que le système $(\Delta\ )$ constitue *la représentation paramétrique* de la droite Δ. Si C, D sont deux points distincts de la droite Δ, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est appelé un *vecteur directeur* de la droite Δ. Une droite Δ est entièrement caractérisée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$; la représentation paramétrique d'une telle droite est :

$$(\Delta\ ) \begin{cases} x = x_A + \lambda v_1 \\ y = y_A + \lambda v_2 \\ z = z_A + \lambda v_3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

EXEMPLE. *On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(1,1,1)$, $D(0,2,1)$ et on note $\Delta_{A,B}$ et $\Delta_{C,D}$ les droites passant respectivement par A, B et C, D. Montrer que ces droites sont concourantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.*

Les équations paramétriques des droites $\Delta_{A,B}$ et $\Delta_{\mathrm{C,D}}$ sont respectivement :

$$(\Delta_{A,\mathrm{B}})\begin{cases}x=2\lambda\\y=1\\z=1\end{cases}\quad \text{et}\quad (\Delta_{\mathrm{C,D}})\begin{cases}x=1-\mu\\y=1+\mu\,.\\z=1\end{cases}$$

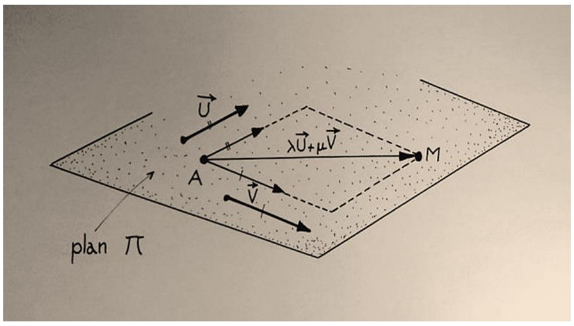
Ces droites sont concourantes s'il existe des réels λ et μ tels que :

$$\begin{cases}2\lambda=1-\mu\\1=1+\mu\end{cases}$$

Les réels $\mu=0$, $\lambda=1/2$ conviennent, et ce sont les seuls. Il s'ensuit que $\Delta_{A,\mathrm{B}}$ et $\Delta_{\mathrm{C,D}}$ se coupent en un seul point $M(x,y,z)$ correspondant au paramètre $\lambda=1/2$ et ce point d'intersection est $M(1,1,1)$. ■

4.3.3 PLANS DE L'ESPACE

Considérons un plan Π de l'espace passant par trois points non alignés $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$. Les vecteurs $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; on dit que ce sont des *vecteurs directeurs* du plan Π .



Un point $M(x,y,z)$ appartient à Π si et seulement si il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{U}+\mu\vec{V}\,,$$

ce qui se traduit par les équations suivantes :

Figure 8

$$(\Pi)\quad\begin{cases}x=x_A+\lambda(x_B-x_A)+\mu(x_C-x_A)\\y=y_A+\lambda(y_B-y_A)+\mu(y_C-y_A)\\z=z_A+\lambda(z_B-z_A)+\mu(z_C-z_A)\end{cases}$$

À tout couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ correspond un point et un seul de Π ; on dit que le système (Π) constitue *la représentation paramétrique* du plan Π .

Un plan Π est également caractérisé par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un système de deux vecteurs directeurs $\vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$; la représentation paramétrique d'un tel plan est alors :

$$(\Pi\ ) \begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2).$$

EXEMPLE. *On considère les points* $A(0,1,1)$, $B(1,1,1)$ *et* $C(0,0,1)$.

a) Déterminer la représentation paramétrique du plan Π *passant par le point* A *et de vecteurs directeurs :*

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ et\ \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que la droite passant par B *et* C *coupe le plan* Π *en un point que l'on déterminera.*

La représentation paramétrique du plan Π est :

$$(\Pi\ ) \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2).$$

L'équation paramétrique de la droite $\Delta_{B,C}$ passant par B et C est :

$$(\Delta_{B,C}) \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de la droite $\Delta_{B,C}$ et du plan Π correspond aux points $M(x,y,z)$ de paramètres λ, μ dans la représentation paramétrique *(Π)* et de paramètre t dans les équations $(\Delta_{B,C})$, d'où les relations :

$$\lambda = t, 1 + \mu = t, 1 + \lambda + \mu = 1 \ .$$

On en tire $\lambda = -\mu = t = \frac{1}{2}$ et il y a un seul point d'intersection de coordonnées $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. ■

4.4 Produit scalaire de deux vecteurs

4.4.1 DÉFINITION DU PRODUIT SCALAIRE

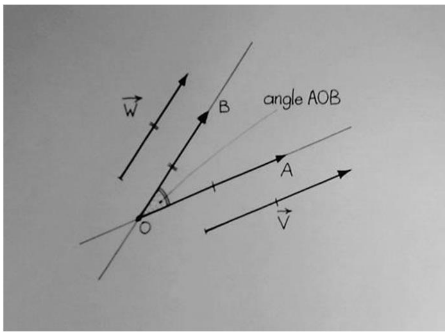


Figure 9

Par *angle* de deux vecteurs non nuls $\vec{V}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{W}=\overrightarrow{OB}$ de l'espace, on entend l'angle géométrique $(\vec{V},\vec{W})=\widehat{AOB}$. Cet angle ne dépend pas du choix de l'origine O ; il admet une unique détermination (ou mesure en radians) comprise entre 0 et π .

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{V},\vec{W}\in\mathbf{E}_3$ le nombre réel $\vec{V}.\vec{W}$ défini par :

$$\vec{V}.\vec{W}=\begin{cases} 0 & si\ \vec{V}=\vec{0}\ ou\ si\ \vec{W}=\vec{0} \\ \|\vec{V}\|.\|\vec{W}\|.\cos(\vec{V},\vec{W}) & sinon. \end{cases}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{V}$ et $\vec{W}$ détermine leur angle géométrique par la formule :

$$\cos(\vec{V},\vec{W})=\frac{\vec{V}.\vec{W}}{\|\vec{V}\|.\|\vec{W}\|}.$$

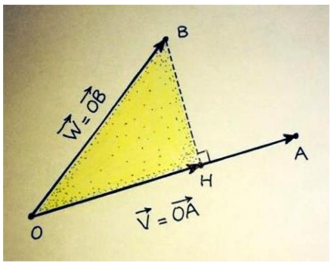


Figure 10

On dit que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de l'espace sont *orthogonaux* si $\vec{V}.\vec{W}=0$. Par exemple, les vecteurs d'une base orthonormée sont deux à deux orthogonaux.

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{V}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{W}=\overrightarrow{OB}$, on a :

$$\vec{V}.\vec{W}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$$

où H désigne la projection de B sur la droite OA dans le plan passant par les points O,A,B . Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est appelé la *projection orthogonale* du vecteur $\vec{W}=\overrightarrow{OB}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{V}$; on le note $p_{\vec{V}}(\vec{W})$. Cette projection orthogonale est donnée par la formule :

$$p_{\vec{V}}(\vec{W}) = \left(\frac{\vec{W}.\vec{V}}{\|\vec{V}\|^2} \right) \vec{V}.$$

Produit scalaire et travail d'une force. En physique, le travail d'une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de A vers B est par définition le nombre $W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$. Il s'exprime en joules.

4.4.2 PROPRIÉTÉS ET CALCUL DU PRODUIT SCALAIRE

Les principales propriétés du produit scalaire sont résumées dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *Quels que soient les vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de l'espace et le réel λ on a :*

(i) $\vec{X}.\vec{X} = \|\vec{X}\|^2 \geq 0$ *et (* $\vec{X}.\vec{X} = 0 \Leftrightarrow \vec{X} = \vec{0}$ *) ;*

(ii) $\vec{X}.\vec{Y} = \vec{Y}.\vec{X}$ *;*

(iii) $(\lambda\vec{X}).\vec{Y} = \vec{X}.(\lambda\vec{Y}) = \lambda(\vec{X}.\vec{Y})$*;*

(iv) $\vec{X}.(\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X}.\vec{Y} + \vec{X}.\vec{Z}$*;*

(v) Inégalité de Cauchy-Schwarz *:* $|\vec{X}.\vec{Y}| \leq \|\vec{X}\|.\|\vec{Y}\|$ *et l'égalité a lieu si et seulement si* $\vec{X}$ *et* $\vec{Y}$ *sont colinéaires.*

De ces propriétés, on déduit l'expression analytique du produit scalaire :

THÉORÈME. *Si* $\vec{X}$ *et* $\vec{Y}$ *ont pour coordonnées respectives* (x_1, x_2, x_3) *et* (y_1, y_2, y_3) *dans une base orthonormée* $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$*, on a :*

$$\vec{X}.\vec{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Attention : ce résultat est faux si la base $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ n'est pas orthonormée.

EXEMPLE. *Dans un repère orthonormé, on considère les points* $A(0,1,1)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,1)$ *et* $D(2,2,1)$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

b) Les vecteurs $\vec{X} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{Y} = \overrightarrow{CD}$ *sont-ils orthogonaux ? Quel est l'angle formé par ces deux vecteurs ?*

c) Déterminer la projection orthogonale de $\vec{X}$ *sur la droite vectorielle engendrée par* $\vec{Y}$.

a) On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=2$.

b) Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{X}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux. On a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=1$ et $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, d'où

$$\cos(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\frac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|.\left\|\overrightarrow{Y}\right\|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et l'angle entre $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$.

c) La projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{Y}$ est donnée par :

$$p_{\overrightarrow{Y}}(\overrightarrow{X})=\left(\frac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}}{\left\|\overrightarrow{Y}\right\|^2}\right)\overrightarrow{Y}=\frac{2}{8}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}. \blacksquare$$

4.4.3 IDENTITÉS REMARQUABLES

Si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont deux vecteurs de l'espace, on a :

(i) **Relation métrique fondamentale** : $\left\|\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{X}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{Y}\right\|^2+2(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y})$;

(ii) **Identité de la médiane** : $\left\|\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{X}-\overrightarrow{Y}\right\|^2=2\left(\left\|\overrightarrow{X}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{Y}\right\|^2\right)$;

(iii) **Identité de polarisation**

$$\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}=\frac{1}{4}\left(\left\|\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{X}-\overrightarrow{Y}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{X}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{Y}\right\|^2\right).$$

La relation de polarisation *(iii)* montre que la norme euclidienne des vecteurs détermine le produit scalaire.

Lorsque $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont orthogonaux, la relation *(i)* se réduit à l'identité de Pythagore. Dans un triangle A,B,C, elle s'écrit avec $\overrightarrow{X}=\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{AB}$:

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Si α désigne l'angle en A du triangle ABC et $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ les longueurs des côtés opposés à A, B et C, on obtient la relation métrique fondamentale du triangle :

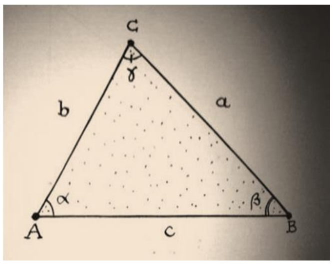


Figure 11

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si il vérifie la relation de Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2\,.$$

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement s'il vérifie la relation de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$.

EXEMPLE. *Considérons deux points distincts A,B de l'espace. Déterminer le lieu des points M distincts de A et B tels que les droites MA et MB se coupent à angle droit.*

Si l'on pose $\vec{X} = \overrightarrow{MA}$ et $\vec{Y} = \overrightarrow{MB}$, on a en soustrayant les relations métriques fondamentales écrites pour $\vec{X}+\vec{Y}$ et $\vec{X}-\vec{Y}$:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|^2 = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

soit, en notant I le milieu de AB :

$$4\left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\,.$$

Le lieu cherché est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que la longueur MI soit la moitié de AB, c'est-à-dire la sphère de centre I et de rayon $AB/2$, privée des points A et B. ■

4.4.4 EQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

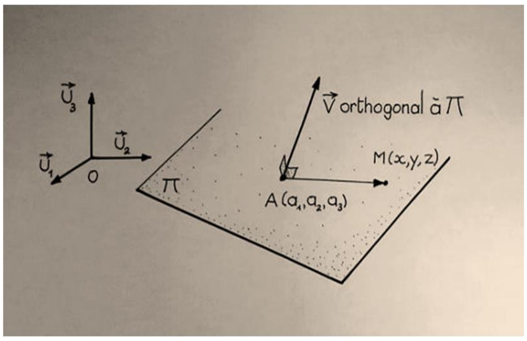


Figure 12

Rapportons l'espace à un repère orthonormé

$$(O,\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2},\overrightarrow{U_3})\,.$$

L'équation d'un plan Π passant par un point $A(a_1,a_2,a_3)$ et orthogonal à un vecteur non nul $\vec{V} = (v_1,v_2,v_3)$ s'obtient en écrivant que Π est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à $\vec{V}$.

Puisque :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{V} = (x-a_1)v_1 + (y-a_2)v_2 + (z-a_3)v_3 ,$$

l'équation cartésienne d'un tel plan est :

$$v_1x + v_2y + v_3z = C \text{ , où } C = v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3 .$$

Ce plan passe par l'origine si et seulement si $C = 0$.

EXEMPLE. *Déterminer l'équation du plan passant par le point $A = (1,1,1)$ et orthogonal au vecteur* $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation de ce plan est de la forme $2x - y + z = C$; comme il passe par le point $A = (1,1,1)$, on a $2-1+1 = C$ d'où $C = 2$. L'équation cherchée est donc : $2x - y + z = 2$. ■

4.4.5 DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

Considérons un plan Π orthogonal au vecteur $\vec{V} = (a,b,c) \neq \vec{0}$. Son équation cartésienne est :

$$ax + by + cz - d = 0 .$$

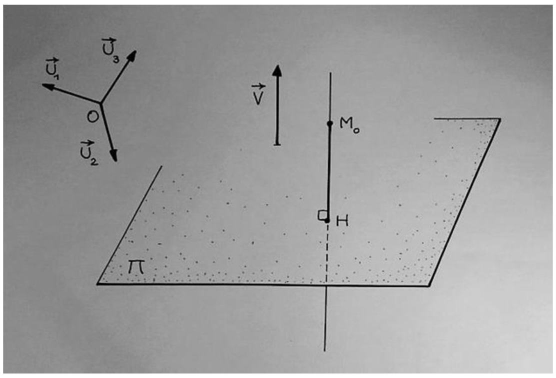


Figure 13

La distance $d(M_o,\Pi)$ d'un point $M_o = (x_o, y_o, z_o)$ au plan Π est par définition la distance $HM_o = \|\overrightarrow{HM_o}\|$ de M_o au pied $H(x_1,y_1,z_1)$ de la perpendiculaire à Π abaissée de M_o. Comme $\overrightarrow{HM_o}$ est colinéaire à $\vec{V}$, on a :

$$\left|\overrightarrow{HM_o}.\vec{V}\right| = \left\|\overrightarrow{HM_o}\right\|.\left\|\vec{V}\right\| = d(M_o,\Pi)\sqrt{a^2+b^2+c^2} .$$

Puisque H appartient au plan Π, on a $ax_1 + by_1 + cz_1 - d = 0$ et donc :

$$\left|\overrightarrow{HM_o}.\vec{V}\right| = \left|a(x_o - x_1) + b(y_o - y_1) + c(z_o - z_1)\right| = \left|ax_o + by_o + cz_o - d\right| .$$

Il s'ensuit que $d(M_o,\Pi) = \dfrac{|ax_o + by_o + cz_o - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, d'où :

PROPOSITION. *La distance* $d(M_o,\Pi)$ *d'un point* $M_o(x_o,y_o,z_o)$ *au plan* Π *d'équation cartésienne* $ax+by+cz-d=0$ *est donnée par :*

$$d(M_o,\Pi)=\frac{|ax_o+by_o+cz_o-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

EXEMPLE. *Déterminer la distance du point* $M(1,1,1)$ *au plan* Π *passant par les points* $A(1,0,0), B(0,1,1), C(2,0,1)$.

Déterminons tout d'abord l'équation du plan Π. Si $\vec{V}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à Π, il doit être orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où les équations :

$$\begin{cases}-a+b+c=0\\ a+c=0.\end{cases}$$

On en déduit que $c=-a$ et $b=2a$. Un vecteur orthogonal à Π est $\vec{V}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Comme A appartient au plan Π, son équation est : $(x-1)+2y-z=0$, soit $x+2y-z=1$. La distance du point $M(1,1,1)$ au plan Π est donc :

$$d(M,\Pi)=\frac{|1+2-1-1|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}. \blacksquare$$

4.5 Produit vectoriel de deux vecteurs

4.5.1 DÉFINITION DU PRODUIT VECTORIEL

Orientation de l'espace. Pour définir le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace, il est nécessaire *d'orienter l'espace* c'est-à-dire de choisir une notion de base directe. Fixons une origine O de l'espace. On dira qu'une base :

$$(\vec{U_1}=\overrightarrow{OA_1},\ \vec{U_2}=\overrightarrow{OA_2},\ \vec{U_3}=\overrightarrow{OA_3})$$

de l'espace est *directe* si le point A_2 est situé à gauche d'un observateur ayant les pieds en O, la tête en A_3, et qui fixe du regard le point A_1. Dans le cas contraire, on dit que la base $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ est *indirecte*. La notion de base directe ou indirecte ne dépend pas du choix de l'origine O. Orienter l'espace, c'est par définition faire le choix d'une base directe[4].

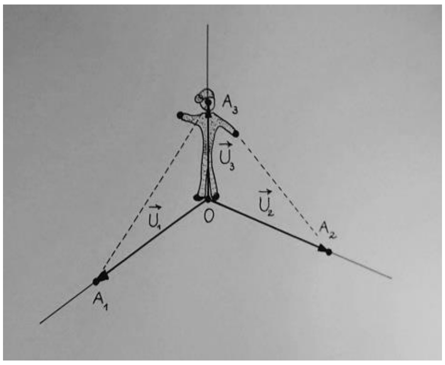


Figure 14

Produit vectoriel. Soient $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle *produit vectoriel* de $\overrightarrow{X}$ par $\overrightarrow{Y}$ le vecteur $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ défini comme suit :

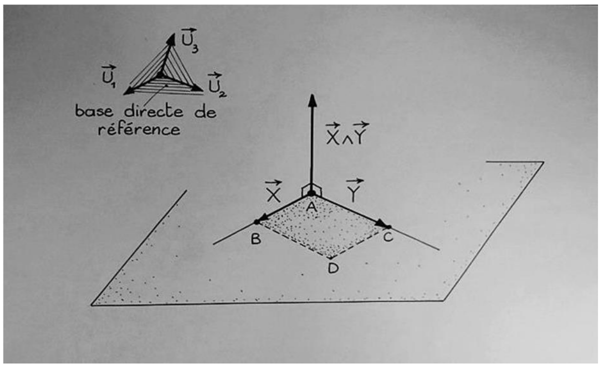


Figure 15

- si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = \vec{0}$;
- si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ ne sont pas colinéaires, alors $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est l'unique vecteur $\overrightarrow{Z}$ orthogonal à $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$, de norme :

$$\|\overrightarrow{Z}\| = \|\overrightarrow{X}\|.\|\overrightarrow{Y}\| \sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) ,$$

[4] Ce choix est arbitraire ; on peut aussi bien déclarer que les bases directes sont celles que nous avons appelées indirectes.

et tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit une base directe.

Si $\vec{X} = \overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\vec{Y} = \overrightarrow{AC}$, la norme de $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ est la surface du parallélogramme $ABDC$. On a donc :

$$\textit{aire du triangle } ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

EXEMPLE. *Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont deux vecteurs orthogonaux unitaires, alors $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{X} \wedge \vec{Y})$ est une base orthonormée directe.*

En effet, $\left\|\vec{X} \wedge \vec{Y}\right\| = \left\|\vec{X}\right\| . \left\|\vec{Y}\right\| \sin(\vec{X}, \vec{Y}) = 1$ et, comme $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ est orthogonal à $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{X} \wedge \vec{Y})$ est orthonormée. Mais elle est également directe par définition du produit vectoriel. ■

Produit vectoriel et électromagnétisme. En physique, la force magnétique qui s'exerce sur une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{V}$ et placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ est :

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Elle s'exerce orthogonalement au plan déterminé par la vitesse et le champ magnétique, et le trièdre $(q\vec{V}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct (règle du bonhomme d'Ampère).

De la définition du produit vectoriel, on déduit :

THÉORÈME. *Deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de l'espace sont colinéaires si et seulement si $\vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{0}$.*

Il s'ensuit que trois points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

4.5.2 PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL

Les propriétés algébriques du produit vectoriel sont résumées dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *Quels que soient les vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de l'espace et le réel λ on a :*

(i) $\vec{X} \wedge \vec{Y} = -\vec{Y} \wedge \vec{X}$ *et* $(\vec{X} \wedge \vec{Y} = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ *et* $\vec{Y}$ *sont colinéaires)*;

(ii) $(\lambda\vec{X}) \wedge \vec{Y} = \vec{X} \wedge (\lambda\vec{Y}) = \lambda(\vec{X} \wedge \vec{Y})$;

(iii) $\vec{X} \wedge (\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X} \wedge \vec{Y} + \vec{X} \wedge \vec{Z}$ *et* $(\vec{X} + \vec{Y}) \wedge \vec{Z} = \vec{X} \wedge \vec{Z} + \vec{Y} \wedge \vec{Z}$.

De ces propriétés, on déduit l'expression analytique du produit vectoriel :

THÉORÈME. *Si* $\vec{X}$ *et* $\vec{Y}$ *ont pour coordonnées respectives* (x_1, x_2, x_3) *et* (y_1, y_2, y_3) *dans une base orthonormée directe* $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$*, on a :*

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Attention : ce résultat est faux si la base $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ n'est pas orthonormée et directe.

4.5.3 PRODUIT VECTORIEL ET DÉTERMINANTS

Composantes du produit vectoriel et déterminants. Soient a, b, c, d des nombres réels. On convient d'appeler *déterminant* du tableau carré $\boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}$ (ou de la « matrice » $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) le nombre défini par :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc .$$

Avec cette convention, on a :

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

où les déterminants $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1 y_3 - x_3 y_1$ et $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ sont obtenus à partir du tableau rectangulaire $\boxed{\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}}$ des coordonnées de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ (écrites en colonnes) en enlevant successivement la première ligne, la seconde ligne puis la troisième ligne. Chacun de ces déterminants représente une aire algébrique comme nous allons le voir.

Déterminants d'ordre deux et aires. Si deux vecteurs $\vec{X}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{Y}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\0\end{pmatrix}$ appartiennent au plan vectoriel engendré par $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$, on a : $\vec{X}\wedge\vec{Y}=\begin{pmatrix}0\\0\\\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ et $\|\vec{X}\wedge\vec{Y}\|=\textit{aire du parallélogramme } ABDC$.

De cette observation on déduit l'interprétation géométrique suivante de la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$:

> **THÉORÈME**. *Rapportons le plan à un repère orthonormé* $(\vec{I},\vec{J})$. *Soient* $\vec{X}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{Y}=\overrightarrow{AC}$ *deux vecteurs du plan de coordonnées* (x_1,x_2) *et* (y_1,y_2) *dans la base* $(\vec{I},\vec{J})$ *et considérons le parallélogramme* $ADBC$ *construit sur les côtés* AB *et* AC. *On a :*
>
> *(i)* *aire du parallélogramme* $ABDC=|x_1y_2-x_2y_1|$;
>
> *(ii)* $(\vec{X},\vec{Y})$ *est une base de* $\mathbf{E}_2$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\neq 0$.

4.5.4 ÉQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

Soient A,B,C trois points non alignés. Le plan Π passant par ces trois points a pour vecteur orthogonal $\vec{V}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; on peut donc déterminer son équation cartésienne à partir des coordonnées de $\vec{V}$ et de celles du point A dans une base orthonormée directe.

> **EXEMPLE.** *Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par les points* $A(2,1,-1)$, $B(0,1,1)$ *et* $C(3,0,-2)$.

On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, d'où : $\vec{V}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$.

L'équation du plan passant par les points A, B, C est donc de la forme $2x+2z=\lambda$, où λ est une constante que l'on détermine en écrivant que B appartient à ce plan. On obtient $\lambda=2$ et l'équation cherchée est : $x+z-1=0$. ■

4.5.5 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE DANS L'ESPACE

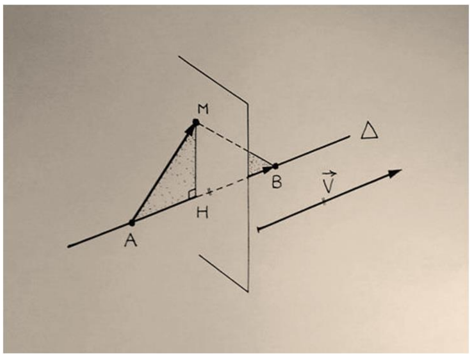


Figure 16

Soit à calculer la distance $d(M,\Delta)$ d'un point M à une droite Δ passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{V}$. Écrivons $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ et notons H la projection orthogonale de M sur Δ. L'aire du triangle AMB est égale à $\frac{1}{2}AB\times MH$ et par conséquent :

$$\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\right\|=2Aire(AMB)=AB\times MH=\left\|\vec{V}\right\|\times d(M,\Delta).$$

Il s'ensuit que :

$$d(M,\Delta)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|}.$$

EXEMPLE. *Déterminer, dans un repère orthonormé direct, la distance du point $M(1,2,0)$ à la droite Δ passant par les points $A(0,1,1)$ et $B(2,1,0)$.*

On a : $\vec{V}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. On a donc :

$$d(M,\Delta)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}\ .\ ■$$

4.6 Produit mixte

4.6.1 DÉFINITION ET CALCUL DU PRODUIT MIXTE

On suppose à nouveau que l'espace est orienté. Soient $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle *produit mixte* de ces trois vecteurs le nombre réel :

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) = \vec{X}.(\vec{Y} \wedge \vec{Z}).$$

De l'expression du produit vectoriel et du produit scalaire, on déduit :

THÉORÈME. *Soit $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ une base orthonormée directe des vecteurs de l'espace. Si les vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ ont pour coordonnées dans cette base :*

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \vec{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

alors on a :

$$\begin{aligned}(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.\end{aligned}$$

Produit mixte et déterminant d'ordre trois. Le produit mixte $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$ est encore appelé *déterminant* de la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont celles des coordonnées des vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ dans la base $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$. On note :

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

L'égalité :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

est appelée *développement du déterminant selon la première colonne*. La relation

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$$

calcule le déterminant à partir des produits $\pm x_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}z_{\sigma(3)}$, où σ désigne une permutation quelconque des entiers $\{1,2,3\}$. Graphiquement, on effectue ces produits en suivant les diagonales du tableau ci-contre (les produits correspondant aux diagonales « ascendantes » sont affectés d'un signe moins).

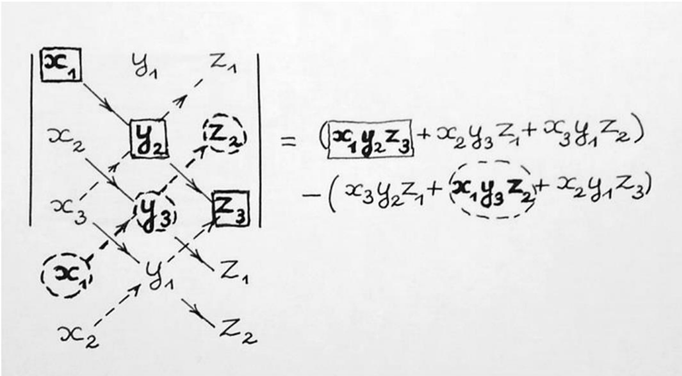


Figure 17

4.6.2 PROPRIÉTÉS DU PRODUIT MIXTE

Produit mixte et volume du parallélépipède. Considérons trois vecteurs $\vec{X} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{Y} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{Z} = \overrightarrow{OC}$ de l'espace. Posons :

$$\vec{X} + \vec{Y} = \overrightarrow{OD}, \quad \vec{Y} + \vec{Z} = \overrightarrow{OE}, \quad \vec{X} + \vec{Z} = \overrightarrow{OF}, \quad \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} = \overrightarrow{OG}$$

et notons $\mathrm{P}_{\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}}$ le parallélépipède de sommets O,A,B,C,D,E,F,G construit sur les vecteurs $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$. Il a pour volume le produit de la surface du parallélogramme $OBEC$ (égale à $\left\|\vec{Y} \wedge \vec{Z}\right\|$) par la norme de la projection du vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{X}$ sur la droite orthogonale au plan OBC passant par O.

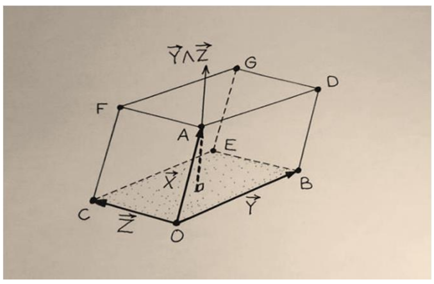


Figure 18

Comme $\vec{Y} \wedge \vec{Z}$ est orthogonal au plan, on a :

$$volume(P_{\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}}) = \left| \vec{X} \,.\, (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) \right| = \left| \left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right) \right|.$$

En particulier, on a :

THÉORÈME. *Les vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ forment une base des vecteurs de l'espace si et seulement si $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right) \neq 0$.*

EXEMPLE. *L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Les vecteurs*

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

On a : $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$, de sorte que $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ ne sont pas linéairement indépendants. ■

Propriétés algébriques du produit mixte. Il résulte des propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel que le produit mixte $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right)$ dépend linéairement de chacun de ses arguments lorsque les deux autres sont fixés. En outre, le produit mixte est nul lorsque deux arguments sont égaux. De ces observations, on déduit :

THÉORÈME. *(i) Le produit mixte $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right)$ est changé en son opposé lorsque l'on permute deux quelconques de ses arguments ;*

(ii) Quels que soient $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{Y}, \vec{Z}$ et λ_1, λ_2 réels, on a :

$$\left(\lambda_1 \vec{X_1} + \lambda_2 \vec{X_2}, \vec{Y}, \vec{Z} \right) = \lambda_1 \left(\vec{X_1}, \vec{Y}, \vec{Z} \right) + \lambda_2 \left(\vec{X_2}, \vec{Y}, \vec{Z} \right).$$

Ces règles peuvent être utilisées pour calculer des déterminants.

4.7 Coniques

4.7.1 DÉFINITION DES CONIQUES

Considérons une droite Δ du plan, un point F n'appartenant pas à Δ et un nombre réel $e > 0$. On appelle *conique de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e* l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$MF = e\, MH\,,$$

où H désigne la projection orthogonale de M sur la droite Δ. On dit que la conique est une *parabole*, une *ellipse* ou une *hyperbole* selon que $e=1$, $e<1$ ou $e>1$. La droite δ perpendiculaire à Δ et passant par F est appelée le *grand axe* de Γ ; elle coupe Δ en un point noté K. On notera $h = FK$ la distance du foyer F à la directrice Δ.

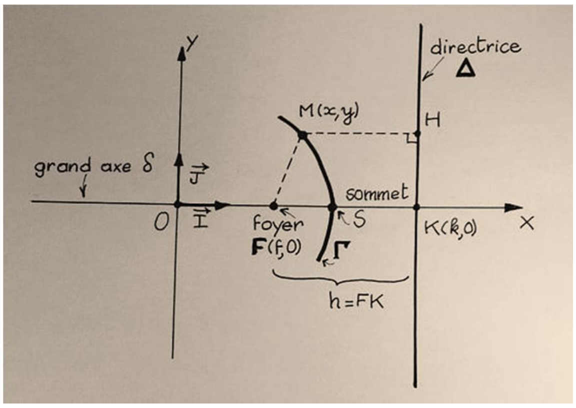


Figure 19

Une parabole Γ coupe toujours le grand axe en un seul point qui est le milieu du segment FK. On dit que ce point est le *sommet* de la parabole. Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, l'intersection avec le grand axe est constitué de deux points appelés *sommets* de la conique.

Choisissons un repère orthonormé d'origine un point O du grand axe et de vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ avec $\vec{I}$ vecteur directeur de δ. Notons f l'abscisse de F et k l'abscisse de K ; on a donc $h = |f-k|$. Un point $M(x,y)$ appartient à la conique Γ de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e si et seulement si :

$$(x-f)^2 + y^2 = e^2 (x-k)^2\ .$$

Cette équation s'écrit encore :

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C$$

où $A = e^2 - 1$, $B = f - e^2 k$ et $C = e^2k^2 - f^2$. On notera que l'on a :

$$B^2 - AC = \left[e(f-k)\right]^2 = (eh)^2 > 0\,.$$

4.7.2 EQUATION CARTÉSIENNE DES PARABOLES

Dans le cas d'une parabole on a $e=1$. Plaçons l'origine O au sommet S de la parabole. Quitte à changer $\vec{I}$ en $-\vec{I}$, on peut supposer que $k = -h/2 < 0$ et poser $p = h$. Comme $f = -k = p/2$, l'équation cartésienne de la parabole s'écrit :

$$y^2 = 2px\,.$$

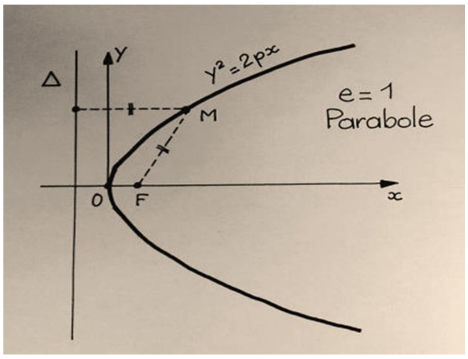


Figure 20

Pour tout nombre $p>0$ donné, cette équation définit évidemment une parabole de foyer $F(0,p/2)$ et de directrice la droite d'équation $x=-p/2$.

4.7.3 EQUATIONS DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

Dans le cas des ellipses et des hyperboles, $e\neq 1$. L'équation générale d'une telle conique s'écrit :

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A},$$

soit encore

$$y^2 + (1-e^2)\left(x+\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{(eh)^2}{1-e^2} = 0 .$$

Les deux sommets S et S' de cette conique on pour abscisses les solutions en x de cette équation lorsque $y=0$. La demi-somme de ces abscisse vaut donc $-\frac{B}{A}$. Plaçons l'origine O au milieu du segment joignant les deux sommets S et S' (ce qui revient à poser $X = x+\frac{B}{A}$). L'équation ci-dessus prend la forme simplifiée :

$$(1) \quad y^2 + (1-e^2)x^2 - \frac{(eh)^2}{1-e^2} = 0 \ .$$

Cette équation montre que l'origine O est un centre de symétrie de la conique Γ; il existe donc un second foyer F' et une seconde directrice Δ' parallèle à Δ tels que Γ soit aussi la conique de foyer F', de directrice Δ' et d'excentricité $e\neq 1$.

On écrit encore *(1)* sous la forme canonique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

où $a = \dfrac{eh}{|1-e^2|} > 0$, $b = \dfrac{eh}{\sqrt{|1-e^2|}} > 0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) si Γ est une ellipse (resp. une hyperbole). Le nombre $2a$ est appelé la *longueur du grand axe* de Γ et le nombre $2b$ est la *longueur du petit axe.*

On montre inversement que, si $a > b > 0$ et $b > 0$ sont deux nombres fixés, l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation

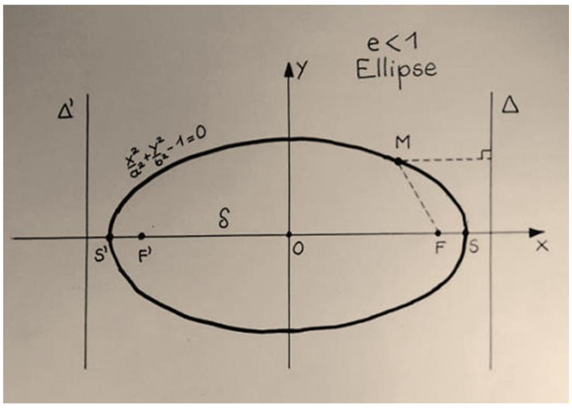


Figure 21

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est une ellipse de foyers $F = (c,0)$ et $F' = (-c,0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$, et telle que la distance h entre n'importe quel foyer et sa directrice soit donnée par $h = \dfrac{b^2}{c}$. Si $a = b > 0$, l'équation (2) est celle d'un cercle ; on considère que les cercles sont des ellipses particulières d'excentricité nulle (la directrice est « située à l'infini »).

De même, si $a > 0$ et $b > 0$ sont deux nombres fixés, l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation

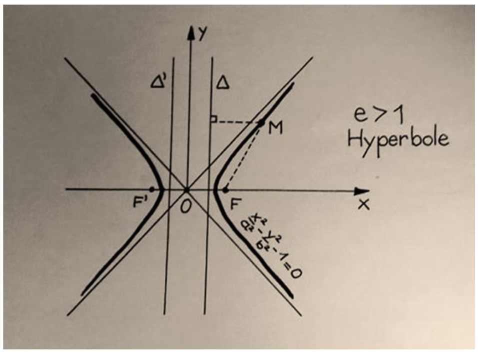


Figure 22

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est une hyperbole de foyers $F = (c,0)$ et $F' = (-c,0)$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ et telle que la distance h entre n'importe quel foyer et sa directrice soit donnée par $h = \dfrac{b^2}{c}$.

4.8 Exercices

4.8.1 Indépendance linéaire

1. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?

   a) $U=(1,6), V=(-1,1)$; b) $U=(1,-3), V=(-2/3,2)$;

   c) $U=(1,4), V=(-2,1), W=(3,1)$; d) $U=(1,4), V=(0,0)$.

2. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

   a) $U=(1,-2,3), V=(-2,4,-6)$; b) $U=(1,-1,0), V=(-1,2,1)$;

   c) $U=(1,2,3), V=(-1,1,0), W=(2,0,1)$;

   d) $U=(1,0,-1), V=(2,1,0), W=(5,1,-3)$;

   e) $T=(1,1,\sqrt{2}), U=(1,0,-1), V=(2,0,0), W=(1,1,-3)$.

4.8.2 Bases et coordonnées

1. Soit $(\vec{I},\vec{J})$ une base orthonormée des vecteurs du plan. Montrer que les vecteurs $\vec{U}=\vec{I}+\vec{J}, \vec{V}=\vec{I}-\vec{J}$ forment une base des vecteurs du plan. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{U},\vec{V})$?

2. Soit $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ une base orthonormée des vecteurs de l'espace. Montrer que les vecteurs $\vec{U}=\vec{I}+\vec{J}, \vec{V}=\vec{J}+\vec{K}, \vec{U}=\vec{I}+\vec{K}$ forment une base des vecteurs de l'espace. Quelles sont les coordonnées de $\vec{X}=2\vec{I}+3\vec{J}$ dans la base $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$?

3. Soit $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ une base orthonormée des vecteurs de l'espace. Montrer que les vecteurs $\vec{U}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{1}{9}\\ \frac{8}{9}\end{pmatrix}, \vec{V}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}\\ \frac{1}{9}\end{pmatrix}, \vec{W}=\begin{pmatrix}\frac{7}{9}\\ -\frac{4}{9}\\ \frac{4}{9}\end{pmatrix}$ forment une base des vecteurs de l'espace. Quelles sont les coordonnées de $\vec{X}=\vec{I}+\vec{J}$ dans la base $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$?

4.8.3 Coordonnées de points

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$. On considère les points $A(1,0)$ et $B(0,2)$. Calculer les coordonnées du symétrique P de l'origine par rapport à la droite AB.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, calculer les coordonnées du centre de gravité du cube de sommets :

$$A(0,0,0), B(0,1,0), C(1,0,0), D(1,1,0),$$
$$E(0,0,1), F(0,1,1), G(1,0,1), H(1,1,1).$$

4.8.4 Combinaisons linéaires de vecteurs et barycentres

On considère quatre points A,B,C,D non coplanaires de l'espace. On note K et L les milieux respectifs de AB et CD .

1. Montrer qu'il existe un unique point M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \ .$$

Déterminer ce point M en fonction de K et L.

2. On suppose maintenant que A,B,C sont fixes et que D décrit une droite Δ. Montrer que M décrit une droite que l'on précisera.

4.8.5 Centre du cercle inscrit dans un triangle

Dans un triangle ABC du plan, on note respectivement a,b,c les longueurs des côtés BC, AC et AB .

1. Montrer que le barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients b et c est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en A .

2. Déduire de ce qui précède que les bissectrices intérieures du triangle ABC se coupent en un point I qui est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et c.

3. Montrer que I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

4.8.6 Calcul d'éléments d'un cube

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube d'arête a. Calculer en fonction de a les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD'}\ ,$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC'},\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB'},\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{DB'},\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'C'}.$$

4.8.7 Calcul des éléments d'un triangle

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points $A(1,1,\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. On note C le symétrique de A par rapport à l'origine. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

4.8.8 Recherche de la nature d'un quadrilatère

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les quatre points :

$$A(13,-11,10), B(13,9,25), C(-7,18,13), D(-7,-2,-2) .$$

Montrer que ces quatre points forment un carré $ABCD$.

4.8.9 Recherche d'un lieu géométrique

Soit ABC un triangle. Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\left\| 2\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} \right\| = \left\| \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} \right\|$$

dans les cas suivants :

a) Si on est dans un plan ;

b) Si on est dans l'espace.

4.8.10 Points coplanaires

On considère cinq points A,B,C,D et E tels que :

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} .$$

1. Montrer que les droites BC et CE sont sécantes en un point que l'on déterminera.
2. En déduire que les points A,B,C,D et E sont coplanaires.

4.8.11 Identités métriques dans le parallélogramme

Considérons un parallélogramme $ABDC$, où A,B,C,D sont quatre points coplanaires.

1. Montrer que la somme des carrés des diagonales AC et BD est égale à la somme des carrés des côtés AB, BC, CD et DA.
2. Soit I le milieu de BD. Montrer que l'on a (*identité de ma médiane*) :

$$AI^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{BD^2}{4} .$$

4.8.12 Équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1,0,1)$ et $B(0,3,1)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{V}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan d'équation $x+y-2z=4$ et passant par B.

3. Donner une équation cartésienne du plan médiateur au segment $[A\,B]$.

4.8.13 Distance d'un point à un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan Π d'équation $x+2y-2z=1$. Déterminer la distance du point $A(3,2,1)$ au plan Π.

4.8.14 Points équidistants de deux plans

Soient Π et Π' deux plan de l'espace d'équations cartésiennes

$$\begin{cases}(\Pi) & x+y+z=1\\(\Pi') & x-z=0\end{cases}$$

1. Calculer la distance d'un point $M(x,y,z)$ respectivement au plan Π et au plan Π'.
2. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des points $M(x,y,z)$ équidistants des plans Π et Π' est la réunion de deux plans dont on déterminera des équations cartésiennes.

4.8.15 Projection orthogonale d'une droite sur un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équations :

$$\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-2z=0.\end{cases}$$

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ.
2. Montrer que la droite Δ coupe le plan Π d'équation : $x+2y+3z-6=0$ en un point que l'on déterminera.
3. Déterminer la projection orthogonale de la droite Δ sur le plan Π.

4.8.16 Plan passant par trois points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-1,1,3)\ ,\ B(0,2,-1)\ \text{et}\ C(2,1,1)\ .$$

1. Ces trois points sont-ils alignés ?

2. Déterminer une équation du plan passant par ces trois points.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

4.8.17 Distance d'un point à une droite

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, calculer la distance de l'origine à la droite passant par le point $A(-2,0,1)$ et de vecteur directeur $\vec{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.8.18 Aire et volume

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1,2,-1)\ ,\ B(4,0,1),\ C(1,3,-2) \text{ et } D(0,1,1)\ .$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. En déduire l'aire du prisme de sommets A,B,C,D.

4.8.19 Détermination d'une conique

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère l'ensemble Γ des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$y^2 - 2x^2 + 3x = 0\,.$$

Montrer que Γ est une hyperbole dont on précisera les coordonnées du centre et des sommets, l'excentricité, et l'équation cartésienne des asymptotes.

4.9 Exercices à traiter en travaux dirigés

4.9.1 Exercice 1

Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $A(5,3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite parallèle à Δ passant par le point A.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite perpendiculaire à Δ passant par le point A.
3. Calculer la distance du point A à la droite Δ.
4. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point A sur la droite Δ.

4.9.2 Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{U_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{U_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que tout vecteur $\vec{V}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{V} = x_1\overrightarrow{U_1} + x_2\overrightarrow{U_2} + x_3\overrightarrow{U_3}$. En déduire que $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ est une base des vecteurs de l'espace. Cette base est-elle orthonormée ?

2. On suppose maintenant que $\vec{V} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\|\vec{V}\|$ et $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

4.9.3 Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1,-1,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(-1,-4,0)$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite Δ passant par les points A et B.

2. Donner une équation paramétrique de la droite D passant par C et de vecteur directeur $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer si les droites Δ et D se rencontrent.

4.9.4 Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1,1,1)$ et on note H la projection orthogonale de A sur le plan Π d'équation cartésienne $2x - 2y + z - 3 = 0$.

1. Déterminer un point B de Π et un vecteur $\vec{V}$ orthogonal à Π dont on calculera $\|\vec{V}\|$.

2. Calculer $\overrightarrow{BA}.\vec{V}$. Montrer que $|\overrightarrow{BA}.\vec{V}| = \|\overrightarrow{AH}\|.\|\vec{V}\|$ et en déduire la distance de A au plan Π.

3. Calculer les coordonnées cartésiennes du point H.

4.9.5 Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{U}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminer une équation paramétrique du plan Π passant par $A(0,1,1)$ et engendré par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
3. Calculer $\vec{U}\wedge\vec{V}$ et donner une équation cartésienne du plan Π.
4. Les vecteurs de la forme $\vec{X}=\overrightarrow{OM}$ où M décrit le plan Π forment-ils un sous-espace vectoriel ?

4.9.6 Exercice 6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points $A(1,2,-1), B(4,0,1)$ et $C(1,3,-2)$.

1. Donner une équation paramétrique du plan Π passant par les points A,B et C.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et donner une équation cartésienne du plan Π.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ et en déduire le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

4.9.7 Exercice 7

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(3,1,3)$ et $B(-6,2,1)$. Soit G le point défini par $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$.

1. Montrer que $4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. En déduire que l'on a $4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ pour tout point M de l'espace.
2. Déduire de ce qui précède la nature de l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que

$$\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2.$$

3. Calculer les coordonnées cartésiennes du point G et la norme $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$ pour $M(x,y,z)$. En déduire une équation cartésienne de Σ.

4.9.8 Exercice 8

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(-1,1,3)$, $B(0,2,-1)$ et $C(2,2,1)$.

1. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?
2. Déterminer les coordonnées de l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (G est le centre de gravité du triangle ABC.)
3. Déterminer un vecteur $\vec{V}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan ABC et passant par G.
4. Déterminer une représentation paramétrique du plan Π passant par O,B et C.
5. Déterminer l'intersection du plan Π et de la droite Δ.

4.9.9 Exercice 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O, on considère la droite Δ de vecteur directeur $\vec{V}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ qui passe par le point $A(-2,0,1)$. On note H la projection orthogonale de l'origine O sur la droite Δ.

1. Calculer $\overrightarrow{AO}\wedge\vec{V}$.
2. Montrer que $\left\|\overrightarrow{AO}\wedge\vec{V}\right\|=2\left\|\vec{V}\right\|.\left\|\overrightarrow{OH}\right\|$ et en déduire la distance $d(O,\Delta)=\mathrm{OH}$ de l'origine O à la droite Δ.
3. Calculer les coordonnées de H.

4.9.10 Exercice 10

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation cartésienne $x+y+z=1$ et le plan Π d'équation cartésienne $x-z=0$.

1. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Calculer les distances $d(M,P)$ et $d(M,\Pi)$ de M aux plans P et Π.
2. En déduire que l'ensemble des points M équidistants de P et Π est la réunion de deux plans P_1 et P_2 que l'on déterminera.
3. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.

–

5 Applications linéaires et matrices

5.1 Applications linéaires

5.1.1 APPLICATIONS LINÉAIRES EN MATHÉMATIQUES

Parmi toutes les applications d'un espace vectoriel dans un autre, celles qui conservent les lois d'addition et de multiplication par un scalaire sont appelées *linéaires*. Elles sont utilisées partout en mathématiques, notamment dans la description des transformations géométriques de l'espace. Les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ont une structure simple. Elles permettent d'étudier les variations d'une fonction différentiable $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ au voisinage d'un point x_o grâce à l'approximation

$$f(x_o+h)-f(x_o)\approx df(x_o)(h),$$

où l'application linéaire $df(x_o):h \to df(x_o)(h)$ est la différentielle de f au point x_o.

Ce chapitre expose les notions de base de la théorie des applications linéaires. On sait qu'il est commode, pour manipuler un vecteur, d'utiliser ses coordonnées dans une base. De même, on manipule une application linéaire en utilisant sa « matrice », d'où l'intérêt de connaître les rudiments du calcul matriciel.

5.1.2 DÉFINITIONS

Soient E,F deux espaces vectoriels. On dit qu'une application $T:E \to F$ est *linéaire* si elle vérifie, pour tous $X,Y \in E$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, la relation :

$$T(\lambda X+\mu Y)=\lambda T(X)+\mu T(Y).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E=F$ on note $\mathcal{L}(E,E)=\mathcal{L}(E)$. Les applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ sont appelées *des formes linéaires* ; on note parfois $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})=E^*$.

Pour toute $T\in\mathcal{L}(E,F)$, on a $T(0_E)=0_F$ où 0_E désigne le vecteur nul de l'espace vectoriel E. Dans la suite, on notera simplement $0_E=0$.

EXEMPLE. *Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont linéaires :*

i) $T(x,y)=ay$ *où* $a\in\mathbb{R}$ *; ii)* $T(x,y)=xy$ *.*

i) L'application $T(x,y)=ay$ est linéaire car on a pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$:

$$T(\lambda_1(x_1,y_1)+\lambda_2(x_2,y_2))=T(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)=a(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)$$
$$=\lambda_1ay_1+\lambda_2ay_2=\lambda_1T(x_1,y_1)+\lambda_2T(x_2,y_2).$$

ii) L'application $T(x,y)=xy$ n'est pas linéaire car on a :

$$T(\lambda(x,y))=T(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2xy=\lambda^2T(x,y)\neq\lambda T(x,y)$$

si $\lambda^2\neq\lambda$ et $xy\neq 0$. ■

5.1.3 NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit $T\in\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble des vecteurs $X\in E$ tels que $T(X)=0$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le *noyau* de T. On note :

$$Ker(T)=\{X\in E|\ T(X)=0\}.$$

L'ensemble des vecteurs $Y\in F$ de la forme $Y=T(X)$ avec $X\in E$ est un sous-espace vectoriel de F appelé *l'image* de T. On pose :

$$\mathrm{Im}(T)=\{T(X)|\ X\in E\}.$$

On a :

THÉORÈME. *Soit* $T\in\mathcal{L}(E,F)$.

(i) T *est injective*[5] $\Leftrightarrow$ $Ker(T)=\{0\}$;

(ii) T *est surjective*[6] $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(T)=F$.

Lorsque $T\in\mathcal{L}(E,F)$ est bijective, c'est-à-dire injective et surjective, sa réciproque $T^{-1}:F\to E$ est définie par :

$$T^{-1}(X)=Y\ \Leftrightarrow\ X=T(Y).$$

L'application T^{-1} est automatiquement linéaire ; on dit que T est un *isomorphisme* de E sur F. Lorsqu'un isomorphisme existe entre deux espaces vectoriels E et F, on dit qu'ils sont *isomorphes*. Ils ont alors les mêmes propriétés.

---

[5] T est *injective* si, quels que soient X et Y dans E, la relation $T(X)=T(Y)$ implique $X=Y$.

[6] T est *surjective* si tout Y de F est de la forme $Y=T(X)$ avec X dans E.

EXEMPLE. *Calculer le noyau et l'image de l'application linéaire* $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$T(x,y) = (2x+y, y, x+y)\ .$$

Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Le noyau de T est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ \quad\;\; y=0 \\ x+y=0. \end{cases}$$

On a donc $x=y=0$ d'où $Ker(T)=\{0\}$ et l'application T est injective. Comme on a :

$$T(x,y) = x(2,0,1)+y(1,1,1)\ ,$$

l'image $\mathrm{Im}(T)$ de T est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1=(2,0,1)$ et $u_2=(1,1,1)$; c'est le plan d'équation $x+y-2z=0$. Comme cette image est distincte de $\mathbb{R}^3$, l'application T n'est pas surjective. ■

5.1.4 EXEMPLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Exemple 1. Soit $E=\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. L'application $T:E\to E$ qui associe à tout polynôme P son polynôme dérivé $T(P)=P'$ est une application linéaire. Le noyau de T est le sous-espace des polynômes constants. Comme il n'est pas réduit à 0, l'application T n'est pas injective. En revanche, T est surjective puisque son image est égale à $E=\mathbb{R}[X]$ (tout polynôme est la dérivée d'un polynôme.)

Contre-exemple 2. Soit encore $E=\mathbb{R}[X]$. L'application $T:E\to E$ qui associe à tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ son carré $T(P)=P^2$ n'est pas linéaire puisque l'on a :

$$T(\lambda P)=\lambda^2 T(P)\neq \lambda T(P) \text{ si } \lambda\notin\{0,1\} \text{ et } P\neq 0\ .$$

Dans les exemples qui suivent, les espaces vectoriels considérés seront $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ ou bien $\mathbb{R}^n$. Notons qu'une application $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est une fonction de n variables à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Une telle fonction est déterminée par m *applications composantes* $F_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définies par :

$$F(x_1,\dots,x_n) = (F_1(x_1,\dots,x_n), F_2(x_1,\dots,x_n),\dots, F_m(x_1,\dots,x_n))\ .$$

Exemple 3. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $T(x) = ax$, où $a = T(1)$. Une telle forme linéaire est un isomorphisme si et seulement si $a \neq 0$. Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, la *différentielle* de f au point $x \in I$ désigne la forme linéaire $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ définie par :

$$(1)\quad df(x)(h) = f'(x)h \text{ quel que soit } h \in \mathbb{R}.$$

Cette forme linéaire est un isomorphisme si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Si $f(x) = x$, on a $df(x)(h) = h$ de sorte que l'on note dx la forme linéaire $h \to h$. Avec ces notations, la relation *(1)* s'écrit encore :

$$df(x) = f'(x)dx.$$

On observera que, par définition de la dérivée d'une fonction, on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, d'où :

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h) = df(x)(h) + h\varepsilon(h)$$

où $h\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand $h \to 0$. Il s'ensuit que $df(x)(h)$ est une approximation linéaire en h de l'accroissement $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ de la fonction f.

> **EXEMPLE.** *Calculer la différentielle de l'application $f(x) = \cos x$ au point $x = \pi/4$. En déduire une estimation de la valeur de $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{100})$.*
>
> Comme $\cos'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, la différentielle de $f(x) = \cos x$ au point $x = \pi/4$ est l'application linéaire :
>
> $$h \to -\tfrac{\sqrt{2}}{2}h = d(\cos x)(\tfrac{\pi}{4})(h).$$
>
> On en déduit que :
>
> $$\cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{100}) \approx \cos(\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{1}{100} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \tfrac{1}{100}) = \tfrac{99\sqrt{2}}{200} \approx 0{,}7000357. \blacksquare$$

Exemple 4. Soit $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ une base de l'espace $\mathbf{E}_3$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{U_1} + x_2\overrightarrow{U_2} + x_3\overrightarrow{U_3} \in \mathbf{E}_3$, posons $T(\overrightarrow{X}) = (x_1, x_2, x_3)$. On définit ainsi une application linéaire $T : \mathbf{E}_3 \to \mathbb{R}^3$ qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Un tel isomorphisme permet d'identifier $\mathbf{E}_3$ à $\mathbb{R}^3$. Le choix d'une base permet de la même manière d'identifier $\mathbf{E}_2$ à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{E}_1$ à $\mathbb{R}$.

Exemple 5. Pour tout vecteur $\overrightarrow{V} \in \mathbf{E}_3$ de l'espace, l'application $T : \mathbf{E}_3 \to \mathbb{R}$ définie par $T(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}.\overrightarrow{V}$ est une forme linéaire sur $\mathbf{E}_3$. Cette forme linéaire a pour noyau l'espace des vecteurs orthogonaux à $\vec{V}$. Comme ce noyau n'est pas réduit à 0, la forme linéaire T n'est pas injective. Si $\vec{X}$ et $\vec{V}$ ont pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) et (v_1, v_2, v_3) dans un repère orthonormé, on a :

$$T(\vec{X}) = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 .$$

Identifions $\mathbf{E}_3$ à $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme qui associe à tout vecteur $\vec{X}$ le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ de ses composantes. Alors T devient la forme linéaire :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \in \mathbb{R} .$$

Exemple 6. Pour tout vecteur non nul $\vec{V} \in \mathbf{E}_3$ de l'espace, l'application $T : \mathbf{E}_3 \to \mathbf{E}_3$ définie par $T(\vec{X}) = \vec{X} \wedge \vec{V}$ est linéaire. Le noyau de $T \in \mathscr{L}(\mathbf{E}_3)$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{V}$; comme il n'est pas réduit à 0, l'application T n'est pas injective. Identifions $\mathbf{E}_3$ à $\mathbb{R}^3$ en associant à tout vecteur $\vec{X}$ le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ de ses composantes dans une base orthonormée directe. L'application T devient alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la formule :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 v_3 - x_3 v_2, x_3 v_1 - x_1 v_3, x_1 v_2 - x_2 v_1) .$$

5.1.5 ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Les applications linéaires apparaissent naturellement en géométrie (et en mécanique) dans la description des isométries. Une *isométrie* de l'espace est une application f associant à tout point M de l'espace un point $M' = f(M)$ de telle sorte que l'on ait :

$$distance(f(M), f(N)) = distance(M, N)$$

quels que soient les points M et N. Par exemple, la symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan sont des isométries de l'espace. Pour comprendre comment la description des isométries fait intervenir les applications linéaires, fixons une origine O de l'espace. Toute isométrie f définit alors une application $T : \mathbf{E}_3 \to \mathbf{E}_3$ par la formule :

$$T(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} .$$

Notons que $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Par ailleurs, puisque f est une isométrie, on a quels que soient $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{W} = \overrightarrow{ON}$:

$$\begin{aligned} \left\| T(\vec{V}) - T(\vec{W}) \right\| &= \left\| T(\overrightarrow{OM}) - T(\overrightarrow{ON}) \right\| = \left\| \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'N'} \right\| \\ &= \left\| \overrightarrow{N'M'} \right\| = \left\| \overrightarrow{NM} \right\| = \left\| \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} \right\| = \left\| \vec{V} - \vec{W} \right\|. \end{aligned}$$

Cette dernière relation implique, en vertu de l'identité de polarisation, que :

$$T(\overrightarrow{V}) . T(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V} . \overrightarrow{W}$$

quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ de $\mathbf{E}_3$. On dit que l'application T *conserve le produit scalaire*. En particulier, T transforme toute base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ en une base orthonormée

$$(\overrightarrow{f_1} = \mathrm{T}(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{f_2} = \mathrm{T}(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{f_3} = \mathrm{T}(\overrightarrow{e_3})).$$

Fixons une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Pour tout vecteur

$$\overrightarrow{X} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{3} \left[\overrightarrow{X} . \overrightarrow{e_i}\right] \overrightarrow{e_i},$$

on a en posant $T(\overrightarrow{X}) = \sum_{i=1}^{3} y_i \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{3} \left[T(\overrightarrow{X}).\overrightarrow{f_i}\right] \overrightarrow{f_i}$:

$$T(\sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{e_i}) = T(\overrightarrow{X}) = \sum_{i=1}^{3} \left[T(\overrightarrow{X}).\overrightarrow{f_i}\right] \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{3} \left[T(\overrightarrow{X}).\overrightarrow{T(e_i)}\right] \overrightarrow{f_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\overrightarrow{X}.\overrightarrow{e_i}\right] \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{f_i}$$

ce qui prouve que T est linéaire. On a ainsi établi :

THÉORÈME. *Toute isométrie $M \to M' = f(M)$ de l'espace est définie par une formule de la forme :*

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + T(\overrightarrow{OM}) ,$$

où T est une application linéaire qui conserve le produit scalaire et qui ne dépend pas du choix de l'origine O.

Ce résultat demeure évidemment pour les isométries du plan ou de la droite.

EXEMPLE. *Soient Ω un point du plan muni d'une origine O et notons $r_{\theta,\Omega}$ la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$. Pour tout point M du plan, on pose $M' = r_{\theta,\Omega}(M)$.*

a) Montrer que l'on a $\overrightarrow{\Omega M'} = R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$ où R_θ est une application linéaire que l'on décrira.

b) Quelle condition faut-il imposer au point Ω pour que l'application $T : \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_2$ définie par $T(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$ soit linéaire ?

a) On a $\overrightarrow{\Omega M'} = R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$, où $R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ par la rotation de centre Ω et d'angle θ. Si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\Omega M}$ a pour affixe z, le vecteur $R_\theta(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $z' = e^{i\theta} z$; comme l'application $z \to e^{i\theta} z$ est clairement linéaire, il en va de même de R_θ.

b) Si T est linéaire, on a $\vec{0} = T(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{OO'}$ où $O' = r_{\theta,\Omega}(O)$, ce qui exige $O = \Omega$ car θ est strictement compris entre 0 et 2π. Dans ce cas, $T = R_\theta$ et T est linéaire. ■

5.1.6 OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Somme et produit par un réel. Si $T, S \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les applications $T+S$ et λT de E dans F définies par :

$$(T+S)(X) = T(X) + S(X) \ , \ (\lambda T)(X) = \lambda T(X) \ \text{si} \ X \in E$$

sont encore des applications linéaires de E dans F. On a :

PROPOSITION. *L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ a une structure d'espace vectoriel pour les lois d'addition de deux applications linéaires et de multiplication d'une application linéaire par un nombre réel.*

EXEMPLE. *Montrer que toute application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme $T(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, où les a_i sont des réels donnés, est linéaire.*

Pour $i = 1,\ldots,n$ les applications $p_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ sont clairement linéaires. Puisque $T = a_1p_1 + \ldots + a_np_n$, cette application est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. ■

Composée d'applications linéaires. Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ et $S \in \mathscr{L}(F,G)$, alors l'application composée ST (notée aussi $S \circ T$) définie par :

$$(ST)(X) = S(T(X)) \ \text{si} \ X \in E$$

est une application linéaire de E dans G. On notera que la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. L'ensemble GL(E) des isomorphismes (linéaires) d'un espace vectoriel E sur lui-même, muni de la loi de composition, possède une structure particulière appelée *structure de groupe*. L'application identique Id vérifie $T \circ Id = Id \circ T = T$ et tout $T \in GL(E)$ possède un inverse $S = T^{-1} \in GL(E)$ vérifiant $T \circ S = S \circ T = Id$.

EXEMPLE. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note S_α la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ_α passant par O et faisant un angle α avec la droite Ox. Montrer que, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la composée $S_\beta \circ S_\alpha$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\beta - \alpha)$.*

Par définition, on a $S_\alpha(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$ où M' est l'ortho-symétrique de M par rapport à la droite Δ_α. Si M a pour affixe $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$, le point M' a pour affixe $z' = x' + iy' = |z'|e^{i\theta'}$ avec $|z'| = |z|$ (car $OM = OM'$) et $\frac{\theta+\theta'}{2} = \alpha$ (car l'angle entre la droite OM et Δ_α est égal à l'angle entre Δ_α et la droite OM'). On a donc $\theta' = 2\alpha - \theta$, d'où :

$$z' = |z'|e^{i\theta'} = |z|e^{i(2\alpha-\theta)} = e^{2i\alpha}|z|e^{-i\theta} = e^{2i\alpha}\bar{z}.$$

On en déduit que :

$$(S_\beta \circ S_\alpha)(\overrightarrow{OM}) = S_\beta(S_\alpha(\overrightarrow{OM})) = S_\beta(\overrightarrow{OM'}) = \overrightarrow{OM''}$$

où l'affixe $z'' = x'' + iy''$ de M'' vérifie :

$$z'' = e^{2i\beta}\overline{z'} = e^{2i\beta}\overline{e^{2i\alpha}\bar{z}} = e^{2i(\beta-\alpha)}z.$$

Ainsi, M'' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $2(\beta-\alpha)$ et $S_\beta \circ S_\alpha$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\beta-\alpha)$. ■

5.2 Applications linéaires et bases

5.2.1 IMAGE D'UNE BASE PAR UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient E, F deux espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons E de dimension finie égale à n et choisissons une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E. Pour tout $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a en vertu de la linéarité de T :

$$T(X) = T(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i).$$

Il s'ensuit que T est entièrement déterminée par la connaissance des vecteurs $\mathrm{T}(e_1),\ldots,\mathrm{T}(e_n)$. On notera que ces deniers engendrent $\mathrm{Im}(T)$. Inversement, si on se fixe des vecteurs $(V_1,\ldots,V_n)$ de F, il existe une (et une seule) application linéaire $T \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $T(e_i) = V_i$ pour $1 \le i \le n$. Cette application linéaire est définie par :

$$T(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{V}_i.$$

L'injectivité et la surjectivité de T se traduisent sur les vecteurs $\mathrm{T}(e_1),\ldots,\mathrm{T}(e_n)$:

THÉORÈME. *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie n et on considère une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E.*

(i) T est surjective si et seulement si les vecteurs $\mathrm{T}(e_1),\dots,\mathrm{T}(e_n)$ *engendrent* F *;*

(ii) T est injective si et seulement si les vecteurs $\mathrm{T}(e_1),\dots,\mathrm{T}(e_n)$ *sont linéairement indépendants ;*

(iii) T est un isomorphisme si et seulement si les vecteurs $\mathrm{T}(e_1),\dots,\mathrm{T}(e_n)$ *forment une base de F. Dans ce cas F est de dimension n.*

EXEMPLE. *On note $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :*

$$T(x,y)=(x+3y,2y,-x+y).$$

1. Montrer que les vecteurs $T(e_1)$ et $T(e_2)$ sont linéairement indépendants et déterminer l'équation du plan vectoriel qu'ils engendrent. L'application T est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. Déduire de ce qui précède que le système linéaire

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} x+3y=a \\ 2y=b \\ -x+y=c \end{cases}$$

admet une solution si et seulement si $a-2b+c=0$ et que cette solution est alors unique.

1. On a $T(e_1)=(1,0,-1)$ et $T(e_2)=(3,2,1)$, d'où :

$$T(e_1)\wedge T(e_2)=(2,-4,2).$$

Comme $T(e_1)\wedge T(e_2)$ n'est pas nul, les vecteurs $T(e_1)$ et $T(e_2)$ sont linéairement indépendants et T est injective. En outre, le plan engendré par ces deux vecteurs est orthogonal au vecteur $(2,-4,2)$; son équation est donc :

$$x-2y+z=0.$$

2. Le système linéaire *(1)* s'écrit encore $T(x,y)=(a,b,c)$. Il admet une solution si et seulement si (a,b,c) est dans l'image de T, c'est-à-dire si $a-2b+c=0$. Dans ce cas, la solution (x,y) est unique car T est injective. On vérifie immédiatement que l'on a :

$$x=\frac{2a-3b}{2},\ y=\frac{b}{2}.\ \blacksquare$$

5.2.2 EXPRESSION ANALYTIQUE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient E,F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $T\in\mathscr{L}(E,F)$. Choisissons une base $(e_1,...,e_n)$ de E et une base $(f_1,...,f_m)$ de F. Soit

$$T(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j$$

la décomposition du vecteur $T(e_i)$ dans la base $(f_1,...,f_m)$. Pour tout vecteur $X=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E$, on a :

$$\begin{aligned}T(X)&=T(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iT(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j\\&=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right)f_j.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si $T(X)=Y$ a pour décomposition $Y=\sum_{j=1}^{m}y_jf_j$ dans la base $(f_1,...,f_m)$, on a :

$$y_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i \text{ pour } 1\le j\le m \ .$$

On obtient ainsi l'expression analytique de $T\in\mathscr{L}(E,F)$ dans les bases $(e_1,...,e_n)$ de E et $(f_1,...,f_m)$ de F.

THÉORÈME. *Soit $T\in\mathscr{L}(E,F)$. Fixons une base $(e_1,...,e_n)$ de E et une base $(f_1,...,f_m)$ de F. Soient $(a_{1i},a_{2i},...,a_{mi})$ les coordonnées de $T(e_i)$ dans la base $(f_1,...,f_m)$. Alors, si un vecteur X de E a pour coordonnées $(x_1,...,x_n)$ dans la base $(e_1,...,e_n)$, les coordonnées $(y_1,...,y_m)$ de $Y=T(X)$ dans la base $(f_1,...,f_m)$ sont données par les formules :*

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n.\end{cases}$$

EXEMPLE. *Soit $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbf{E}_3$ et posons $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$. Déterminer l'expression analytique dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de l'application linéaire $T:\mathbf{E}_3\to\mathbf{E}_3$ définie par :*

$$T(\overrightarrow{X})=\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{V} \ .$$

On a :

$$T(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1}\wedge(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3})=-\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$$

$$T(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \wedge (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}$$
$$T(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} \wedge (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} .$$

Il s'ensuit que, si l'on pose $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$ et $T(\overrightarrow{X}) = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}$, on a :

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_3 \\ y_3 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

En utilisant cette expression analytique de T , on vérifie que $Ker(T)$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{V}$ et que $\mathrm{Im}(T)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$. ■

5.3 Matrices

5.3.1 DÉFINITION DES MATRICES

On appelle *matrice (réelle)* à m lignes et n colonnes un tableau rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de nombres réels a_{ij} comportant m lignes et n colonnes. On note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes. Lorsque $n = m$, on écrit $M_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$; les éléments de $M_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices *carrées* d'ordre n . Une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

est appelée une *matrice ligne* ; une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

est appelée une *matrice colonne.*

5.3.2 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient E,F deux espaces vectoriels de dimension finies et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Choisissons une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E, une base $(f_1,\ldots,f_m)$ de F et notons $(a_{1i}, a_{2i},\ldots, a_{mi})$ les coordonnées de $T(e_i)$ dans la base $(f_1,\ldots,f_m)$. Nous avons montré que, si un vecteur X de E a pour coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$, les coordonnées $(y_1,\ldots,y_m)$ de $Y=T(X)$ dans la base $(f_1,\ldots,f_m)$ sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

La matrice à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est appelé la *matrice de l'application linéaire* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les bases $(e_1,\ldots,e_n)$ de E et $(f_1,\ldots,f_m)$ de F. Elle détermine complètement l'application linéaire T.

On notera que y_1 s'obtient en sommant les produits des éléments successifs de la première ligne de la matrice A par les éléments correspondants de la matrice colonne des coordonnées de X. En considérant les produits analogues pour les différentes lignes de la matrice A, on obtient la matrice colonne des coordonnées de $Y=T(X)$. On dit que la matrice colonne de Y est le *produit de la matrice* A *par la matrice colonne de* X et on écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si E et F sont des espaces vectoriels munis respectivement des bases $(e_1,\ldots,e_n)$ et $(f_1,\ldots,f_m)$ de F, toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice dans ces bases d'une unique application linéaire $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Lorsque $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^m$, l'application linéaire $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est de la forme :

$$T(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_m)$$

avec $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la matrice de T dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

EXEMPLE. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$. *Déterminer la matrice d'une rotation R_θ de centre O et d'angle θ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ de* $\mathbf{E}_2$ *et donner son expression analytique.*

On a :

$$R_\theta(\vec{i})=\cos\theta\ \vec{i}+\sin\theta\ \vec{j}\quad \text{et}\quad R_\theta(\vec{j})=-\sin\theta\ \vec{i}+\cos\theta\ \vec{j}$$

de sorte que la matrice de R_θ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est :

$$A_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{X}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $T(\vec{X})=x'\vec{i}+y'\vec{j}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\, x-\sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x+\cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

et R_θ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x'=\cos\theta\, x-\sin\theta\, y \\ y'=\sin\theta\, x+\cos\theta\, y. \end{cases} \blacksquare$$

5.3.3 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Pour définir les opérations sur les matrices, on se ramène systématiquement aux opérations sur les applications linéaires.

Somme de deux matrices. Soient E et F des espaces vectoriels munis respectivement des bases $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_m)$. Considérons deux applications linéaires $T,S\in\mathcal{L}(E,F)$ et notons $A=\left(a_{ji}\right)$, $B=\left(b_{ji}\right)$ leurs matrices dans ces bases. On a :

$$(T+S)(e_i)=T(e_i)+S(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}f_j=\sum_{j=1}^{m}(a_{ji}+b_{ji})f_j$$

de sorte que la matrice $C=(c_{ji})$ de $T+S$ est donnée par $c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$. Ceci conduit à définir la somme de deux matrices $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B=\left(b_{ij}\right)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en posant :

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(c_{ij}) \text{ avec } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Produit d'une matrice par un scalaire. De même, on définit le produit d'une matrice $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ par $\lambda\in\mathbb{R}$ en posant :

$$\lambda(a_{ij})=(c_{ij}) \text{ avec } c_{ij}=\lambda a_{ij}.$$

Produit de deux matrices. Soient E,F et G des espaces vectoriels munis respectivement des bases $(e_1,\dots,e_n),(f_1,\dots,f_m)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ de F . Considérons deux applications linéaires $T\in\mathfrak{L}(E,F)$, $S\in\mathfrak{L}(F,G)$ et notons $A=\left(a_{ji}\right)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B=\left(b_{ji}\right)\in M_{q,m}(\mathbb{R})$ leurs matrices dans ces bases. On a :

$$\begin{aligned}(ST)(e_i)&=S(T(e_i))=S\left(\sum\nolimits_{k=1}^{m}a_{ki}f_k\right)=\sum\nolimits_{k=1}^{m}a_{ki}S(f_k)\\&=\sum\nolimits_{k=1}^{m}a_{ki}\sum\nolimits_{j=1}^{q}b_{jk}g_j=\sum\nolimits_{j=1}^{q}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{m}b_{jk}a_{ki}\right)g_j\end{aligned}$$

de sorte que la matrice $C=(c_{ji})$ de ST est donnée (dans les bases considérées) par :

$$c_{ji}=\sum\nolimits_{k=1}^{m}b_{jk}a_{ki}.$$

Ceci conduit à définir le produit des matrices BA comme la matrice $C=(c_{ji})\in M_{q,n}(\mathbb{R})$.

DÉFINITION. *Le produit AB de deux matrices $A=(a_{ij})\in M_{q,m}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . La matrice $AB=\left(c_{ij}\right)\in M_{q,n}(\mathbb{R})$ a un nombre de lignes égal à celui de A , un nombre de colonnes égal à celui de B et son coefficient c_{ij} est donné par la formule :*

$$c_{ij}=\sum\nolimits_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}.$$

On notera que :

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}$$

est le produit matriciel d'une matrice ligne (celle de la $i-$ ème ligne de la matrice A) par une matrice colonne (celle de la $j-$ ème colonne de la matrice B.)

EXEMPLE. *Soit à calculer les produits AB et BA, où A et B sont les matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

On effectue le produit AB en plaçant B en haut et à droite de A de manière à faciliter le calcul des produits d'une ligne de A par une colonne de B :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=B \\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=AB.\end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=A \\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 4\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=BA.\ \blacksquare\end{array}$$

5.4 Annexe : différentielles et formes linéaires

5.4.1 FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, par exemple :

$$f(x,y)=2x^2y+3xy^2+4x\,.$$

Pour étudier les variations de f au voisinage d'un point $X_o=(x_o,y_o)$, on cherche à exprimer l'accroissement

$$\Delta f=f(x_o+\Delta x,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)$$

correspondant à de petits accroissements Δx et Δy des variables x et y sous la forme :

$$\Delta f = f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o, y_o) = L(\Delta x, \Delta y) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

où $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction *linéaire* de l'accroissement total $\Delta X = (\Delta x, \Delta y)$, et où $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ est une quantité négligeable au regard de Δx et Δy. Si L est linéaire, il existe des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que :

$$L(h,k) = Ah + Bk$$

et la question est donc de trouver deux constantes réelles A, B telles que l'on ait :

$$\frac{f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o, y_o) - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0$$

quand $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$.

DÉFINITION. *S'il existe deux constantes réelles A, B telles que l'on ait :*

$$f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o, y_o) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$$

avec $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $h,k \to 0$, on dit que f est différentiable au point (x_o, y_o). La forme linéaire $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \to Ah + Bk \in \mathbb{R}$ (qui est unique) est appelée la différentielle de f au point (x_o, y_o) et notée $df(x_o, y_o)$.

Exemple. Considérons la fonction $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 + 4x$ au voisinage d'un point (x_o, y_o). On a :

$$\begin{aligned} f(x_o+h, y_o+k) &= 2(x_o+h)^2(y_o+k) + 3(x_o+h)(y_o+k)^2 + 4(x_o+h) \\ &= f(x_o, y_o) + \left[\left(4x_oy_o + 3y_o^2 + 4\right)h + \left(2x_o^2 + 6x_oy_o\right)k\right] \\ &\quad + \left[y_oh^2 + 2(x_o+y_o)hk + x_ok^2 + (h+k)hk\right]. \end{aligned}$$

Comme le terme $\left[y_oh^2 + 2(x_o+y_o)hk + x_ok^2 + (h+k)hk\right]$ est négligeable au regard de h et k quand $h,k \to 0$, la fonction f est différentiable au point (x_o, y_o) et on a $df(x_o, y_o)(h,k) = L(h,k) = Ah + Bk$ avec :

$$A = 4x_oy_o + 3y_o^2 + 4 \text{ et } B = 2x_o^2 + 6x_oy_o.$$

5.4.2 DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLE

Soit f une fonction différentiable au point (x_o, y_o). Si $L(h,k) = Ah + Bk$ est sa différentielle en (x_o, y_o), on a :

$$\frac{f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o, y_o) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

quand $h,k \to 0$. En faisant $k = 0$, on obtient :

$$\frac{f(x_o+h,y_o)-f(x_o,y_o)-Ah}{h}\to 0,$$

ce qui signifie que la fonction $x\to f(x,y_o)$ est dérivable au point x_o et de dérivée égale à A. En d'autres termes, la fonction $x\to f(x,y_o)$ (la seconde variable est figée, égale à y_o) admet une dérivée par rapport à x au point x_o dont la valeur est égale à A. On dit que f admet une *dérivée partielle* par rapport à x au point (x_o,y_o), et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)=\frac{d}{dx}(x\to f(x,y_o))(x_o).$$

On a ainsi $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)$. En échangeant les rôles de x et y on voit que f admet aussi une *dérivée partielle* par rapport à y au point (x_o,y_o) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)=\frac{d}{dy}(y\to f(x_o,y))(y_o),$$

et que $B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)$. On a donc :

THÉORÈME. *Si f est différentiable au point (x_o,y_o), elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y en ce point et on a :*

$$f(x_o+h,y_o+k)-f(x_o,y_o)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)k+\sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$$

avec $\varepsilon(h,k)\to 0$ quand $h,k\to 0$. La différentielle de f au point (x_o,y_o) est alors la forme linéaire :

$$df(x_o,y_o):(h,k)\in\mathbb{R}^2\to\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)k\in\mathbb{R}\ .$$

Notation différentielle. Si f est différentiable au point (x_o,y_o), on a :

$$df(x_o,y_o)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)k.$$

Ainsi, les fonctions $(x,y)\to x=p(x,y)$ et $(x,y)\to y=q(x,y)$ sont différentiables et on a :

$$dp(x_o,y_o)(h,k)=h,\ dq(x_o,y_o)(h,k)=k$$

Comme la différentielle $dp(x_o,y_o)$ de la fonction première coordonnée $(x,y)\to x$ ne dépend pas du point (x_o,y_o), on la note dx. Pour la même raison, on note dy la différentielle de la fonction $(x,y)\to y$ et on a finalement :

$$dx(h,k)=h \ , \ dy(h,k)=k \ .$$

Mais alors, la formule :

$$df(x_o,y_o)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)k$$

s'écrit encore :

$$df(x_o,y_o)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)dx(h,k)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)dy(h,k)$$

ce qui signifie que l'on a, dans la base (dx,dy) de l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$:

$$df(x_o,y_o)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)dy \ .$$

Si l'on ne fixe pas le point (x_o,y_o) et que l'on considère au contraire un point générique (x,y), la formule ci-dessus s'écrit :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \ .$$

EXEMPLE. *On considère la fonction différentiable $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+2x\sin y$. Calculer $df(x,y)$. En déduire une approximation de $f(1+\frac{1}{100},\frac{1}{100})$.*

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2\sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x\cos y$, d'où :

$$df(x,y)=\left(2x+2\sin y\right)dx+\left(2x\cos y\right)dy \ .$$

La différentielle de f au point (x,y) est donc la forme linéaire $(h,k)\in\mathbb{R}^2\to\left(2x+2\sin y\right)h+\left(2x\cos y\right)k\in\mathbb{R}$. En particulier, pour $(x,y)=(1,0)$, on obtient :

$$df(1,0)(h,k)=2h+2k \ .$$

En utilisant l'approximation :

$$f(1+\tfrac{1}{100},\tfrac{1}{100})\approx f(1,0)+df(1,0)(\tfrac{1}{100},\tfrac{1}{100}) \ ,$$

on obtient :

$$f(1+\tfrac{1}{100},\tfrac{1}{100})\approx 1+\tfrac{4}{100}=1{,}04 \ . \ \blacksquare$$

5.5 Exercices

5.5.1 Formes linéaires sur la droite réelle

Déterminer les formes linéaires $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient $T\circ T=2T$.

5.5.2 Formes linéaires sur les espaces de polynômes

On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Déterminer, parmi les applications $T:E=\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ suivantes, celles qui sont linéaires :

a) $T(P)=P'$; b) $T(P)=2P(1)+P(-1)$; c) $T(P)=2P(1)-1$;

d) $T(P)=\int_0^1 P(t)dt$; e) $T(P)=\int_0^1 P(t)^2 dt$; f) $T(P)=\int_0^1 P(t)(t^2+t+1)\,dt$.

5.5.3 Similitudes du plan

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application $(x,y)\in\mathbb{R}^2\to x+iy\in\mathbb{C}$. Soient a,b deux nombres complexes avec $a\neq 0$. L'application $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $T(z)=az+b$ induit une application $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ via l'identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

1. Montrer que T est linéaire si et seulement si $b=0$.
2. On suppose $b=0$ et on note $a=\rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique du nombre complexe a. Montrer que T est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport ρ. En déduire, pour tout entier $n\geq 1$ et tout vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'expression de $T^n(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

5.5.4 Composées de symétries orthogonales

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites D et Δ d'équations respectives $y=0$ et $y=x$. On note S_D et S_Δ les symétries orthogonales par rapport à D et Δ.

1. Montrer que $S_D(x\vec{i}+y\vec{j})=x\vec{i}-y\vec{j}$ et que $S_\Delta(x\vec{i}+y\vec{j})=y\vec{i}+x\vec{j}$. En déduire que S_D et S_Δ sont des applications linéaires.
2. Montrer que $S_D\circ S_D=I$ et $S_\Delta\circ S_\Delta=I$, où I désigne l'application identique. En déduire que S_D et S_Δ sont des isomorphismes.
3. Montrer que les composées $S_D\circ S_\Delta$ et $S_\Delta\circ S_D$ sont des rotations de centre O dont on déterminera les angles.

5.5.5 Une application linéaire nilpotente

Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire et une seule $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ telle que $T(e_1)=0, T(e_2)=e_1, T(e_3)=e_2$.
2. Montrer que $T^3=T\circ T\circ T=0$.
3. Déterminer le noyau et l'image de T .
4. Soit λ un réel non nul. Montrer qu'il n'existe pas de vecteur non nul $X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $T(X)=\lambda X$.

5.5.6 Matrices d'une application linéaire dans différentes bases

Soit $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$T(x,y,z)=(2x-z,-x+3y+z,z)\ .$$

1. Montrer que T est une application linéaire. Déterminer la matrice A de T dans la base canonique $\left(e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le déterminant de la matrice A. En déduire que A est inversible.

3. On considère les vecteurs $f_1=(1,0,1), f_2=(1,1,0), f_3=(0,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que ces vecteurs forment une base $B=(f_1,f_2,f_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de T dans la base $B=(f_1,f_2,f_3)$.

5.5.7 Produits de matrices nilpotentes

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'on a $A^n=B^n=0$ pour tout entier $n\geq 2$.

2. Montrer que l'on a $(AB)^n=AB\neq 0$ et $(BA)^n=0$ pour tout entier $n\geq 1$.

5.5.8 Puissances d'une matrice

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'on a $A^2=A+2I$ où I est la matrice identité.

2. En déduire le calcul de A^n pour tout entier $n\geq 1$.

5.5.9 Inverses de matrices

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A+B=AB$.

2. En déduire que $I-A$ et $I-B$ sont inversibles et calculer leurs inverses.

5.5.10 Une équation matricielle

Déterminer (s'il en existe) les matrices $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ telles que :

$$X^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

5.5.11 Trace des matrices

Pour toute matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $Tr(A)=a+d$ et on dit que $Tr(A)$ est la *trace* de la matrice A.

1. Montrer que la trace $Tr: A \to Tr(A)$ est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie :

$$Tr(AB)=Tr(BA) \text{ quelles que soient } A,B\in M_2(\mathbb{R}).$$

2. Montrer que toute forme linéaire $T: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation $T(AB)=T(BA)$ quelles que soient $A,B \in M_2(\mathbb{R})$ est un multiple de la trace Tr, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$T(A)=\lambda Tr(A) \text{ quelle que soit } A\in M_2(\mathbb{R}).$$

5.5.12 Matrice d'une différentielle

Calculer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la différentielle au point $(1,0)$ de la fonction $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=2xy+\sin(2xy+\pi)+x^2.$$

5.5.13 Différentielle et approximation des fonctions

On considère l'ensemble $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<4\right\}$ et la fonction $f:D\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$. On note Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, et M_o, M_1 les points de coordonnées $(1,1,f(1,1))$ et $(1+\frac{1}{100},1+\frac{1}{1000},f(1+\frac{1}{100},1+\frac{1}{1000}))$.

1. Montrer que Σ est une portion de la sphère de centre O et de rayon 2 qui contient M_o et M_1.
2. Montrer que le plan tangent à Σ au point M_o a pour équation :

$$x+y+\sqrt{2}z-4=0.$$

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ et la valeur $df(1,1)(h,k)\in\mathbb{R}$ de la différentielle $T=df(1,1)$ de f au point $(1,1)\in D$ sur le vecteur $(h,k)\in\mathbb{R}^2$.
4. En utilisant la question 3, donner une valeur approchée de $f(1+\frac{1}{100},1+\frac{1}{1000})$.
5. On note P le point d'intersection de la parallèle à l'axe Oz passant par le point M_1 avec le plan tangent à Σ au point M_o. Montrer que la coordonnée z_P de P sur l'axe Oz est égale à $f(1,1)+df(1,1)(\frac{1}{100},\frac{1}{1000})$. En déduire que $z_P-z_{M_o}=df(1,1)(\frac{1}{100},\frac{1}{1000})$.

5.6 Exercices à traiter en travaux dirigés

5.6.1 Exercice 1

1. Parmi les applications $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes indiquer, en justifiant votre réponse, celles qui sont linéaires :
a) $T(x,y)=2x+y$; b) $T(x,y)=\sin x$; c) $T(x,y)=3x+6$; d) $T(x,y)=xy$.
2. Parmi les applications $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes indiquer, en justifiant votre réponse, celles qui sont linéaires :
a) $T(x,y)=(2x+3y,3x-5y)$; b) $T(x,y)=(x^2,x+y)$; c) $T(x,y)=(0,0)$.
3. Parmi les applications $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes indiquer, en justifiant votre réponse, celles qui sont linéaires :
a) $T(x,y,z)=(2x+3y+z,\, x-z,\, 3x+y-5z)$; b) $T(x,y,z)=(x,\, yz,\, xy)$.

5.6.2 Exercice 2

On considère les applications $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$T(x,y)=(2x+y,-y,x-2y)\ ,\ S(x,y,z)=(x-z,2y)\,.$$

1. Montrer que T et S sont des applications linéaires.
2. Déterminer le noyau et l'image de ces deux applications linéaires. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
3. Calculer les applications composées $S\circ T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $T\circ S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

5.6.3 Exercice 3

On identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ en choisissant un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit Δ la droite d'équation $y=ax$ où le réel a est non nul.

1. On note P_Δ l'application qui associe au vecteur $\overrightarrow{OM}=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ le vecteur $\overrightarrow{OH}=(x',y')$ de $\mathbb{R}^2$, où H désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la droite Δ. Calculer (x',y') en fonction de (x,y) et en déduire que P_Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le noyau et l'image de P_Δ. L'application P_Δ est-elle injective, surjective ?
3. Déterminer l'application composée $P_\Delta \circ P_\Delta$.
4. On note S_Δ l'application qui associe au vecteur $\overrightarrow{OM}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ le vecteur $\overrightarrow{ON}=(X,Y)\in\mathbb{R}^2$, où N désigne le symétrique de M par rapport à la droite Δ. Calculer (X,Y) en fonction de (x,y) et en déduire que S_Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que l'on a $S_\Delta = 2P_\Delta - Id$ où $Id(x,y)=(x,y)$ est l'application identité.

5.6.4 Exercice 4

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base canonique $(e_1,...,e_n)$. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes, dans les bases canoniques correspondantes :

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y)=(2x+3y,3x-5y)$;

b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(x,y)=x-3y$;

c) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x,y)=(2x-y,x+y,x-y)$;

d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y,z)=(x+y,y-z)$.

5.6.5 Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même dont les matrices dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont les suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Indiquer lesquelles de ces applications linéaires sont des symétries, des projections ou des rotations.

5.6.6 Exercice 6

Soit $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs $u_1=(1,1), u_2=(-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer la matrice de T dans la base (u_1,u_2). En déduire la nature géométrique de l'application $T-Id$, où Id est l'application identique de $\mathbb{R}^2$.

5.6.7 Exercice 7

Soit $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs $u_1=(1,1,1), u_2=(0,1,0), u_3=(1,0,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner la matrice de T dans la base (u_1, u_2, u_3).

5.6.8 Exercice 8

Indiquer quels sont les produits qu'il est possible de former avec deux des matrices suivantes, et en calculer au moins cinq :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.6.9 Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ de A. En déduire que A est inversible.

2. Calculer la matrice inverse $B = A^{-1}$ (elle vérifie $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

3. Montrer que le système de deux équations linéaires :

$$(1) \quad \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

s'écrit matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. En utilisant la question 2, montrer que le système *(1)* admet une unique solution (x, y) que l'on calculera.

5.6.10 Exercice 10

1. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et AC. Que remarque-t-on ?

—