TD 4 – RÈGLE DE LA CHAINE POUR LA DÉRIVÉE DES COMPOSÉES

Exercice 16 – Règle de la chaine
Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions dérivables en tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ b) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ c) $h(x,y) = \left(\dfrac{x}{x+y}, \dfrac{y}{x-y}\right)$

Corrigé

a) Pour $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$, appelons $\tilde{f}(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$, alors :

$$\tilde{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\ y'(t) = \big(2x(t) + 3y(t)\big)\ x'(t) + \big(3x(t) + 10y(t)\big)\ y'(t).$$

b) Pour $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, appelons $\tilde{g}(t) = g\big(x(t), y(t)\big)$, alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) \ + \ \frac{\partial g}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) \\
&= \frac{2x(t)}{\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2}\ x'(t) \ + \ \frac{2y(t)}{\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2}\ y'(t) = \frac{2\big(x(t)\, x'(t) + y(t)\, y'(t)\big)}{\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2}
\end{aligned}$$

c) Soit $\tilde{h}(t) = \Big(h_1\big(x(t), y(t)\big),\ h_2\big(x(t), y(t)\big)\Big)$ avec $h_1(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ et $h_2(x,y) = \dfrac{y}{x-y}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{h}'(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) \ + \ \frac{\partial h}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) \\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) \ + \ \frac{\partial h_1}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\ ,\ \frac{\partial h_2}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) \ + \ \frac{\partial h_2}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\right) \\
&= \left(\frac{y(t)\, x'(t) - x(t)\, y'(t)}{\big(x(t) + y(t)\big)^2}\ ,\ \frac{x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t)}{\big(x(t) - y(t)\big)^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 17 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, de variables (x,y). Trouver la dérivée de f par rapport à t quand

a) $x = \sin t$ et $y = \cos t$ b) $x = e^{-t}$ et $y = e^t$

Corrigé

a) Pour $x = \sin t$ et $y = \cos t$, appelons $\tilde{f}(t) = f\big(\sin t, \cos t\big)$, alors :

$$\tilde{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin t, \cos t)\ \cos t - \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t, \cos t)\ \sin t.$$

b) Pour $x = e^{-t}$ et $y = e^t$, appelons $\hat{f}(t) = f(e^{-t}, e^t)$, alors :

$$\hat{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}\big(e^{-t}, e^t\big)\, e^{-t} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(e^{-t}, e^t\big)\, e^t.$$

Exercice 18 – Règle de la chaine
Soit f une fonction de plusieurs variables à valeur réelle, de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction des dérivées partielles de f, dans les cas suivants :

a) $g(x,y,z) = f(x^2+3yz, y^2-z^2)$
b) $g(x,y,z) = \big(f(x^2+3yz, y^2-z^2)\big)^2$
c) $g(x,y,z) = \ln\big(f(x^2+3yz, y^2-z^2)\big)$
d) $g(x,y) = f(\sin x, \sin y, xy^2)$
e) $g(x,y) = \ln\big(f(\sin x, \sin y, xy^2)\big)$
f) $g(x,y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}$

Corrigé

Premiére méthode : avec les matrices Jacobiennes

Les dérivées partielles d'une fonction sont les entrées de sa matrice jacobienne, et comme la matrice jacobienne d'une composée est le produit des matrices jacobienne, dans les exemples donnés, il suffira d'écrire sous forme de composition les fonctions proposées puis effectuer le simple produit matriciel. On défini :

- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x,y,z) = (x^2+3yz, y^2-z^2)$,
- $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ par $G(x,y) = (\sin x, \sin y, xy^2)$.

On a

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2+3yz)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+3yz)}{\partial y} & \frac{\partial(x^2+3yz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial x} & \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial y} & \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3z & 3y \\ 0 & 2y & -2z \end{pmatrix},$$

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\sin x)}{\partial x} & \frac{\partial(\sin x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\sin y)}{\partial x} & \frac{\partial(\sin y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} & \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos y \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

a) On pose $p = (x,y,z)$ et on remarque que $g = f \circ F$. Appelons (u,v) les variables de f. Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) & \frac{\partial g}{\partial z}(p) \end{pmatrix} &= J_g(p) \\
&= J_{f\circ F}(p) \\
&= J_f\big(F(p)\big)\ J_F(p) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}\big(F(p)\big) & \frac{\partial f}{\partial v}\big(F(p)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 3z & 3y \\ 0 & 2y & -2z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x\frac{\partial f}{\partial u}\big(F(p)\big) & 3z\frac{\partial f}{\partial u}\big(F(p)\big) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}\big(F(p)\big) & 3y\frac{\partial f}{\partial u}\big(F(p)\big) - 2z\frac{\partial f}{\partial v}\big(F(p)\big) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des matrices, puis en substituant p et $F(p)$ par leur valeur respective, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x^2+3yz, y^2-z^2)\Big) = 2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+3yz, y^2-z^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(f(x^2+3yz, y^2-z^2)\Big) = 3z\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+3yz, y^2-z^2) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+3yz, y^2-z^2) \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(f(x^2+3yz, y^2-z^2)\Big) = 3y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+3yz, y^2-z^2) - 2z\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+3yz, y^2-z^2),
\end{aligned}$$

ce qui est très (très) lourd (à écrire) !

b) La fonction donnée est juste la composée de la fonction du a) avec la fonction carrée.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\big(f(x^2+3yz,y^2-z^2)\big)^2\Big)\\ &= 2f(x^2+3yz,y^2-z^2)\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x^2+3yz,y^2-z^2)\Big)\\ &= 4xf(x^2+3yz,y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+3yz,y^2-z^2). && \text{(vu a))}\end{aligned}$$

On fait de même pour obtenir $\frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial z}$.

c) La fonction donnée est juste la composée de la fonction du a) avec la fonction ln.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\big(f(x^2+3yz,y^2-z^2)\big)\Big)\\ &= \frac{1}{f(x^2+3yz,y^2-z^2)}\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x^2+3yz,y^2-z^2)\Big)\\ &= \frac{2x}{f(x^2+3yz,y^2-z^2)}\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+3yz,y^2-z^2). && \text{(vu a))}\end{aligned}$$

On fait de même pour obtenir $\frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial z}$.

d) On procède comme précédement. On pose $p=(x,y)$ et on remarque que $g=f\circ G$. On appelle (u,v,w) les variables de la fonction f. On a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p)\end{pmatrix} &= J_g(p)\\ &= J_{f\circ G}(p)\\ &= J_f\big(G(p)\big)\ J_G(p)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\big(G(p)\big) & \frac{\partial f}{\partial v}\big(G(p)\big) & \frac{\partial f}{\partial w}\big(G(p)\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & 0\\ 0 & \cos y\\ y^2 & 2xy\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos x\frac{\partial f}{\partial u}\big(G(p)\big)+y^2\frac{\partial f}{\partial w}\big(G(p)\big) & \cos y\frac{\partial f}{\partial v}\big(G(p)\big)+2xy\frac{\partial f}{\partial w}\big(G(p)\big)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En identifiant les coéfficients des matrices, puis en substituant $p=(x,y)$ et $G(p)=(\sin x,\sin y,xy^2)$ par leur valeur respective, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\sin x,\sin y,xy^2)\Big) = \cos x\frac{\partial f}{\partial u}(\sin x,\sin y,xy^2)+y^2\frac{\partial f}{\partial w}(\sin x,\sin y,xy^2)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(f(\sin x,\sin y,xy^2)\Big) = \cos y\frac{\partial f}{\partial v}(\sin x,\sin y,xy^2)+2xy\frac{\partial f}{\partial w}(\sin x,\sin y,xy^2),\end{aligned}$$

ce qui est encore très (très) lourd (à écrire) !

e) La fonction donnée est la composée de la fonction du d) avec la fonction ln. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\big(f(\sin x,\sin y,xy^2)\big)\Big)\\ &= \frac{1}{f(\sin x,\sin y,xy^2)}\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\sin x,\sin y,xy^2)\Big)\\ &= \frac{1}{f(\sin x,\sin y,xy^2)}\left(\cos x\frac{\partial f}{\partial u}(\sin x,\sin y,xy^2)+y^2\frac{\partial f}{\partial w}(\sin x,\sin y,xy^2)\right). && \text{(vu d))}\end{aligned}$$

On fait de même pour obtenir $\frac{\partial g}{\partial y}$.

f) La fonction donnée est la composée de la fonction du d) avec la fonction exp. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{f(\sin x,\sin y,xy^2)}\Big)\\ &= e^{f(\sin x,\sin y,xy^2)}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\sin x,\sin y,xy^2)\Big)\\ &= e^{f(\sin x,\sin y,xy^2)}\left(\cos x\frac{\partial f}{\partial u}(\sin x,\sin y,xy^2)+y^2\frac{\partial f}{\partial w}(\sin x,\sin y,xy^2)\right). \qquad \text{(vu d))}\end{aligned}$$

On fait de même pour obtenir $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Deuxiéme méthode : calcul direct

Pour fixer la notation des variables de f, on pose $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ (u,v)\longmapsto f(u,v)$. Appelons $\tilde f(x,y,z)=f\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)$ avec $u(x,y,z)=x^2+3yz$ et $v(x,y,z)=y^2-z^2$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,2x \ + \ 0\\ \frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,3z \ + \ \frac{\partial f}{\partial v}\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,2y\\ \frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)\,\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,3y \ + \ \frac{\partial f}{\partial v}\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,(-2z)\end{aligned}$$

a) On a $g(x,y,z)=\tilde f(x,y,z)$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z)\,,\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z)\,,\quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z)\,,$$

avec les dérivées partielles de $\tilde f(x,y,z)$ données ci-dessus.

b) Si l'on pose $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, s\longmapsto F(s)=s^2$, on a $g(x,y,z)=\big(F\circ\tilde f\,\big)(x,y,z)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z)=2f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z)=2f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z)\\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z)=2f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z)\end{aligned}$$

avec les dérivées partielles de $\tilde f(x,y,z)$ données ci-dessus.

c) Si l'on pose $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, s\longmapsto F(s)=\ln s$, on a $g(x,y,z)=\big(F\circ\tilde f\,\big)(x,y,z)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{1}{f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{1}{f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x,y,z)\\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= F'\big(\tilde f(x,y,z)\big)\,\frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{f\big(x^2+3yz,y^2-z^2\big)}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial z}(x,y,z)\end{aligned}$$

avec les dérivées partielles de $\tilde{f}(x,y,z)$ données ci-dessus.

Dans la suite de l'exercice, il y a la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v,w) \longmapsto f(u,v,w)$. Appelons $\hat{f}(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)$ avec $u(x,y) = \sin x,\ v(x,y) = \sin y$ et $w(x,y) = xy^2$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\
&\qquad + \frac{\partial f}{\partial w}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)\,\cos x \ + \ 0 \ + \ \frac{\partial f}{\partial w}\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)\,y^2 \\
\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\
&\qquad + \frac{\partial f}{\partial w}\big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)\,\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\
&= 0 \ + \ \frac{\partial f}{\partial v}\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)\,\cos y \ + \ \frac{\partial f}{\partial w}\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)\,2xy
\end{aligned}$$

d) On a $g(x,y) = \tilde{f}(x,y)$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) \quad , \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y) \quad ,$$

avec les dérivées partielles de $\hat{f}(x,y)$ données ci-dessus.

e) Si l'on pose $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto F(s) = \ln s$, on a $g(x,y) = \big(F \circ \hat{f}\,\big)(x,y)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= F'\big(\hat{f}(x,y)\big)\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{f\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)}\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= F'\big(\hat{f}(x,y)\big)\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{f\big(\sin x, \sin y, xy^2\big)}\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

avec les dérivées partielles de $\hat{f}(x,y)$ données ci-dessus.

f) Si l'on pose $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto F(s) = e^s$, on a $g(x,y) = \big(F \circ \hat{f}\,\big)(x,y)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= F'\big(\hat{f}(x,y)\big)\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x,y) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= F'\big(\hat{f}(x,y)\big)\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}\,\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

avec les dérivées partielles de $\hat{f}(x,y)$ données ci-dessus.

Exercice 19 – Règle de la chaine

Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $y = y(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f et de la dérivée de y par rapport à x.

Appliquer la formule trouvée aux cas particuliers suivants (tous indépendants) :

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$

b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$

c) $y = e^{3x}$

d) $y = \ln x$

Corrigé

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x)\big)\, x'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x)\big)\, y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x)\big)\, y'(x)$$

a) Si $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $z(x) = f(x, y(x))$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = 2x + 2y(x) + \big(2x + 8y(x)\big)\ y'(x).$$

b) Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ et $z(x) = f\big(x, y(x)\big)$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x)\big)\, y'(x) = \big(y(x)\big)^2 + 2x\, y(x) + \big(2x\, y(x) + x^2\big)\, y'(x)$$

c) Si $y(x) = e^{3x}$ et $z(x) = f(x, y(x)) = f(x, e^{3x})$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, e^{3x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, e^{3x})\ 3e^{3x}.$$

d) Si $y = \ln x$ et $z(x) = f\big(x, y(x)\big) = f\big(x, \ln x\big)$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x)\big)\, y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \ln x\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \ln x\big)\, \frac{1}{x}$$

Remarque : a) + c) [cas non demandé] Si $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y(x) = e^{3x}$, alors

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\ x'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = 2x + 2e^{3x} + \big(2x + 8e^{3x}\big)\ 3e^{3x}.$$

Exercice 20 – Règle de la chaine

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{y - 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y - 1)^2}.$$

a) Calculer les dérivées partielles de la fonction $F(u, v) = f(2u - v, u - 2v)$.

b) Calculer la dérivée de la fonction $G(t) = f(t + 1, t^2)$.

Corrigé

a) On a $F = f \circ h$, où $h(u, v) = (2u - v, u - 2v)$, c'est-à dire qu'on pose

$$x(u, v) = 2u - v \qquad \text{et} \qquad y(u, v) = u - 2v.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(u-2v)}{\partial u}\\
&= \frac{2\ (2u-v)}{u-2v-1}\ 2 - \frac{(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{4(2u-v)(u-2v-1)-(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{(2u-v)(4u-8v-4-2u+v)}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{(2u-v)(2u-7v-4)}{(u-2v-1)^2}
\end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(u-2v)}{\partial v}\\
&= -\frac{2\ (2u-v)}{u-2v-1} + \frac{2(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{-2(2u-v)(u-2v-1)+2(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{2(2u-v)(-u+2v+1+2u-v)}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{2(2u-v)(u+v+1)}{(u-2v-1)^2}
\end{aligned}$$

b) On a $G = f \circ \gamma$ où $\gamma(t) = (t+1, t^2)$, c'est-à-dire qu'on pose

$$x(t) = t+1 \qquad \text{et} \qquad y(t) = t^1.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(t+1,t^2\big)\ \frac{d\,t+1}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(t+1,t^2\big)\ \frac{d\,t^2}{d\,t}\\
&= \frac{2(t+1)}{t^2-1} - \frac{(t+1)^2\ 2t}{(t^2-1)^2}\\
&= \frac{2}{t-1} - \frac{2t}{(t-1)^2}\\
&= -\frac{2}{(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 21 – Différentielle de fonctions composées
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$

b) $g(x,y,z) = f(2x-yz, xy-3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et écrire la différentielle de g.

Corrigé

a) Si $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$, appelons (u,v) les variables de f, avec $u = x^2-y^2$ et $v = 2xy$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x} \\ &= 2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \\ &= -2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}dg_{(x,y)} &= \frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy \\ &= \Big(2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\Big)\ dx \\ &\qquad\qquad + \Big(-2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\Big)\ dy.\end{aligned}$$

b) Si $g(x,y,z) = f(2x-yz, xy-3z)$, appelons (u,v) les variables de f, avec $u = 2x-yz$ et $v = xy-3z$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(2x-yz)}{\partial x}\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(xy-3z)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot 2\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(2x-yz)}{\partial y}\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(xy-3z)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot(-z)\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(2x-yz)}{\partial z}\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\ \frac{\partial(xy-3z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot(-y)\ +\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot(-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dg_{(x,y,z)} &= \frac{\partial g}{\partial x}\,dx\ +\ \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\ +\ \frac{\partial g}{\partial z}\,dz \\ &= \left(2\,\frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big) + y\,\frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\right)dx \\ &\qquad + \left(-z\,\frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big) + x\,\frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\right)dy \\ &\qquad - \left(y\,\frac{\partial f}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big) + 3\,\frac{\partial f}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\right)dz\end{aligned}$$

Exercice 22 – Jacobienne de fonctions composées

Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = h(x^2-y^2, 2xy)$

b) $g(x,y,z) = h(2x-yz, xy-3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de h, et écrire la matrice Jacobienne de g.

Corrigé

Appelons respectivement (u,v) et (h_1,h_2) les variables et les composantes de la fonction h, c'est-à-dire qu'on a $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u,v) \longmapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v),\ h_2(u,v)\big)$.

a) On a $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto g(x,y) = \big(g_1(x,y),\ g_2(x,y)\big)$ avec $g_1(x,y) = h_1(x^2-y^2, 2xy)$ et $g_2(x,y) = h_2(x^2-y^2,2xy)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\,\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\,\frac{\partial(2xy)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2x \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2y\\
\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2x \;+\; \frac{\partial h_2}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\,\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\,\frac{\partial(2xy)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot(-2y) \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2x\\
\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot(-2y) \;+\; \frac{\partial h_2}{\partial v}\big(x^2-y^2,2xy\big)\cdot 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_g(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)\\[2mm] \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\\
&= \left.\begin{pmatrix} 2x\,\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + 2y\,\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) & -2y\,\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + 2x\,\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v)\\[2mm] 2x\,\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v) + 2y\,\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) & -2y\,\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v) + 2x\,\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\right|_{\substack{u=x^2-y^2\\ v=2xy}}
\end{aligned}$$

b) On a $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = \big(g_1(x,y,z),\ g_2(x,y,z)\big)$ avec $g_1(x,y,z) = h_1(2x-yz, xy-3z)$ et $g_2(x,y,z) = h_2(2x-yz,xy-3z)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\,\frac{\partial(2x-yz)}{\partial x} \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\,\frac{\partial(xy-3z)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot 2 \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot y\\
\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot 2 \;+\; \frac{\partial h_2}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\,\frac{\partial(2x-yz)}{\partial y} \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\,\frac{\partial(xy-3z)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot(-z) \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot x\\
\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot(-z) \;+\; \frac{\partial h_2}{\partial v}\big(2x-yz,xy-3z\big)\cdot x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz, xy-3z\big)\,\frac{\partial(2x-yz)}{\partial z} \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz, xy-3z\big)\,\frac{\partial(xy-3z)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial u}\big(2x-yz, xy-3z\big)\cdot(-y) \;+\; \frac{\partial h_1}{\partial v}\big(2x-yz, xy-3z\big)\cdot(-3) \\
\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\big(2x-yz, xy-3z\big)\cdot(-y) \;+\; \frac{\partial h_2}{\partial v}\big(2x-yz, xy-3z\big)\cdot(-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_g(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\
&= \left.\begin{pmatrix} 2\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v)+y\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) & -z\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v)+x\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) & -y\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v)-3\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) \\ 2\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)+y\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) & -z\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)+x\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) & -y\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)-3\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\right|_{\substack{u=2x-yz \\ v=xy-3z}}
\end{aligned}$$

Exercice 23 – Jacobienne de fonctions composées
Soient $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les deux fonctions définies par

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= (x\,e^y, y\,e^x) \\
G(u,v) &= (u+v, u-v).
\end{aligned}$$

Calculer les matrices Jacobiennes de F, de G et des deux fonctions composées $f = G\circ F$ et $g = F\circ G$. Comparer les matrices Jacobiennes de f et de g au produit des matrices Jacobiennes de F et de G.

Corrigé

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xe^y)}{\partial x} & \frac{\partial(xe^y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(ye^x)}{\partial x} & \frac{\partial(ye^x)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto f(x,y) = \big(G\circ F\big)(x,y) = G\big(F(x,y)\big) = \big(xe^y + ye^x,\ xe^y - ye^x\big)$

$$J_f(x,y) = J_{G\circ F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xe^y+ye^x)}{\partial x} & \frac{\partial(xe^y+ye^x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(xe^y-ye^x)}{\partial x} & \frac{\partial(xe^y-ye^x)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y+ye^x & xe^y+e^x \\ e^y-ye^x & xe^y-e^x \end{pmatrix}$$

On a $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u,v) \longmapsto g(u,v) = \big(F\circ G\big)(u,v) = F\big(G(u,v)\big) = \big((u+v)e^{u-v},\ (u-v)e^{u+v}\big)$

$$\begin{aligned}
J_g(u,v) = J_{F\circ G}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left((u+v)e^{u-v}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left((u+v)e^{u-v}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left((u-v)e^{u+v}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left((u-v)e^{u+v}\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{u-v}+(u+v)e^{u-v} & e^{u-v}-(u+v)e^{u-v} \\ e^{u+v}+(u-v)e^{u+v} & -e^{u+v}+(u-v)e^{u+v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On voit ainsi que l'on peut obtenir les matrices jacobiennes des fonctions composées en calculant les produits des jacobiennes des fonctions de départ, dans le bon ordre et avec substitution des variables dans les membres gauches de ces produits matriciels :

$$J_G\big(F(x,y)\big)\, J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{u=xe^y \\ v=ye^x}} \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^y + ye^x & xe^y + e^x \\ e^y - ye^x & xe^y - e^x \end{pmatrix} = J_{G\circ F}(x,y)$$

$$J_F\big(G(u,v)\big)\, J_G(u,v) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=u+v \\ y=u-v}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{u-v} & (u+v)e^{u-v} \\ (u-v)e^{u+v} & e^{u+v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{u-v} + (u+v)e^{u-v} & e^{u-v} - (u+v)e^{u-v} \\ (u-v)e^{u+v} + e^{u+v} & (u-v)e^{u+v} - e^{u+v} \end{pmatrix} = J_{F\circ G}(u,v)$$

Exercice 24 – Jacobienne de fonctions composées

Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonction différentiables sur $\mathbb{R}^2$, dont on connait les matrices Jacobiennes

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne et le détérminant Jacobien des fonctions composées $f(x,y) = G(F(x,y))$ et $g(u,v) = F(G(u,v))$.

Corrigé

Si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (x,y) et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (u,v), on a que :

- la composée $G \circ F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (x,y) et on a $(u,v) = F(x,y)$, c'est-à-dire que u et v sont des fonctions de (x,y), autrement dit : $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$;
- la composée $F \circ G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (u,v) et on a $(x,y) = G(u,v)$, c'est-à-dire que x et y sont des fonctions de (u,v), autrement dit : $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$.

Les matrices Jacobiennes des deux fonctions composées sont donc

$$J_{G\circ F}(x,y) = J_G\big(F(x,y)\big)\, J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2uy^2 + 2v(2x+1) & -4uxy + 2v \\ 3u^2y^2 + 2x + 1 & 6u^2xy + 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } u = u(x,y) \text{ et } v = v(x,y);$$

$$J_{F\circ G}(u,v) = J_F\big(G(u,v)\big)\, J_G(u,v) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2y^2u + 6xyu^2 & 2y^2v + 2xy \\ -2(2x+1)u + 3u^2 & 2(2x+1)v + 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } x = x(u,v) \text{ et } y = y(u,v).$$