Exercice 28 – Laplacien

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x, y) = f(x - 2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x, y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$. $= 5 f''(x-2y)$

b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = 25(x - 2y)^4$. $\Rightarrow$

a. $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x-2y) \times \frac{\partial (x-2y)}{\partial x} = f'(x-2y)$ $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x-2y)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2 f'(x-2y)$ $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4 f''(x-2y)$

b. $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4 = 5 f''(x-2y) \Leftrightarrow 5z^4 = f''(z) \Leftrightarrow f'(z) = z^5 + a \quad a \in \mathbb{R}$

z $\quad z$

$S = \{ z \mapsto \frac{z^6}{6} + az + b \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ $\Leftrightarrow f(z) = \frac{z^6}{6} + b + az \quad a, b \in \mathbb{R}$

$f''(z) = 5z^4 \Leftrightarrow \int_0^z f''(t)\,dt = \int_0^z 5t^4\,dt$

$= f'(z) - \underbrace{f'(0)}_{a} = \left[t^5\right]_0^z = z^5 - 0$

Exercice 29 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

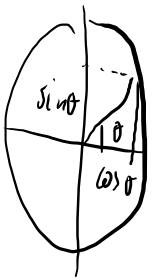
b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

$f(0,0) = 1$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin x}{\cos y} \\ +\dfrac{\sin y}{\cos^2 y} \times \cos x \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos x}{\cos y} & +\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \\ -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} & \dfrac{2-\cos^2(y)}{\cos^3(y)} \cos x \end{pmatrix}$

$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$ $\quad \left(\dfrac{1}{g}\right)'' = \dfrac{-g'' \times g^2 + 2g'^2 g}{g^4} = \dfrac{-g''g + 2g'^2}{g^3} = \dfrac{\cos^2 + 2\sin^2}{\cos^3} = \dfrac{2-\cos^2}{\cos^3}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = -g' \quad v = g^2$

$u' = -g'' \quad v' = 2g'g$

$g = \cos$

$g' = -\sin$

$g'' = -\cos$

$f(x,y) \underset{(0,0)}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$

↑ rien en x ou en y

Exercice 29 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

b. $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+1/y^2} \\ \frac{2xy}{xy^2+1} \end{pmatrix}$ $\quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+1/y^2)^2} & \frac{2y}{(xy^2+1)^2} \\ \frac{2y}{(xy^2+1)^2} & \frac{2x(xy^2+1)-(2xy)^2}{(xy^2+1)^2} \end{pmatrix}$

$g(x,y) \underset{(a,b)}{=} g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\times(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\times(y-b) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,b)\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a,b)\frac{(y-b)^2}{2} + o\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right) = \dfrac{2y\times(xy^2+1) - 2xy\times y^2}{(xy^2+1)^2}$

$\left(\dfrac{u'}{u}\right)' = \dfrac{u''u - u'^2}{u^2}$ $\quad u(y) = xy^2+1$ $\quad u'(y) = 2xy$ $\quad u''(y) = 2x$

$(1,1)$ $\quad g(1,1) = \ln 2$ $\quad \vec{\nabla} g(1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad Hg(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$g(x,y) \underset{(1,1)}{=} \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + (y-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)(y-1)}{2} + o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$

$(1,-1)$ $\quad g(1,-1) = \ln 2$ $\quad \vec{\nabla} g(1,-1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad Hg(1,-1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$g(x,y) \underset{(1,-1)}{=} \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - (y+1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2}(x-1)(y+1) + o\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)$

Exercice 29 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)\, e^{x+3xy+y^2} \\ (3x+2y)\, e^{x+3xy+y^2} \end{pmatrix} \quad H_h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)^2 e^{x+3xy+y^2} & (3+3x+2y+9xy+6y^2)\, e^{x+3xy+y^2} \\ (3+(3x+2y)(1+3y))\, e^{x+3xy+y^2} & (2+(3x+2y)^2)\, e^{x+3xy+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix} e^{x+3xy+y^2}$$

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)^2 & (3+3x+2y+9xy+6y^2) \\ 3+3x+2y+9xy+6y^2 & 2+9x^2+4y^2+12xy \end{pmatrix} e^{x+3xy+y^2}$$

en $(0,0)$ $\quad h(0,0) = 1$

$$\vec{\nabla} h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h(x,y) \underset{(0,0)}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{2}\, xy + \frac{2}{2} y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$= 1 + x + x^2/2 + 3xy + y^2 + o(x^2+y^2)$$

Exercice 29 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

$$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)\, e^{x+3xy+y^2} \\ (3x+2y)\, e^{x+3xy+y^2} \end{pmatrix} \quad H_h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)^2 e^{x+3xy+y^2} & (3+3x+2y+9xy+6y^2) e^{x+3xy+y^2} \\ (3+(3x+2y)(1+3y)) e^{x+3xy+y^2} & (2+(3x+2y)^2) e^{x+3xy+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix} e^{x+3xy+y^2}$$

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3y)^2 & (3+3x+2y+9xy+6y^2) \\ 3+3x+2y+9xy+6y^2 & 2+9x^2+12xy+4y^2 \end{pmatrix} e^{x+3xy+y^2}$$

En $(1;1)$

$h(1;1) = e^5 \quad \vec{\nabla} h(1;1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} e^5 \quad H_h(1;1) = \begin{pmatrix} 16 & 23 \\ 23 & 27 \end{pmatrix} e^5$

$$h(x,y) = e^5 \left(1 + 4x + 5y + 16\frac{x^2}{2} + 23xy + 27\frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2)\right)$$