Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1.2 - UE Math 2B**
Printemps 2023

CC2 – 13 mars 2023 – Corrigé de la Question 7

Question 1 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = y^3\vec{\imath} - 3xy^2\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = y^3\vec{\imath} + 3xy^2\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) $^*\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A} = \left(-3y^2 - 3y^2\right)\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A} = -6y^2\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{A}$ n'est pas conservatif.
$^*\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \left(3y^2 - 3y^2\right)\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{B}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \overrightarrow{B}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \ (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \ (2)$$

$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int y^3 dx + g(y) = xy^3 + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + g'(y) \overset{(2)}{=} 3xy^2$ d'où $g'(y) = 0$ donc $g(y) = c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{B}$ vérifie $f(x,y) = xy^3 + c, c \in \mathbb{R}$

Question 2 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = 3x^2\vec{\imath} - 2xy\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = 3x^2\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) $^*\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A} = (-2y - 0)\,\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A} = -2y\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{A}$ n'est pas conservatif.
$^*\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = (0 - 0)\,\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{B}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \overrightarrow{B}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \ (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \ (2)$$

$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int 3x^2 dx + g(y) = x^3 + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(y) \overset{(2)}{=} -2y$ donc $g(y) = -y^2 + c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{B}$ vérifie $f(x,y) = x^3 - y^2 + c, c \in \mathbb{R}$

Question 3 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = 2xy^2\vec{\imath} + 2x^2y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = 2xy^2\vec{\imath} - 2x^2y\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) *$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{A} = (4xy - 4xy)\,\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{A}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif.
*$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = (-4xy - 4xy)\,\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = -8xy\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{B}$ n'est pas conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \overrightarrow{A}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \ (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y \ (2)$$

$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int 2xy^2dx + g(y) = x^2y^2 + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + g'(y) \overset{(2)}{=} 2x^2y$ d'où $g'(y) = 0$ donc $g(y) = c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{A}$ vérifie $f(x,y) = x^2y^2 + c, c \in \mathbb{R}$

Question 4 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = e^y\vec{\imath} + xe^y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = e^y\vec{\imath} - xe^y\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) *$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{A} = (e^y - e^y)\,\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{A}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif.
*$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = (-e^y - e^y)\,\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = -2e^y\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{B}$ n'est pas conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \overrightarrow{A}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \ (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y \ (2)$$

$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int e^ydx + g(y) = xe^y + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^y + g'(y) \overset{(2)}{=} xe^y$ d'où $g'(y) = 0$ donc $g(y) = c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{A}$ vérifie $f(x,y) = xe^y + c, c \in \mathbb{R}$

Question 5 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = \sin x \sin y\vec{\imath} + \cos x \cos y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = -\sin x \sin y\vec{\imath} + \cos x \cos y\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) *$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{A} = (-\sin x\cos y - \sin x\cos y)\,\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{A} = -2\sin x\cos y\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{A}$ n'est pas conservatif.
*$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = (-\sin x\cos y - (-\sin x\cos y))\,\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{B}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{B}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \overrightarrow{B}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x\sin y \;(1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x\cos y \;(2)$$

(1) $\Rightarrow f(x,y) = \int -\sin x\sin y\,dx + g(y) = \cos x\sin y + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos x\cos y + g'(y) \overset{(2)}{=} \cos x\cos y$ donc $g(y) = -y^2 + c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{B}$ vérifie $f(x,y) = \cos x\sin y + c, c \in \mathbb{R}$

Question 6 Considérons les deux champs de vecteurs du plan

$$\vec{A}(x,y) = \cos x\,e^y\vec{\imath} + \sin x e^y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,y) = \cos x\,e^y\vec{\imath} - \sin x e^y\vec{\jmath}.$$

a) Les champs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont-ils conservatifs ? Justifier la réponse.
b) S'ils sont conservatifs, trouver leur potentiel scalaire.

Corrigé

a) *$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{A} = (\cos x\,e^y - \cos x\,e^y)\,\vec{k} = \vec{0}$. De plus, $D_{\overrightarrow{A}} = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
Donc d'après le lemme de Poincaré, le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif.
*$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = (-\cos x\,e^y - \cos x\,e^y)\,\vec{k}$ soit $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = -2\cos x\,e^y\,\vec{k} \neq \vec{0}$
Donc le champ $\overrightarrow{B}$ n'est pas conservatif.
b) Comme le champ $\overrightarrow{A}$ est conservatif, il admet un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \overrightarrow{A}$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\,e^y \;(1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x\,e^y \;(2)$$

(1) $\Rightarrow f(x,y) = \int \cos x\,e^y dx + g(y) = \sin x\,e^y + g(y)$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x\,e^y + g'(y) \overset{(2)}{=} \sin x\,e^y$ d'où $g'(y) = 0$ donc $g(y) = c, c \in R$
Finalement, un potentiel scalaire f du champ $\overrightarrow{A}$ vérifie $f(x,y) = \sin x\,e^y + c, c \in \mathbb{R}$