Université Claude Bernard Lyon 1 **L1.2 PCSI - UE Maths 2B**
Printemps 2023

Rappels : méthodes résolution équations différentielles ordinaires

I. Équations différentielles linéaires du 1er ordre : (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

1. Résoudre l'équation homogène $x'(t) = a(t)x(t)$: $x_h(t) = \lambda e^{\int a(t)dt}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Trouver une solution particulière : $x_p(t) = \lambda(t)e^{\int a(t)dt}$ où $\lambda(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$
3. Conclure : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

II. Équations différentielles non linéaires du 1er ordre : (E) : $x'(t) = a(x(t))b(t)$

1. Identifier les fonctions a et b.
2. Exprimer la fonction $\frac{1}{a}$.
3. Calculer la fonction A, primitive de la fonction $\frac{1}{a}$.
4. Écrire la fonction A^{-1}, fonction réciproque de la fonction A.
5. Calculer les solutions de (E) : $x(t) = A^{-1}(\int b(t)dt + \lambda)$,$\lambda \in \mathbb{R}$

III. Équations différentielles linéaires du 2nd ordre : (E) : $x''(t) + c_1x'(t) + c_0x(t) = d(t)$

1. Résoudre l'équation homogène $x''(t) + c_1x'(t) + c_0x(t) = 0$:
   Résoudre l'équation caractéristique (E_0) : $z^2 + c_1z + c_0 = 0$:
   * Si $\Delta > 0$: $x_h(t) = \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}$ où r_1 et r_2 solutions réelles de (E_0), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   * Si $\Delta = 0$: $x_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r solution réelle double de (E_0), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   * Si $\Delta < 0$: $x_h(t) = (\lambda \cos(st) + \mu \sin(st))e^{rt}$, où $z = r \pm s \times \mathrm{i}$ racines complexes de (E_0), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. Trouver une solution particulière :
   * Décomposer, si nécessaire, d(t) en somme de termes "simples" (polynôme, exponentielle...)
   * Trouver la forme de la solution particulière x_{p_i} à l'aide de la proposition à la page suivante.
   * Conclure, si nécessaire, sur la solution particulière globale : $x_p(t) = \Sigma x_{p_i}(t)$
3. Conclure : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Proposition : Une solution particulière $x_i(t)$ associée au second membre $d_i(t)$ se cherche selon les principes suivants

- Si d_i est un polynôme, alors on cherche un polynôme Q de même degré et $x_i(t)$ de la forme

$$x_i(t) = \begin{cases} Q(t) & \text{si } c_0 \neq 0 \\ t\,Q(t) & \text{si } c_0 = 0 \text{ et } c_1 \neq 0 \\ t^2\,Q(t) & \text{si } c_0 = c_1 = 0 \end{cases}$$

- Si $d_i(t) = e^{\alpha t}$, alors on cherche une constante réelle A et $x_i(t)$ de la forme

$$x_i(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha t} & \text{si } \alpha \neq r_1, r_2 \\ Ate^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r_1 \text{ ou si } \alpha = r_2 \\ At^2\,e^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r \end{cases}$$

- Si $d_i(t) = K_1\,\cos(\beta t) + K_2\,\sin(\beta t)$, alors on cherche des constantes réelles A_1, A_2 et $x_i(t)$ de la forme

$$x_i(t) = \begin{cases} A_1\,\cos(\beta t) + A_2\,\sin(\beta t) & \text{si } \beta \neq \pm s \text{ ou } r \neq 0 \\ t\,\left(A_1\,\cos(\beta t) + A_2\,\sin(\beta t)\right) & \text{si } \beta = \pm s \text{ et } r = 0 \end{cases}$$