Fascicule d'exercices pour l'UE Mathématiques complémentaires

Printemps 2023

Alessandra Frabetti (CM + TD A), bat. Braconnier bureau 233 <frabetti@math.univ-lyon1.fr>
Nadège Jacquemot (TD B), Quai 43 SOIE <nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr>

Planning des cours (CM), travaux dirigés (TD), études accompagnés (EA), contrôles continus (CC), tests corrigés (DM-CC), contrôle terminal (CT1) et rattrapage (CT2)

lundi 16/01 – **CM1** (livret ch. 4 par. 1, 2)
lundi 23/01 – **CM2** (livret ch. 4 par. 3)
mardi 24/01 – **TD 1** (fiche TD 1)
lundi 30/01 – **CM3** (livret ch. 4 par. 4) + **EA1** (questions sur CC1)
mardi 31/01 – **TD 2** (fiche TD 2) + **DM1-CC1** et **DM2-CC1** à rendre sur Tomuss **avant 22h**
lundi 06/02 – **CC1** (sur fiches TD 1 et TD 2) + **CM4** (livret ch. 4 par. 5)
mardi 07/02 – **TD 3** (fiche TD 3)
lundi 20/02 – **CM5** (livret ch. 5 par. 1)
mardi 21/02 – **TD 4** (fiche TD 4)
lundi 27/02 – **CM6** (livret ch. 5, par. 2) + **EA2** (questions sur CC2)
mardi 28/02 – **TD 5** (fiche TD 5) + **DM3-CC2** et **DM4-CC2** à rendre sur Tomuss **avant 22h**
lundi 06/03 – **CC2** (sur fiches TD 3 à TD 5) + **CM7** (livret ch. 5, par. 3)
mardi 07/03 – **TD 6** (fiche TD 6)
lundi 13/03 – **CM8** (livret ch. 5, par. 4)
mardi 14/03 – **TD 7** (fiche TD 7)
lundi 20/03 – **EA3** (questions sur CC3)
mardi 21/03 – **TD 8** (fiche TD 8) + **DM5-CC3** et **DM6-CC3** à rendre sur Tomuss **avant 22h**
lundi 27/03 – **CC3** (sur fiches TD 6 à TD 8)
avril – séances et DM extra sur demande
début mai – **CT1** (1h30 sur tout le programme)
juin – **CT2** (rattrapage 1h sur tout le programme)

Prérequis (programme du cours TMB)

1. Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (produits scalaire, vectoriel et mixte)
2. Applications linéaires et matrices (produit, déterminant, matrice inverse).
3. Géométrie cartesienne dans le plan et dans l'espace (droites, coniques, plans, quadriques).
4. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable (Taylor, extrema, primitives).
5. Équations différentielles du 1er ordre.

Programme du cours Math 2 A

Ch. 1 – Fonctions de plusieures variables

1. Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.
2. Fonctions de deux ou trois variables. Graphes. Lignes de niveau.
3. Opérations entre fonctions. Composition. Changement de coordonnées.

Ch. 2 – Dérivées

1. Idée de limites et fonctions continues.
2. Dérivées partielles. Fonctions (continûment) différentiables.
3. Dériveés directionnelles.
4. Gradient.
5. Différentielle.
6. Matrice Jacobienne. Jacobien du changement de coordonnées.
7. Resumé sur les dérivées.
8. Règle de Leibniz et règle de la chaîne.
9. Dériveées partielles d'ordre supérieur. Théorème de Schwarz, matrice Hessienne.
10. Formule de Taylor.
11. Points critiques, extrema locaux et points selle.

Ch. 3 – Intégrales multiples

1. Intégrale simple comme somme de Riemann.
2. Intégrale double. Théorème de Fubini. Changement de variables.
3. Intégrale triple. Théorème de Fubini. Changement de variables.
4. Applications : aire, volume, moyenne, centre de masse.

Programme du cours Math 2 B

Ch. 4 – Champs de vecteurs

1. Lois de transformation par changement de coordonnées : fonctions et champs.
2. Champs scalaires et surfaces de niveau.
3. Champs vectoriels, repères mobiles, courbes intégrales.
4. Champs conservatifs : champs gradient, potentiel scalaire. Rotationnel, Lemme de Poincaré.
5. Champs incompressibles : champs à divergence nulle, potentiel vectoriel. Lemme de Poincaré.

Ch. 5 – Circulation et flux

1. Courbes paramétrées.
2. Circulation le long d'une courbe.
3. Surfaces paramétrées.
4. Flux à travers une surface. Théorèmes de Stokes et de Gauss.

TD 1 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 – Champs scalaires, surfaces de niveau
Considerons le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x,y,z) = -\frac{K}{x^2+y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

a) Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, φ, θ).

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [*Utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.*]

c) Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ.

Exercice 2 – Champs de vecteurs
Trouver le domaine et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

h) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = r\,\vec{e_\varphi} + r\,\vec{e_\theta}$

Exercice 3 – Dessin des champs de vecteurs
Relier chaque champ vectoriel à son dessin.

a) $\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath}$

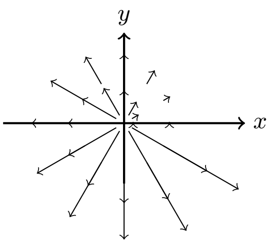
b) $\vec{V}(x,y) = -x\,\vec{\jmath}$

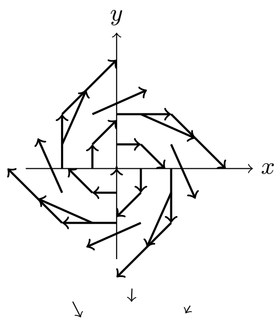
c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

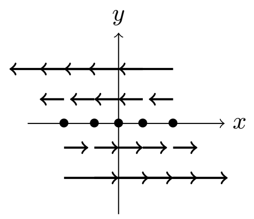
d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \varphi\,\vec{e_\rho}$

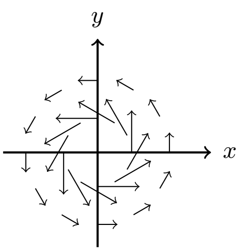
e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$

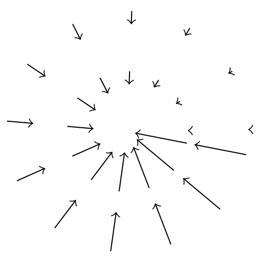
f) $\vec{V}(\rho,\varphi) = -\varphi\,\vec{e_\rho}$

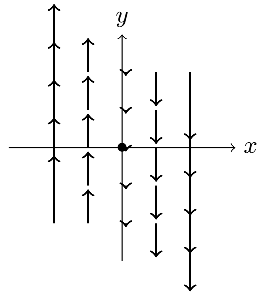
A) 

C) 

E) 

B) 

D) 

F) 

Exercice 4 – Changement de coordonnées pour les champs de vecteurs
Exprimer les champs vectoriels suivants en coordonnées polaires (dans le plan) ou bien cylindriques et sphériques (dans l'espace) :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Exercice 5 – Lignes de champ
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

e) $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{e_r}$ (champ gravitationnel)

Exercice 6 – Gradient et Laplacien en coordonnées polaires [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 donnée en coordonnées cartesiennes et soit $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(x,y)$ son expression en coordonnées polaires, où $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

Trouver l'expression en coordonnées polaires du gradient $\tilde{\nabla}$ et du Laplacien $\tilde{\Delta}$, définis par les identitées

$$\tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \nabla f(x,y) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Delta}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \Delta f(x,y).$$

TD 3 – CHAMPS CONSERVATIFS

Exercice 7 – Rotationnel
Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

b) $\vec{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

d) $\vec{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

e) $\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2 \sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

f) $\vec{E}(r,\varphi,\theta) = r^2 \sin\varphi\ \vec{e_r} + r^2 \sin\theta\ \vec{e_\varphi} + r^2\ \vec{e_\theta}$

Exercice 8 – Champs de gradient
Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $\vec{V}(x,y) = ye^{xy}\ \vec{\imath} - xe^{xy}\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = \cos x\ \vec{\imath} + \sin y\ \vec{\jmath}$

e) $\vec{V}(x,y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$

f) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3)\ \vec{\imath} + (x^3+3xy^2-2y)\ \vec{\jmath}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\ \vec{\imath} + \frac{1}{y}\ \vec{\jmath} - \frac{1}{z}\ \vec{k}$

h) $\vec{V}(x,y,z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\ \vec{\imath} + (y^2-zx)\ \vec{\jmath} + (z^2-xy)\ \vec{k}$

Exercice 9 – Champ central
Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1,x_2,x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$$\vec{x} = x_1\ \vec{\imath} + x_2\ \vec{\jmath} + x_3\ \vec{k} = (x_1,x_2,x_3) \qquad \text{est le vecteur position,}$$

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \qquad \text{est la distance du point de l'origine, et}$$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad \text{est une application dérivable.}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

Exercice 10 – Rotationnel [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$(1) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U}+\vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\ \vec{V}) = \alpha\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\ \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V} + f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0}$$

TD 4 – CHAMPS INCOMPRESSIBLES

Exercice 11 – Divergence
Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$
b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$
c) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$
d) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\ \vec{e_\varphi}$
e) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$
f) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
h) $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = r\ \vec{e_\varphi} + r\ \vec{e_\theta}$

Exercice 12 – Divergence
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a-t-on div $\overrightarrow{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$ suivants :
i) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\vec{k}$
ii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(y)\vec{\imath} - f(y)\vec{\jmath}$
iii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(x)\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - zf(x)\vec{k}$

Exercice 13 – Divergence
Pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
a) $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$
b) $\overrightarrow{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$
c) $\overrightarrow{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Exercice 14 – Champs à potentiel vectoriel
Un champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$ admet un *potentiel vectoriel* s'il esiste un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A}$. Dire si les champs suivants admettent un potentiel vectoriel (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas en trouver un.
a) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
b) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + yz\ \vec{\jmath} - x\ \vec{k}$
c) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = 2xyz\ \vec{\imath} - y^2z\ \vec{\jmath}$

Exercice 15 – Divergence [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$ et vV de classe C^2. Montrer les relations suivantes :

$$(1)\quad \mathrm{div}\,(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \mathrm{div}\,\overrightarrow{U} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{V}$$
$$(2)\quad \mathrm{div}\,(\alpha\ \overrightarrow{V}) = \alpha\ \mathrm{div}\,\vec{V}$$
$$(3)\quad \mathrm{div}\,(f\ \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{V} + f\ \mathrm{div}\,\vec{V}$$
$$(4)\quad \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V}) = 0$$

Exercice 16 – Champ périodique
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,\vec{\imath} + \sin(x)\,\cos(y)\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continue et même lisse.

b) Montrer que les valeurs de $\vec{V}$ sur le carré $D = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ donnent les valeurs de $\vec{V}$ sur tout son domaine de définition (c'est-à-dire que $\vec{V}$ est *périodique* et D est un *domaine de périodicité*).

c) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

d) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0,\pi/4)$, $(\pi/2,0)$ et $(\pi,\pi/4)$. Que se passe-t-il au point $(\pi/2,\pi/2)$? Que se passe-t-il si on démarre au point $(3\pi/2,\pi/2)$?

e) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Exercice 17 – Champ périodique et symétrique
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \frac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu (et lisse).

b) Montrer que $\vec{V}$ est périodique dans la variable x et que la bande $D = [0,2\pi] \times \mathbb{R}^*$ est un domaine de périodicité.

c) En sachant que la fonction $\sin x$ est impaire et que la fonction $\cos x$ est paire, montrer qu'il suffit de connaitre les valeurs de $\vec{V}$ pour $y > 0$, car les valeurs en $-y < 0$ se trouvent alors comme

$$\vec{V}(x,-y) = -\vec{V}(-x,y).$$

(C'est-à-dire que $\vec{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π).

d) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 1,\ 2,\ 1/2.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

e) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0,1)$, $(\pi/2,1)$, $(\pi,1)$, $(5\pi/4,1)$ et $(3\pi/2,1)$.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

g) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Exercice 18 – Circulation le long d'une courbe
Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{V}$ le long de C^+.

a) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ courbe plane fermée $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$.

c) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad C^+ =$ cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\, z\, \vec{e_\varphi}$, $\quad C^+ =$ cercle $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.

e) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\,\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\,\vec{k}$, $\quad C^+ =$ courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]\,0, T]$.

f) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ arc d'hyperbole $\begin{cases} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \to 2 \end{cases}$.

Exercice 19 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$
Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème $\displaystyle\int_{A,\ C^+}^{B} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A)$.

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ avec $\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2)$, $\quad C^+ =$ courbe qui relie le point $(5,1,0)$ au point $(3,2,1)$.

b) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique** produit par une charge Q placée en $r = 0$

$C_1^+ =$ courbe qui relie le point $A = (6,0,0)$ au point $B = (0,0,3)$,

$C_2^+ =$ cercle centré en O de rayon R.

[*Quel est le potentiel $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

c) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction $\vec{k}$.

$C_1^+ =$ arc de cercle de rayon R centré sur le fil, reliant le point $A = (R,0,0)$ au point $B = (0,R,0)$

$C_2^+ =$ cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

[*Quel est le potentiel scalaire $\phi(\varphi)$ de $\vec{B}(\rho)$ <u>si on ne fait pas le tour complet autour du fil</u> ? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

Exercice 20 – Flux à travers une surface
Dessiner les surfaces S^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer le flux des champs de vecteurs à travers S^+.

a) $\vec{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z-x^2)\,\vec{k}$,

$S^+ =$ parapluie de Whitney $\begin{cases} x^2 = y^2 z \\ x,y,z \in [0,1] \end{cases}$ paramétré par $\begin{cases} f(u,v) = (uv, v, u^2) \\ u,v \in [0,1] \end{cases}$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} + xy^2\,\vec{\jmath} + x(y-z)\,\vec{k}$, $\quad S^+ =$ carré $\begin{cases} z = 3 \\ x,y \in [0,1] \end{cases}$ avec paramètres (x,y).

c) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$,

$S^+ =$ calotte de sphère $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases}$ avec paramètres = coordonnées sphériques (φ,θ).

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, $\quad S^+ =$ calotte de sphère de l'exercice précédent.

Exercice 21 – Flux de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$
Calculer le flux du rotationnel des champs de vecteurs suivants, dans l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en calculant le rotationnel, en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant le bord de S^+ et en appliquant le
théorème de Stokes $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\vec{d\ell}$.

a) $\vec{U}(x,y) = (2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$, $\quad S^+ =$ disque $\quad x^2+y^2 \leqslant R^2 \quad$ orienté par $\vec{n} = \vec{k}$.

b) $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}$

= **potentiel vectoriel du champ magnétique** $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$,

$S^+ =$ cylindre (ouvert) $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ entrant.

TD 8 – FLUX ET THÉORÈME DE GAUSS

Exercice 22 – Flux à travers une surface fermée

Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, à travers les surfaces fermées indiquées, dans l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant la divergence du champ et le domaine Ω délimité par S^+, et en appliquant le **théorème de Gauss** $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\, dx\, dy\, dz.$

a) $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$,

$S =$ boite cylindrique fermée $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = H \end{cases}$

orientée par $\vec{n}$ entrant.

b) $\vec{V}(x,y,z) = z^2 y\,\vec{\imath} + xy\,\vec{k}$, $S =$ statue du David de Michelangelo à Florence, orientée par $\vec{n}$ entrant.

c) Calculer le flux du **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ produit par le soleil, à travers la surface de la planète Terre, orientée par $\vec{n}$ entrant.

Exercice 23 – Flux

Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, en utilisant la définition ou un théorème approprié (Stokes ou Gauss) :

a) $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$,

$S^+ =$ hélicoïde (escalier en colimaçon) paramétré par $\begin{cases} f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \\ r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = y^2\,\vec{\imath} + z\,\vec{k}$, $S^+ =$ triangle $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases}$ avec paramètres $\begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}$.

[*Noter que les bornes des variables x, y et z sont liées sur S. Par exemple, si on choisit $x \in [0,1]$ comme variable indépendante, alors on a $y \in [0,1-x]$ et $z = 1-(x+y)$, ou bien $z \in [0,1-x]$ et $y = 1-(x+z)$.*]

c) $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U}$ où $\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\,\vec{\imath} + (x+y^2)\,\vec{\jmath}$,

$S^+ =$ surface plane délimitée par $\begin{cases} y = x^2 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = y^2 \\ y : 1 \to 0 \end{cases}$.

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, en sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Phi$ où $\Phi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r}$

$S^+ =$ cube de coté R centré en $(3R, 3R, 3R)$ orienté par $\vec{n}$ sortant.

e) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique**, en sachant que $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$ où $\vec{A}(\rho) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}$,

$S+=$ écran vertical $\begin{cases} \rho = \varphi + 1 \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ sortant.