

# Corrigé du fascicule d'exercices pour l'UE Maths 2B

Printemps 2026

A. Frabetti <[frabetti@math.univ-lyon1.fr](mailto:frabetti@math.univ-lyon1.fr)>

N. Jacquemot <[nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr](mailto:nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr)>

## Table des matières

<b>Ch. 4 – Champs</b>	<b>2</b>
TD 1 – Champs scalaires et champs de vecteurs . . . . .	2
TD 2 – Champs de vecteurs et lignes de champ . . . . .	7
TD 3 – Champs conservatifs . . . . .	16
TD 4 – Champs incompressibles . . . . .	27
TD 5 – Champs de vecteurs périodiques et symétriques . . . . .	33
<b>Ch. 5 – Circulation et flux</b>	<b>40</b>
TD 6 – Courbes et circulation . . . . .	40
TD 7 – Surfaces, flux et théorème de Stokes . . . . .	48
TD 8 – Flux et théorème de Gauss . . . . .	63

# TD 1 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

## Exercice 1 – Champs scalaires, surfaces de niveau

Considérons le champ scalaire de  $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2},$$

où  $K > 0$  est une constante.

- Exprimer  $\phi$  en coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  et en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , trouver les surfaces de niveau  $a$  de  $\phi$  en séparant les cas  $a \geq 0$  et  $a < 0$ , et dessiner celles de niveau  $a = -1$  et  $a = -2$ . [Utiliser l'expression de  $\phi$  en coordonnées cylindriques.]
- Dessiner le graphe du champ  $\phi$  comme fonction de la seule variable  $\rho$ .

Corrigé

- a) En coordonnées cylindriques on a  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , et en coordonnées sphériques on a  $\rho = r \sin \theta$ , donc

$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2} \implies \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} \implies \phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{K}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

- b) Pour  $a \in \mathbb{R}$ , la surface de niveau  $a$  de  $\phi$  est

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} = a \right\} = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho^2 = -\frac{K}{a} \right\}.$$

Puisque  $\rho^2 \geq 0$  pour tous les points de l'espace, et puisque  $K > 0$ , l'égalité  $\rho^2 = -\frac{K}{a}$  ne peut se vérifier que si  $a < 0$ . Par conséquent, la surface  $S_a(\phi)$  est non vide si et seulement si  $a < 0$ , et dans ce cas on a  $-\frac{K}{a} > 0$  et donc

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{-K/a} \right\}.$$

Cette surface est un cylindre d'axe la droite  $Oz$ , de rayon  $R_a = \sqrt{-K/a}$  et de hauteur infinie.

En particulier, on a

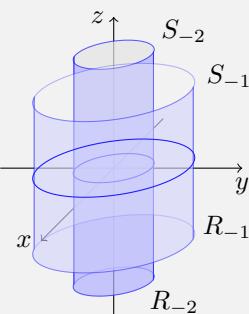
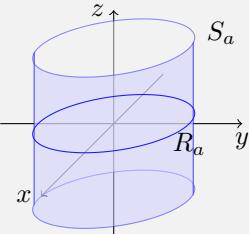
$$S_{-1}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K} \right\}$$

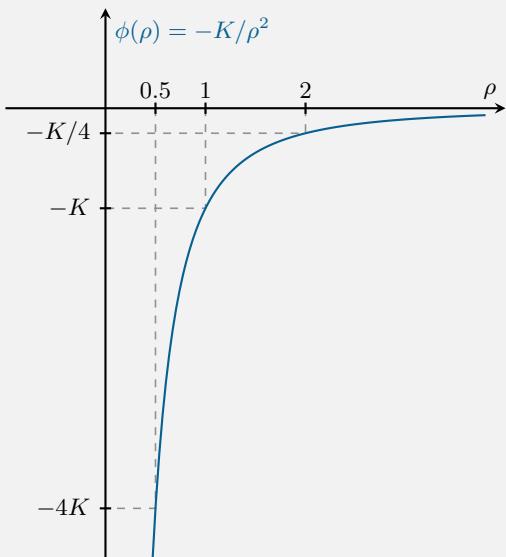
et

$$S_{-2}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K/2} \right\},$$

et puisque  $\sqrt{K/2} < \sqrt{K}$ , le cylindre  $S_{-2}(\phi)$  est plus proche à l'axe  $Oz$  du cylindre  $S_{-1}(\phi)$ .

- c) Le champ  $\phi$  a une valeur constante  $a$  sur chaque surface de niveau  $S_a$ . Pour représenter  $\phi$  comme fonction, on utilise le rayon  $\rho$  pour déterminer les surfaces  $(\rho = R_a)$  et on dessine le graphe de  $\phi$  comme fonction de  $\rho$  :





## Exercice 2 – Champs de vecteurs

Trouver le domaine de définition et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a)  $\vec{V}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$

b)  $\vec{V}(x, y) = (x + 1) \vec{i} + y \vec{j}$

c)  $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$

d)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\varphi$

e)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi$

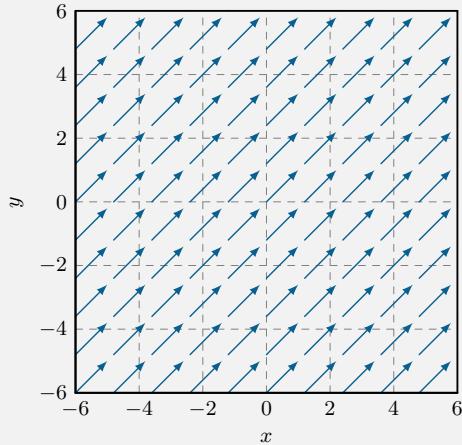
f)  $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$

g)  $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + y \vec{j} + \vec{k}$

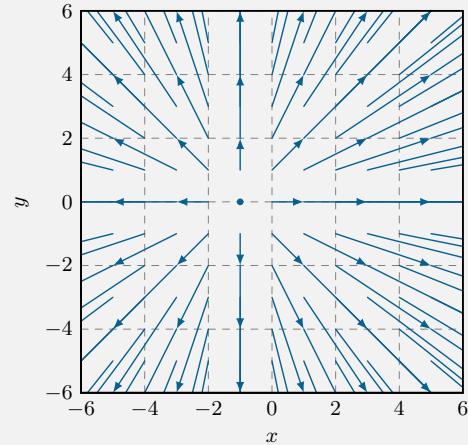
h)  $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_\theta + r \vec{e}_\varphi$

Corrigé

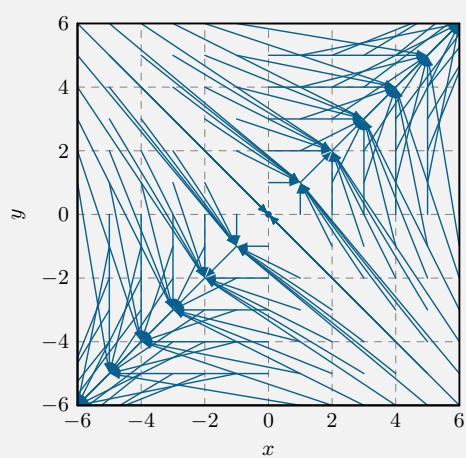
a)  $\vec{V}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $D = \mathbb{R}^2$



b)  $\vec{V}(x, y) = (x + 1) \vec{i} + y \vec{j}$ ,  $D = \mathbb{R}^2$

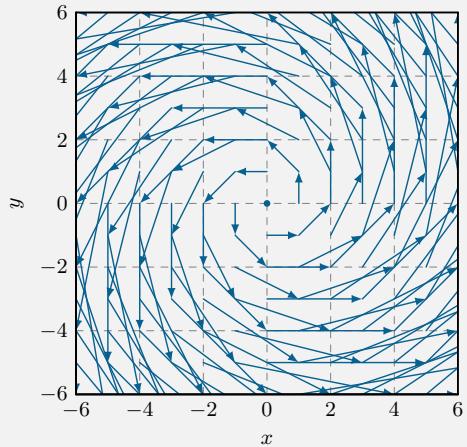


c)  $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$ ,  $D = \mathbb{R}^2$

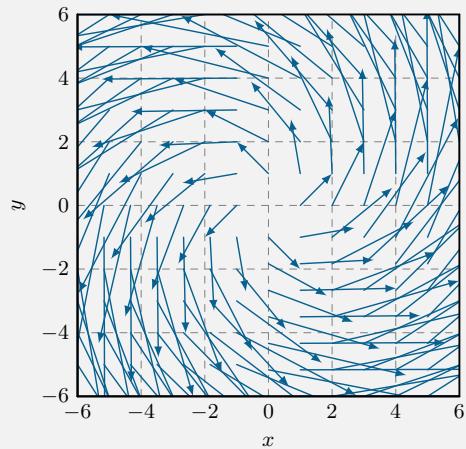


d)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\varphi$ ,  $D = \mathbb{R}^2$

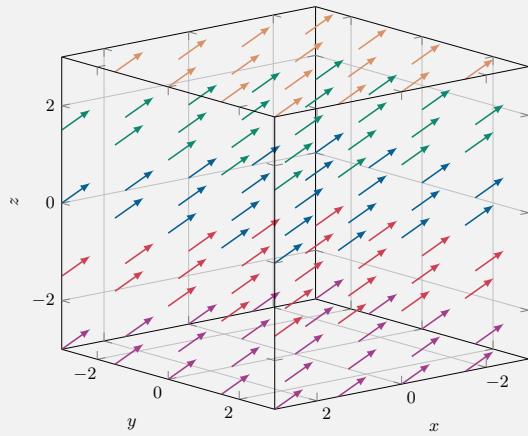
((0, 0) est admis car  $\rho \vec{e}_\varphi = \vec{0}$  en (0, 0))



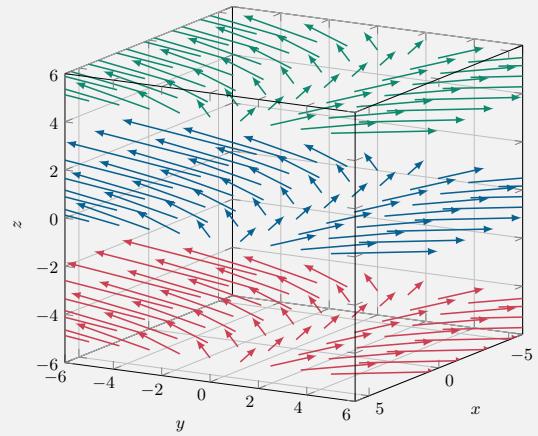
e)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi$ ,  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   
(car le vecteur  $\vec{e}_\rho$  n'est pas défini en (0, 0))



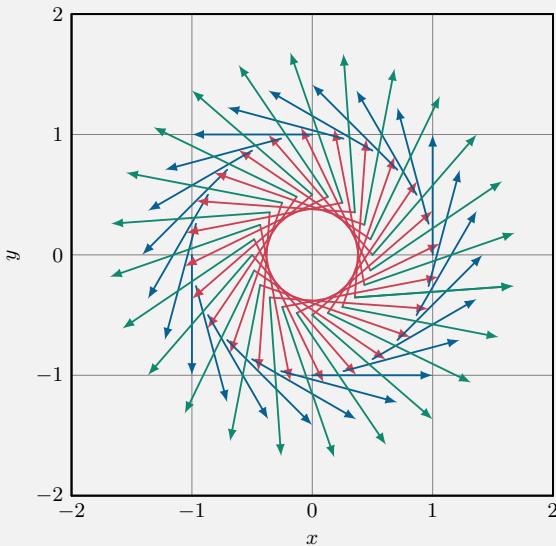
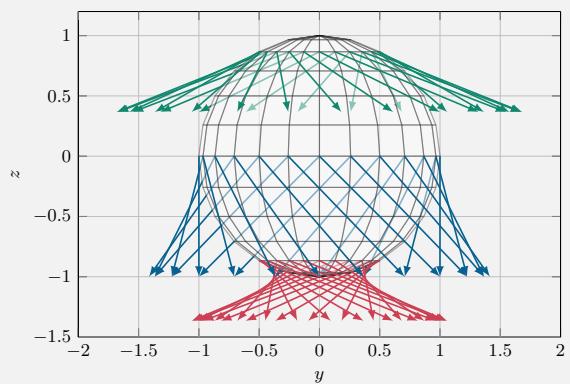
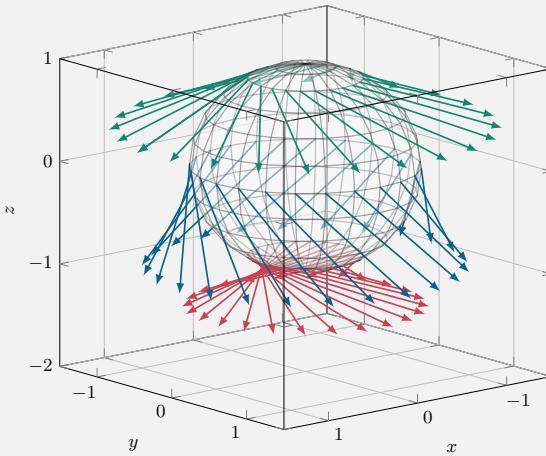
f)  $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $D = \mathbb{R}^3$



g)  $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ ,  $D = \mathbb{R}^3$



h)  $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_\theta + r \vec{e}_\varphi, \quad D = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \geq 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$



$r = 1 \quad$  (sphère indiquée en gris)

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{12}, \dots, \frac{23\pi}{12}$$

### Exercice 3 – Dessin des champs de vecteurs

Relier chaque champ vectoriel à son dessin.

a)  $\vec{V}(x, y) = -y \vec{i}$

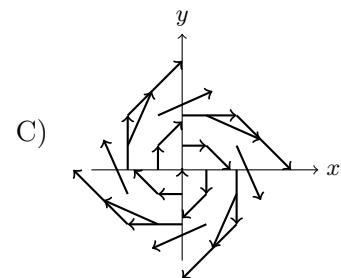
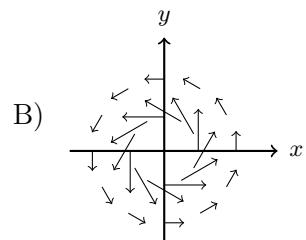
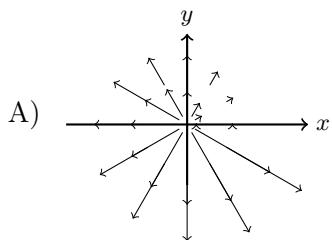
c)  $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$

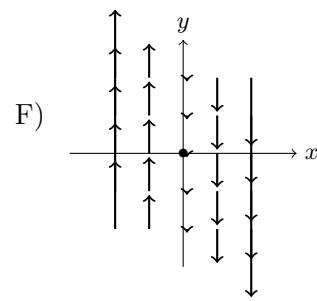
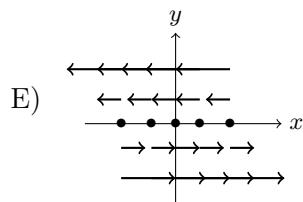
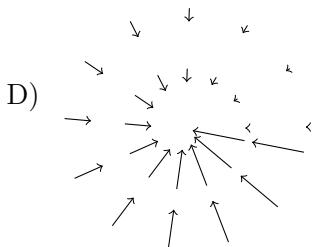
e)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$

b)  $\vec{V}(x, y) = -x \vec{j}$

d)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \varphi \vec{e}_\rho$

f)  $\vec{V}(\rho, \varphi) = -\varphi \vec{e}_\rho$





Corrigé

a) Pour le champ  $\vec{V}(x, y) = -y \vec{i}$ , toutes les flèches sont horizontales, dirigées vers  $\vec{i}$  quand  $y < 0$  et vers  $-\vec{i}$  quand  $y > 0$  : son dessin est le E).

b) Pour le champ  $\vec{V}(x, y) = -x \vec{j}$ , toutes les flèches sont verticales, dirigées vers  $\vec{j}$  quand  $x < 0$  et vers  $-\vec{j}$  quand  $x > 0$  : son dessin est le F).

c) Le champ  $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$  en coordonnées polaires devient

$$\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \vec{i} - \rho \cos \varphi \vec{j} = \rho (\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j}) = -\rho \vec{e}_\varphi,$$

donc les flèches sont dirigées dans le sens de rotation horaire autour de l'origine, comme  $-\vec{e}_\varphi$  : son dessin est le C).

d) Pour le champ  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \varphi \vec{e}_\rho$ , les flèches sont dirigées dans la direction radiale sortant (vers l'extérieur), comme  $\vec{e}_\rho$ , vu que l'angle  $\varphi$  est toujours positif (dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ). Donc son dessin est le A).

e) Pour le champ  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$ , les flèches sont dirigées dans le sens de rotation antihoraire autour de l'origine, comme  $\vec{e}_\varphi$  : son dessin est le B).

f) Pour le champ  $\vec{V}(\rho, \varphi) = -\varphi \vec{e}_\rho$ , les flèches sont dirigées dans la direction radiale entrant (vers l'origine), comme  $-\vec{e}_\rho$ , donc son dessin est le D).