

Corrigé du fascicule d'exercices pour l'UE Maths 2B

Printemps 2026

A. Frabetti <frabetti@math.univ-lyon1.fr>

N. Jacquemot <nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr>

Table des matières

Ch. 4 – Champs	2
TD 1 – Champs scalaires et champs de vecteurs	2
TD 2 – Champs de vecteurs et lignes de champ	7
TD 3 – Champs conservatifs	16
TD 4 – Champs incompressibles	27
TD 5 – Champs de vecteurs périodiques et symétriques	33
Ch. 5 – Circulation et flux	40
TD 6 – Courbes et circulation	40
TD 7 – Surfaces, flux et théorème de Stokes	48
TD 8 – Flux et théorème de Gauss	63

TD 1 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 – Champs scalaires, surfaces de niveau

Considérons le champ scalaire de \mathbb{R}^3

$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

- Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, θ, φ) .
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geq 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [Utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.]
- Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ .

Corrigé

- a) En coordonnées cylindriques on a $x^2 + y^2 = \rho^2$, et en coordonnées sphériques on a $\rho = r \sin \theta$, donc

$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2} \implies \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} \implies \phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{K}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

- b) Pour $a \in \mathbb{R}$, la surface de niveau a de ϕ est

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} = a \right\} = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho^2 = -\frac{K}{a} \right\}.$$

Puisque $\rho^2 \geq 0$ pour tous les points de l'espace, et puisque $K > 0$, l'égalité $\rho^2 = -\frac{K}{a}$ ne peut se vérifier que si $a < 0$. Par conséquent, la surface $S_a(\phi)$ est non vide si et seulement si $a < 0$, et dans ce cas on a $-\frac{K}{a} > 0$ et donc

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{-K/a} \right\}.$$

Cette surface est un cylindre d'axe la droite Oz , de rayon $R_a = \sqrt{-K/a}$ et de hauteur infinie.

En particulier, on a

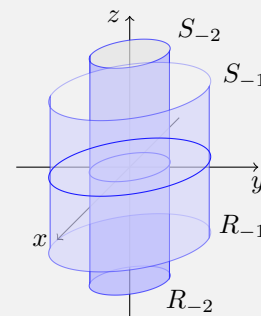
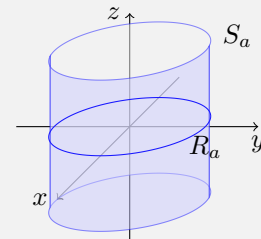
$$S_{-1}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K} \right\}$$

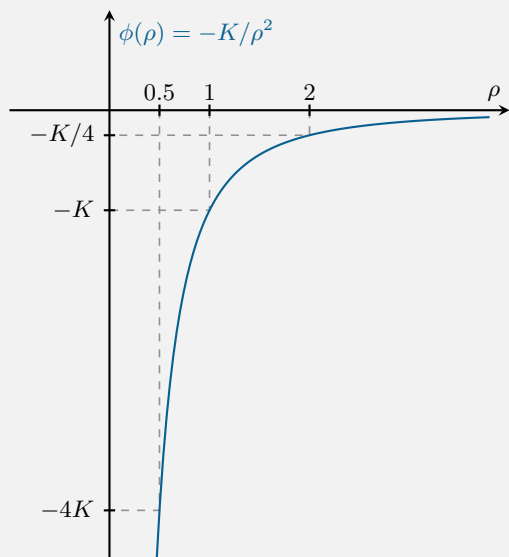
et

$$S_{-2}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K/2} \right\},$$

et puisque $\sqrt{K/2} < \sqrt{K}$, le cylindre $S_{-2}(\phi)$ est plus proche à l'axe Oz du cylindre $S_{-1}(\phi)$.

- c) Le champ ϕ a une valeur constante a sur chaque surface de niveau S_a . Pour représenter ϕ comme fonction, on utilise le rayon ρ pour déterminer les surfaces ($\rho = R_a$) et on dessine le graphe de ϕ comme fonction de ρ :





Exercice 2 – Champs de vecteurs

Trouver le domaine de définition et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{V}(x, y) = (x + 1) \vec{i} + y \vec{j}$

c) $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$

d) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\varphi$

e) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi$

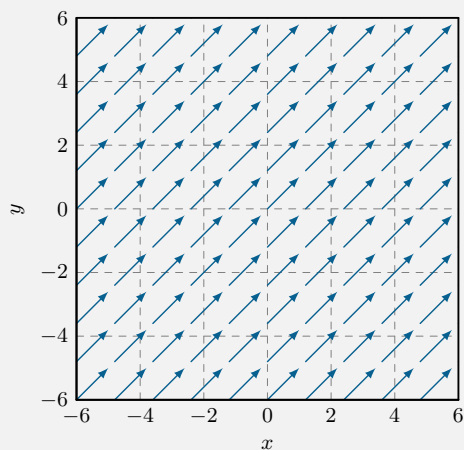
f) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$

g) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + y \vec{j} + \vec{k}$

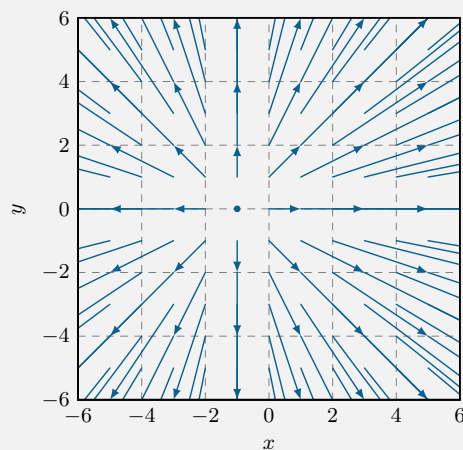
h) $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_\theta + r \vec{e}_\varphi$

Corrigé

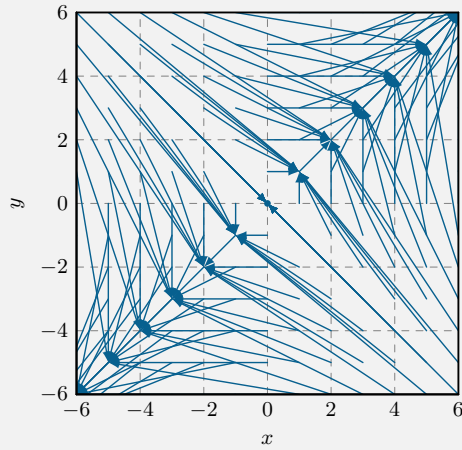
a) $\vec{V}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}, \quad D = \mathbb{R}^2$



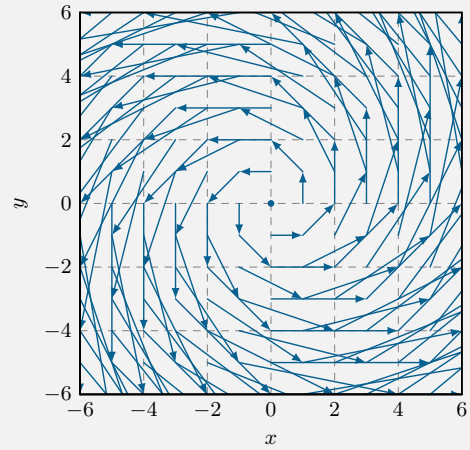
b) $\vec{V}(x, y) = (x + 1) \vec{i} + y \vec{j}, \quad D = \mathbb{R}^2$



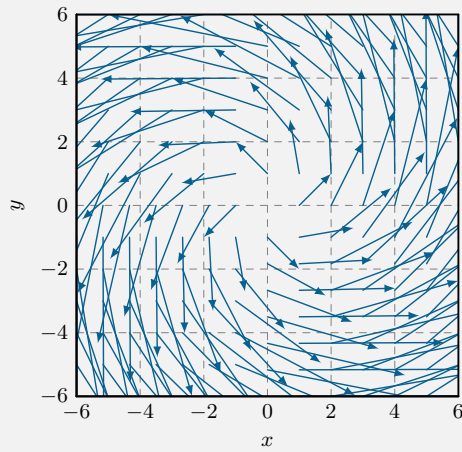
c) $\vec{V}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}, \quad D = \mathbb{R}^2$



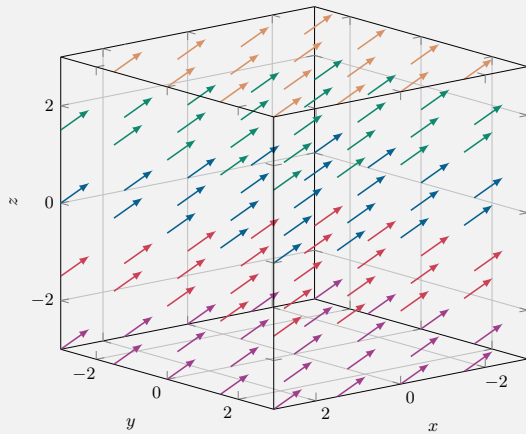
d) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\varphi, \quad D = \mathbb{R}^2$
 ((0,0) est admis car $\rho \vec{e}_\varphi = \vec{0}$ en (0,0))



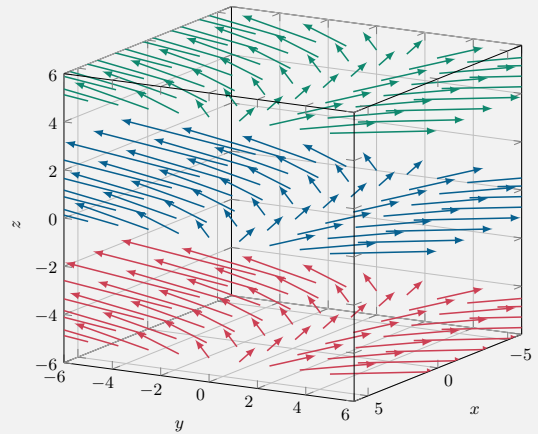
e) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 (car le vecteur \vec{e}_ρ n'est pas défini en (0,0))



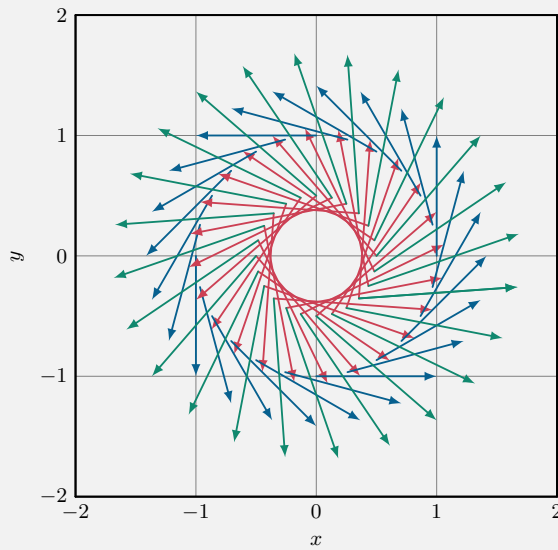
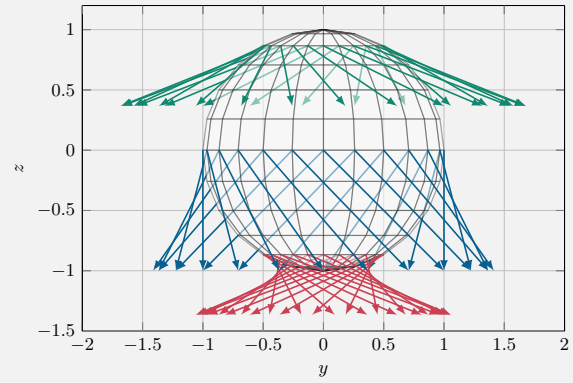
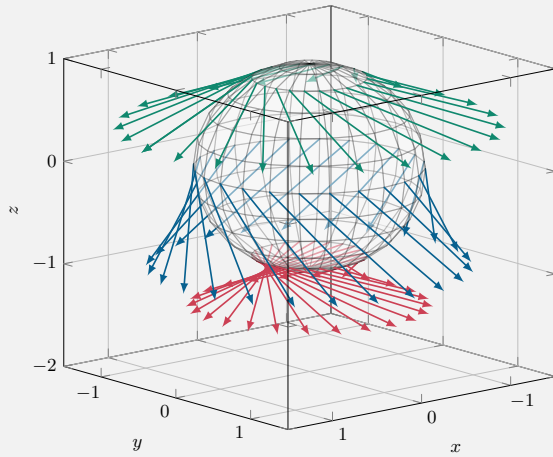
f) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad D = \mathbb{R}^3$



g) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}, \quad D = \mathbb{R}^3$



h) $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_\theta + r \vec{e}_\varphi$, $D = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \geq 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$



$r = 1$ (sphère indiquée en gris)

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{12}, \dots, \frac{23\pi}{12}$$

Exercice 3 – Dessin des champs de vecteurs

Relier chaque champ vectoriel à son dessin.

a) $\vec{V}(x, y) = -y \vec{i}$

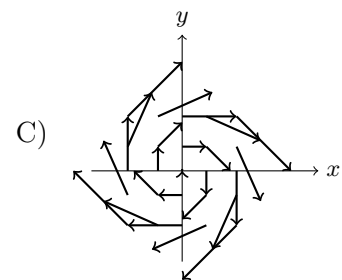
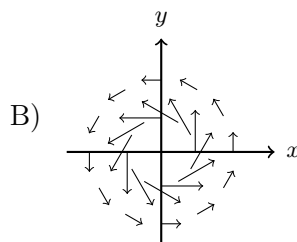
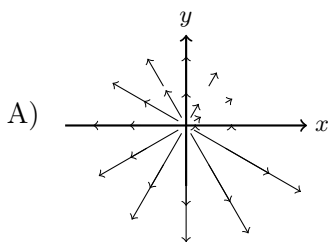
c) $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$

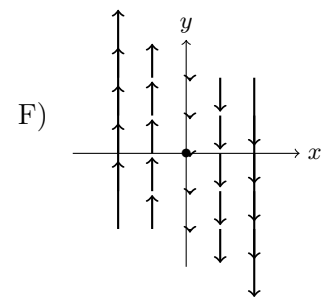
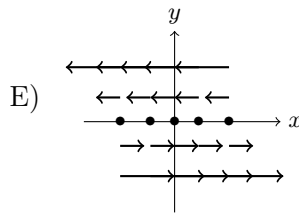
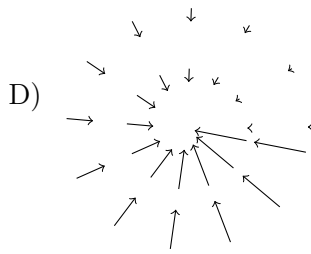
e) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$

b) $\vec{V}(x, y) = -x \vec{j}$

d) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \varphi \vec{e}_\rho$

f) $\vec{V}(\rho, \varphi) = -\varphi \vec{e}_\rho$





Corrigé

- a) Pour le champ $\vec{V}(x, y) = -y\vec{i}$, toutes les flèches sont horizontales, dirigées vers \vec{i} quand $y < 0$ et vers $-\vec{i}$ quand $y > 0$: son dessin est le E).
- b) Pour le champ $\vec{V}(x, y) = -x\vec{j}$, toutes les flèches sont verticales, dirigées vers \vec{j} quand $x < 0$ et vers $-\vec{j}$ quand $x > 0$: son dessin est le F).
- c) Le champ $\vec{V}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ en coordonnées polaires devient

$$\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \vec{i} - \rho \cos \varphi \vec{j} = \rho (\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j}) = -\rho \vec{e}_\varphi,$$

donc les flèches sont dirigées dans le sens de rotation horaire autour de l'origine, comme $-\vec{e}_\varphi$: son dessin est le C).

- d) Pour le champ $\vec{V}(\rho, \varphi) = \varphi \vec{e}_\rho$, les flèches sont dirigées dans la direction radiale sortant (vers l'extérieur), comme \vec{e}_ρ , vu que l'angle φ est toujours positif (dans l'intervalle $[0, 2\pi[$). Donc son dessin est le A).
- e) Pour le champ $\vec{V}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$, les flèches sont dirigées dans le sens de rotation antihoraire autour de l'origine, comme \vec{e}_φ : son dessin est le B).
- f) Pour le champ $\vec{V}(\rho, \varphi) = -\varphi \vec{e}_\rho$, les flèches sont dirigées dans la direction radiale entrant (vers l'origine), comme $-\vec{e}_\rho$, donc son dessin est le D).