TD 2 – CHAMPS DE VECTEURS ET LIGNES DE CHAMP

Exercice 4 – Changement de coordonnées pour les champs de vecteurs
Exprimer les champs vectoriels suivants en coordonnées polaires (dans le plan) ou bien cylindriques et sphériques (dans l'espace) :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Corrigé

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(\rho,\varphi) &= (\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + (\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\vec{e_\rho} + (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\vec{e_\varphi}\,. \end{aligned}$$

b) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(\rho,\varphi) &= \rho\,\sin\varphi\,(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) - \rho\,\cos\varphi\,(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= \rho\,(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)\,\vec{e_\rho} - \rho\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,\vec{e_\varphi} \\ &= -\rho\,\vec{e_\varphi}\,. \end{aligned}$$

c) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(\rho,\varphi,z) &= \rho\,\cos\varphi\,(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \rho\,\sin\varphi\,(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= \rho\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\vec{e_\rho} + \rho\,(-\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\,\vec{e_\varphi} \\ &= \rho\,\vec{e_\rho}\,, \end{aligned}$$

$$\vec{V}(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}).$$

d) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}) + z\,\vec{k}$

$$\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k},$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(r,\varphi,\theta) &= r\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}) + r\,\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) \\ &= r\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\vec{e_r} + r\,(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\,\vec{e_\theta} \\ &= r\,\vec{e_r}\,. \end{aligned}$$

Exercice 5 – Lignes de champ
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

e) $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{e_r}$ (champ gravitationnel)

Corrigé

Une **ligne de champ** pour le champ $\vec{V}$ défini sur $D \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t) \in D \subset \mathbb{R}^3$ telle que

$$(*) \qquad \vec{V}(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \qquad \text{pour tout } t.$$

Il y a une infinité de lignes de champ, qui diffèrent par le point de passage à un instant donné (par exemple, pour $t = 0$, le point $\gamma(0)$). On cherche $\gamma(t)$ dans la paramétrisation cartésienne, cylindrique ou sphérique selon comment est présenté le champ $\vec{V}$.

a) $\vec{V}(x, y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ est un champ plan en coordonnées cartésiennes, avec domaine $D = \mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ paramétrées comme courbes planes en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse d'une telle courbe est $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ est une solution du système

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath} \overset{(*)}{=} \vec{V}(x(t), y(t)) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t + a \\ y(t) = t + b \end{cases}$$

$$\iff \gamma(t) = (t + a, t + b) = (a, b) + t\,(1, 1),$$

où on voit que $(a, b) = \gamma(0)$ est le point par où passe la courbe γ au temps $t = 0$.

Cette paramétrisation est celle d'une droite passant par (a, b) et parallèle au vecteur $(1, 1)$, c'est-à-dire dirigée par le vecteur $(1, 1)$. En effet, dans l'expression de x et y comme fonctions de t on peut calculer t à partir d'une équation et le remplacer dans la deuxième : on obtient l'équation cartésienne de la courbe γ,

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = t + b \end{cases} \iff \begin{cases} t = x - a \\ y = (x - a) + b \end{cases} \implies y = x + (b - a) \quad \text{éq. d'une droite.}$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\vec{V}$ sont les droites

$$\gamma(t) = (t + a, t + b) \qquad \text{ou} \qquad y = x + (b - a) \qquad \text{pour tout choix de } a, b \in \mathbb{R},$$

et le point (a, b) représente le point de passage de γ au temps $t = 0$.
Autrement dit, pour tout point (a, b) du plan il y a exactement une ligne de champ γ de $\vec{V}$ passant par (a, b), c'est la droite $\gamma(t) = (t + a, t + b)$.

b) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ est un champ de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^3$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse d'une telle courbe est $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité $(*)$ donne le système

$$\dot{\gamma}(t) \overset{(*)}{=} \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 2 \\ \dot{z}(t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t + a \\ y(t) = 2t + b \\ z(t) = t + c \end{cases}$$

$$\iff \gamma(t) = (t + a, 2t + b, t + c) = (a, b, c) + t\,(1, 2, 1),$$

où on voit que $(a, b, c) = \gamma(0)$ est le point par où passe la courbe γ au temps $t = 0$.

Comme dans le plan, cette paramétrisation est celle d'une droite (dans l'espace 3D cette fois) passant par (a, b, c) et dirigée par le vecteur $(1, 2, 1)$. L'équation cartésienne d'une telle droite consiste de deux équations :

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = 2t + b \\ z = t + c \end{cases} \iff \begin{cases} t = x - a \\ y = 2(x - a) + b \\ z = (x - a) + c \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x + (b - 2a) \\ z = x + (c - a) \end{cases} \quad \text{éq. d'une droite dans } \mathbb{R}^3.$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\overrightarrow{V}$ sont les droites

$$\gamma(t) = (t + a, 2t + b, t + c) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y = 2x + (b - 2a) \\ z = x + (c - a) \end{cases} \qquad \text{pour tout choix de } a, b, c \in \mathbb{R},$$

et le point (a, b, c) représente le point de passage de γ au temps $t = 0$.

c) $\overrightarrow{V}(x, y) = (x + 1)\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath}$ est un champ de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse de γ est $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t)\, \vec{\imath} + \dot{y}(t)\, \vec{\jmath}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ vérifie

$$\dot{\gamma}(t) \overset{(*)}{=} \overrightarrow{V}(x(t), y(t)) \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 1 \quad (1) \\ \dot{y}(t) = y(t) \quad (2) \end{cases}.$$

Ceci est un système d'équations différentielles en deux inconnues $x(t)$, $y(t)$, avec deux équations séparées, du 1er ordre, linéaires et à coefficients constants.

Les solutions de l'éq. (1) sont les fonctions $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ où

- x_0 est la solution générale de l'éq. homogène $\dot{x}(t) = x(t)$, donc $x_0(t) = \lambda e^t$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- et x_p est une solution particulière de l'équation complète : puisque le terme inohomgène est la constante 1, on cherche une solution particulière $x_p(t) = c$ constante, et (1) impose que $\dot{x}_p(t) = 0 = c + 1$, d'où suit $c = -1$.

En somme, on a $x(t) = \lambda\, e^t - 1$.

Pour l'éq. (2), qui est homogène, on a $y(t) = y_0(t) = \mu\, e^t$, quelconque soit $\mu \in \mathbb{R}$.

Au final, les lignes de champ de $\overrightarrow{V}$ sont les courbes paramétrées

$$\gamma(t) = (\lambda\, e^t - 1, \mu\, e^t), \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et quelconque soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

où λ et μ fixent le point de passage à $t = 0$: $\gamma(0) = (\lambda - 1, \mu)$. Pour trouver l'équation cartesienne de ces courbes, on se débarasse du paramètre t :

$$\begin{cases} x = \lambda\, e^t - 1 \\ y = \mu\, e^t \end{cases} \iff \begin{cases} \mu\, \lambda\, e^t = \mu\, x + \mu \\ \lambda y = \lambda \mu\, e^t \end{cases} \implies \lambda\, y = \mu\, x + \mu \qquad \text{éq. d'une droite.}$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\overrightarrow{V}$ sont des droites d'éq. cartésienne $\mu\, x - \lambda\, y + \mu = 0$ paramétrées de façon différente que celle linéaire de l'exercice a).

d) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$ est un champ de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

avec vitesse $\dot\gamma(t) = \dot x(t)\,\vec{\imath} + \dot y(t)\,\vec{\jmath}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ vérifie

$$\dot\gamma(t) \overset{(*)}{=} \overrightarrow{V}(x(t), y(t)) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \dot x(t) = y(t) & (1) \\ \dot y(t) = x(t) & (2) \end{cases}$$

Ceci est un système d'équations différentielles en deux inconnues $x(t)$, $y(t)$, avec deux équations (non séparées) du 1er ordre, linéaires et à coefficients constants, qui peuvent se représenter par un système matriciel

$$\begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3).$$

Puisque les deux inconnues ne sont pas sousmises à deux équations séparées, on ne peut pas les calcules par intégration comme dans l'exemple c). En fait, pour l'instant on ne sait pas trouver une paramétrisation des lignes de champ (la résolution du système (3) sera donnée dans le cours Math3), mais on sait trouver l'équation cartésienne des lignes de champ, avec une astuce : on multiplie (1) par $x(t)$ et (2) par $y(t)$, alors on obtient

$$\begin{cases} x(t)\,\dot x(t) = x(t)\,y(t) \\ y(t)\,\dot y(t) = x(t)\,y(t) \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x(t)\,\dot x(t) = y(t)\,\dot y(t) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{d\,(x(t)^2)}{d\,t} = \frac{1}{2}\frac{d\,(y(t)^2)}{d\,t}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \int \frac{d\,x(t)^2}{d\,t}\,dt = \int \frac{d\,y(t)^2}{d\,t}\,dt$$

$$\Longrightarrow\quad x(t)^2 = y(t)^2 + c \qquad \text{quelconque soit } c \in \mathbb{R}.$$

Les lignes de champ sont donc les courbes

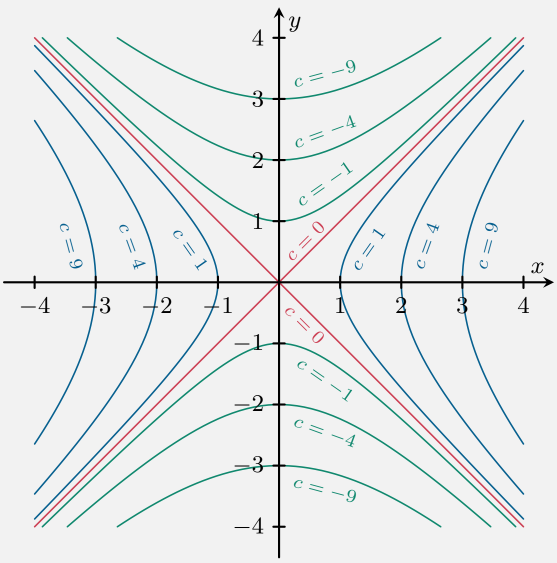
$$C = \{\ \gamma(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (x,y) \mid x^2 - y^2 = c\ \}$$

qui dépendent du choix de la constante c :

— si $c > 0$ alors C est une hyperbole d'éq. $\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1$ (en bleu),

— si $c = 0$ alors C est l'union de deux droites $y = \pm x$ (en rouge),

— si $c < 0$ alors C est une hyperbole d'éq. $\left(\frac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{-c}}\right)^2 = 1$ (en vert).



e) On cherche les lignes de champs en coordonnées sphériques sous la forme $\gamma(t) = r(t)\,\vec{e_r}$:

$$\dot\gamma(t) = \dot r(t)\,\vec{e_r} + r(t)\,\dot{\vec{e_r}} = \dot r(t)\,\vec{e_r} + r(t)\big(\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e_\varphi}\big)$$

L'équation caractéristique de ces lignes de champ est

$$\dot\gamma(t) = \vec{\mathcal{G}}\big(r(t)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \dot r(t)\,\vec{e_r} + r(t)\big(\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e_\varphi}\big) = -\frac{GM}{r(t)^2}\,\vec{e_r}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r(t)^2\,\dot r(t) = -GM \\ r(t)\,\dot\theta = 0 \\ r(t)\,\dot\varphi\,\sin\theta = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r(t)^2\,\dot r(t) = -GM \\ \dot\theta = 0 \\ \dot\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\theta = 0 \end{cases}$$

Conclusion : les lignes de champ sont des droites passant par l'origine car $\varphi = \text{const.}$ et $\theta = \text{const.}$
La solution générale de l'équation différentielle ci-dessus pour $r(t)$ est

$$r^2\,\frac{d\,r}{d\,t} = -GM \quad\Leftrightarrow\quad r^2\,dr = -GM\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \int_{r_0}^{r_1} r^2\,dr = -\int_{t_0}^{t_1} GM\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad r_1^3 - r_0^3 = 3\,GM(t_0 - t_1) \quad\Leftrightarrow\quad r_1 = \sqrt[3]{r_0^3 + 3\,GM(t_0 - t_1)} \quad ,$$

où on a paramétré une ligne de champ qui part d'un point à distance r_0 de l'origine à l'instant t_0 pour arriver à la distance r_1 à l'instant t_1. Comme $r_1 \geqslant 0$, on doit avoir

$$t_1 \leqslant t_0 + \frac{r_0^3}{3\,GM} \qquad ,$$

ce qui montre que la ligne de champ se termine dès qu'elle atteint l'origine à l'instant $t_0 + r_0^3/(3\,GM)$.
En posant $t_0 = 0$, $t_1 = t$ et $r_1 = r(t)$, les lignes de champ s'expriment sous la forme

$$\gamma(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 3\,GMt}\ \vec{e_r} \qquad \text{avec } t \leqslant \frac{r_0^3}{3\,GM} \qquad ,$$

où la direction de $\vec{e_r}$ est déterminée par le choix de $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Exercice 6 – Gradient et Laplacien en coordonnées polaires [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 donnée en coordonnées cartesiennes et soit $\tilde f(\rho, \varphi) = f(x, y)$ son expression en coordonnées polaires, où $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

Trouver l'expression en coordonnées polaires du gradient $\tilde\nabla$ et du Laplacien $\tilde\Delta$, définis par les identitées

$$a) \quad \tilde\nabla\tilde f(\rho, \varphi) = \nabla f(x, y) \qquad \text{et} \qquad b) \quad \tilde\Delta\tilde f(\rho, \varphi) = \Delta f(x, y).$$

Corrigé

Pour le changement de coordonnées

$$(x, y) = h(\rho, \varphi) = \big(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)\big) = (\rho\,\cos\varphi, \rho\,\sin\varphi)$$

posons $\tilde f(\rho, \varphi) = f(h(\rho, \varphi) = f(x, y)$.

a) **Raisonnement :** Pour exprimer $\nabla f(x, y)$ en coordonnées polaires, c'est-à dire l'écrire comme $\tilde\nabla\tilde f(\rho, \varphi)$, il faut exprimer en coordonnées polaires chaque composante de

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec\imath + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec\jmath,$$

c'est-à-dire

(i) exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en termes de $\frac{\partial \tilde f}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}$ (calcul à faire), et

(ii) exprimer $\vec\imath$ et $\vec\jmath$ en termes de $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ (voir le formulaire).

Pour (i), vu que les fonctions $x = x(\rho, \varphi)$ et $y = y(\rho, \varphi)$ sont définies globalement (pour tout ρ et φ), alors que la composante $\varphi = \varphi(x, y)$ de leur réciproque ne s'exprime que par des formules partielles selon la position de (x, y) dans le plan, ce qu'on sait calculer se sont les dérivées partielles $\frac{\partial \tilde f}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et non le contraire. A priori, il faut donc partir de ce calcul et invérser le système pour obtenir (i).
Cela dit, en pratique on n'a pas besoin d'invérser le système pour exprimer $\nabla f(x, y)$ en coordonnées polaires, car les dérivées se regroupent en des termes qu'on reconnait sans les calcules (i).

a) **Calculs :** Calculons les dérivées de la fonction composée $\tilde f$ avec la règle de la chaîne :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} & = & \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = -\sin\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} .$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde\nabla \tilde f(\rho, \varphi) = \nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec\imath + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec\jmath \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= \left(\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,\vec{e_\rho} + \left(-\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,\vec{e_\varphi} \\ &= \frac{\partial \tilde f}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi}\,. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\tilde\nabla \tilde f = \dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi}}$ i.e. $\boxed{\tilde\nabla = \vec{e_\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e_\varphi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi}}$.

À noter qu'en inversant le système (1) on trouve

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos\varphi\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho} - \sin\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \sin\varphi\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho} + \cos\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \end{cases}$$

donc (1) et (2) donnent les formules “compactes”

$$(1) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial \rho} & = & \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & = & -\sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial x} & = & \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} & = & \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{array}}$$

b) **Raisonnement :** Pour exprimer $\Delta f(x, y)$ en coordonnées polaires, c'est-à dire l'écrire comme $\tilde\Delta \tilde f(\rho, \varphi)$, il faut exprimer en coordonnées polaires chaque composante de

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

c'est-à-dire exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en termes de $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho \partial \varphi}$, et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}$.

À noter que, puisque f est de classe C^2, par le Théorème de Schwarz on a $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi \partial \rho}$ et également $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, donc on a trois dérivées secondes indépendantes à considérer, quelconques soient les coordonnées qu'on choisit.

Comme en a), ce qu'on peut calculer facilement est plutôt l'expression de $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho \partial \varphi}$, et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}$ en termes de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: il faut donc écrire un système à trois équations et inverser celui-ci.

Contrairement à a), cette fois il n'y a pas d'astuce particulière pour éviter de faire le calcul complet. Mais on peut simplifier les calculs si en coordonnées polaires on choisit comme dérivées secondes indépendantes les dérivées

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2},$$

où la deuxième dérivée seconde s'exprime en termes de la dérivée mixte mais avec une dérivée première ajoutée qui est non homogène (en degré) et qu'on a envie de cacher dans nos calculs :

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho \partial \varphi}.$$

b) **Calculs :** Vu que $\tilde{f} = f \circ h$ est une fonction composée, ses dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$ le sont aussi, et leur expression comme fonctions composées sont données par le système (1). Par exemple, la première équation, pour $(x, y) = h(\rho, \varphi)$, signifie

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x}\big(h(\rho, \varphi)\big) + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y}\big(h(\rho, \varphi)\big).$$

Alors, à partir du système (1), on calcule les dérivées secondes de $\tilde{f}$ en utilisant la règle de la chaîne à chaque fois qu'on a une fonction composée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \cos\varphi \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) + \sin\varphi \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) \\
&= \cos\varphi \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\varphi\right) + \sin\varphi \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\varphi\right) \\
&= \cos^2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

et de même pour

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right).$$

Au final, on obtient le système

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} &=& \cos^2\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\varphi \sin\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) &=& -\cos\varphi \sin\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos\varphi \sin\varphi \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex]
\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &=& \sin^2\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cos\varphi \sin\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{array}\right. .$$

Inverser ce système est compliqué, mais on n'en a pas besoin pour conclure notre calcul : on remarque d'un coté que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\quad + \left(2\cos\varphi\,\sin\varphi - 2\cos\varphi\,\sin\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},
\end{aligned}
$$

et de l'autre coté que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial \rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{\rho}{\rho}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}.
\end{aligned}
$$

Finalement, on a donc

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}\tilde{f} = \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\boxed{\widetilde{\Delta}\tilde{f} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}}\,.
$$