Exercice 7 – Rotationnel

Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

b) $\vec{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

d) $\vec{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

e) $\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

f) $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\varphi\ \vec{e_r} + r^2\ \vec{e_\theta} + r^2\sin\theta\ \vec{e_\varphi}$

Remarque : si $\vec{A}(x,y) = A_x(x,y)\,\vec{\imath} + A_y(x,y)\,\vec{\jmath}$ est un champ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de z et n'a pas de composante en direction $\vec{k}$, alors le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ n'a qu'une composante en direction $\vec{k}$ et il est de la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(x,y) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

La preuve est un simple calcul direct à partir de la formule générale de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

Corrigé

Pour calculer le rotationnel, on utilise la formule du "pseudo-déterminant" en coordonnées cartesiennes et les formules du formulaire en coordonnées cylindriques et sphériques.

a) $\vec{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right)\\ &= (3z^2 - 2x^2y)\,\vec{\imath} - (0-0)\,\vec{\jmath} + (4xyz - 2xy)\,\vec{k}\end{aligned}$$

b) $\vec{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos(xyz))\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xyz))\right)\\ &\qquad + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xyz)) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xyz))\right)\\ &= xy\ \sin(xyz)\,\vec{\imath} + xy\ \cos(xyz)\,\vec{\jmath} + (-yz\ \sin(xyz) - xz\ \cos(xyz))\,\vec{k}\end{aligned}$$

c) $\vec{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial xz}{\partial z}()\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\\ &= (x-x)\,\vec{\imath} - (y-y)\,\vec{\jmath} + (z-z)\,\vec{k} = \vec{0}\end{aligned}$$

d) $\vec{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(0)\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right)\\ &= xy\,\vec{\jmath} - xz\,\vec{k}\end{aligned}$$

e) $\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho^2(z^2+1))\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)\right)\vec{e_\varphi}\\ &\qquad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^3(z^2+1)) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2\sin\varphi)\right)\vec{k}\\ &= (0 - 2\rho^2 z)\,\vec{e_\rho} + (0-2\rho)\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(3\rho^2(z^2+1) - \rho^2\cos\varphi\right)\vec{k}\end{aligned}$$

f) $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\varphi \; \vec{e_r} \; + r^2 \; \vec{e_\theta} \; + r^2 \sin\theta \; \vec{e_\varphi}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2)\right)\vec{e_r} \; + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}(r^3\sin\theta)\right)\vec{e_\theta} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^3) - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin\varphi)\right)\vec{e_\varphi} \\
&= \frac{1}{r\,\sin\theta}\,(2r^2\cos\theta\sin\theta - 0)\,\vec{e_r} \; + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,r^2\cos\varphi - 3r^2\sin\theta\right)\vec{e_\theta} \; + \frac{1}{r}\,(3r^2)\,\vec{e_\varphi} \\
&= 2r\cos\theta\,\vec{e_r} \; + r\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - 3\sin\theta\right)\vec{e_\theta} \; + 3r\,\vec{e_\varphi}
\end{aligned}$$

Exercice 8 – Champs de gradient

Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $\vec{V}(x,y) = ye^{xy}\;\vec{\imath} - xe^{xy}\;\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = \cos x\;\vec{\imath} + \sin y\;\vec{\jmath}$

e) $\vec{V}(x,y) = (y+\frac{1}{x}, x+\frac{1}{y})$

f) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3)\vec{\imath} + (x^3+3xy^2-2y)\vec{\jmath}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\;\vec{\imath} + \frac{1}{y}\;\vec{\jmath} - \frac{1}{z}\;\vec{k}$

h) $\vec{V}(x,y,z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\vec{\imath} + (y^2-zx)\vec{\jmath} + (z^2-xy)\vec{k}$

Corrigé

Le **Lemme de Poincaré** dit que sur tout sous-ensemble D du domaine de définition de $\vec{V}$ qui est **simplement connexe**, on a l'équivalence

$$\vec{V} \text{ admet un potentiel sur } D \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}.$$

On utilise ce théorème de deux façons :

— Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$, alors $\vec{V}$ admet un potentiel sur tout sous-ensemble simplement connexe D de son domaine de de définition.

— Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \neq \vec{0}$, alors $\vec{V}$ n'admet pas de potentiel, sur n'importe quel sous-ensemble du domaine de définition de $\vec{V}$.

On rappelle aussi que **avoir un potentiel sur** D et **être un champ conservatif sur** D sont synonymes, et signifient tous les deux qu'il existe une fonction réelle f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

N.B. En physique, cela signifie plutôt qu'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\vec{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$. N'oubliez pas de vérifier dans quel sens est utilisé le mot *potentiel*.

Si $\vec{V}$ admet un potentiel f, pour le trouver il faut intégrer l'équation $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

a) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y,x) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a (cf. la Remarque plus haut) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire

$$y\vec{\imath} + x\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) dans la seule variable x et on obtient la primitive de $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ par rapport à x, qui est détérminée à moins d'une valeur constante en x, c'est-à-dire, ici, une fonction de la seule variable y :

$$f(x,y) = \int y\,dx = xy + g(y),$$

d'où, par dérivation, on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \qquad (3).$$

Si on identifie les deux expressions (3) = (2) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ on a alors

$$x + g'(y) = x \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \text{const}.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction $f(x,y) = xy$, obtenue en prenant $g(y) = \text{const} = 0$, et <u>tous les potentiels</u> de $\vec{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = xy + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

b) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y) = (x+y)\,\vec{\imath} + (x-y)\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire

$$(x+y)\vec{\imath} + (x-y)\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x+y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x-y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + xy + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \overset{(2)}{=} x - y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\int y\,dy = -\frac{1}{2}\,y^2 + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 + xy - \frac{1}{2}\,y^2$, et tous les potentiels de $\vec{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 + xy - \frac{1}{2}\,y^2 + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

c) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = ye^{xy}\,\vec{\imath} - xe^{xy}\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xe^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})\right)\vec{k} \\ &= (-e^{xy} - xye^{xy} - e^{xy} - xye^{xy})\,\vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$

Puisque le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

d) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = \cos x\,\vec{\imath} + \sin y\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x)\right)\vec{k} = (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, c'est-à-dire

$$\cos x\,\vec{\imath} + \sin y\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) = \int \cos x\,dx = \sin x + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) \overset{(2)}{=} \sin y \qquad \Longrightarrow \qquad g(y) = \int \sin y\,dy = -\cos y + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\overrightarrow{V}$ la fonction $f(x,y) = \sin x - \cos y$, et tous les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont de la forme

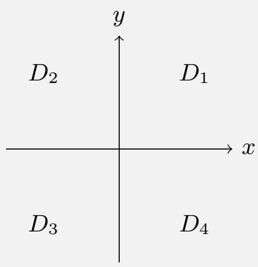
$$f(x,y) = \sin x - \cos y + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

e) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(y + \dfrac{1}{x}\right)\vec{\imath} + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Cette fois, le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ n'est pas tout le plan $\mathbb{R}^2$, parce que les sous-ensembles où $x = 0$ ou bien $y = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ correspondent aux deux axes, respectivement Oy et Ox, le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est l'*union disjointe* (c'est-à-dire l'union d'ensembles qui ont intersection nulle) des quatre quadrants

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\} \\ D_2 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y > 0\} \\ D_3 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y < 0\} \\ D_4 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y < 0\} \end{aligned}$$



Le domaine $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i, avec $i = 1, 2, 3, 4$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur chaque domaine D_i, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., 4$.
Cherchons f_i tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_i$ sur D_i, c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x, y) \in D_i$ on a

$$\left(y + \frac{1}{x}\right) \vec{\imath} + \left(x + \frac{1}{y}\right) \vec{\jmath} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x} = y + \dfrac{1}{x} & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = x + \dfrac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x, y) = \int \left(y + \frac{1}{x}\right) dx = xy + \ln|x| + g_i(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = x + g_i'(y) \overset{(2)}{=} x + \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad g_i'(y) = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad g_i(y) = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| + c_i.$$

Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction

$$f_i(x, y) = xy + \ln|x| + \ln|y| + c_i = xy + \ln|xy| + c_i$$

pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante, qui n'a aucune raison d'être la même d'un domaine à l'autre :

$$\begin{array}{lcl} D_1 = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\} & \Longrightarrow & f_1(x, y) = xy + \ln(xy) + c_1 \\ D_2 = \{(x, y) \mid x < 0,\ y > 0\} & \Longrightarrow & f_2(x, y) = xy + \ln(-xy) + c_2 \\ D_3 = \{(x, y) \mid x < 0,\ y < 0\} & \Longrightarrow & f_3(x, y) = xy + \ln(xy) + c_3 \\ D_4 = \{(x, y) \mid x > 0,\ y < 0\} & \Longrightarrow & f_4(x, y) = xy + \ln(-xy) + c_4. \end{array}$$

f) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3)\, \vec{\imath} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\, \vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xy^2 - 2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2x + y^3)\right) \vec{k} \\ &= (3x^2 + 3y^2 - 3x^2 - 3y^2)\, \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire

$$(3x^2y + 2x + y^3)\, \vec{\imath} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\, \vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2x + y^3 & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - 2y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x, y) = \int (3x^2y + 2x + y^3)\, dx = x^3y + x^2 + xy^3 + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 + g'(y) \overset{(2)}{=} x^3 + 3xy^2 - 2y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -2y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\int 2y\,dy = -y^2 + c.$$

Finalement, les potentiels de $\vec{V}$ sont de la forme

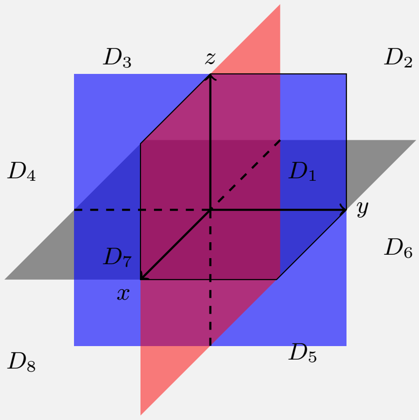
$$f(x,y) = x^3y + xy^3 + x^2 - y^2 + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

g) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y}\,\vec{\jmath} - \frac{1}{z}\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{x}\right)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{x}\right)\right)\vec{k} \\ &= (0-0)\,\vec{\imath} - (0-0)\,\vec{\jmath} + (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Cette fois, le domaine de définition de $\vec{V}$ n'est pas tout l'espace $\mathbb{R}^3$, parce que les sous-ensembles où $x = 0$, $y = 0$ ou bien $z = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ correspondent aux trois plans contenant les axes à deux à deux, respectivement les plans yOz, xOz et xOy, le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'union disjointe des huit quadrants

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}\\
D_2 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y > 0,\ z > 0\}\\
D_3 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y < 0,\ z > 0\}\\
D_4 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y < 0,\ z > 0\}\\
D_5 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0,\ z < 0\}\\
D_6 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y > 0,\ z < 0\}\\
D_7 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y < 0,\ z < 0\}\\
D_8 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y < 0,\ z < 0\}
\end{aligned}$$



Le domaine $D = \bigcup_{i=1}^{8} D_i$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i, avec $i = 1, 2, \ldots, 8$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur chaque domaine D_i, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., 8$.
Cherchons f_i tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f_i$ sur D_i, c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x,y,z) \in D_i$ on a

$$\frac{2}{x}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{z}\,\vec{k} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\,\vec{k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x} = \dfrac{2}{x} & (1) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = \dfrac{1}{y} & (2) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial z} = -\dfrac{1}{z} & (3) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x,y,z) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + g_i(y,z)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial g_i(y,z)}{\partial y} \overset{(2)}{=} \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad g_i(y,z) = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + h_i(z).$$

Donc
$$f_i(x,y,z) = 2\ln|x| + \ln|y| + h_i(z)$$
et on dérive par rapport à z :
$$\frac{\partial f_i}{\partial z} = h_i'(z) \overset{(3)}{=} -\frac{1}{z} \qquad \Longrightarrow \qquad h_i(z) = \int\left(-\frac{1}{z}\right)dz = -\ln|z| + c_i.$$
Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction
$$f_i(x,y,z) = 2\ln|x| + \ln|y| - \ln|z| + c_i = \ln\left|\frac{x^2y}{z}\right| + c_i$$
pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante c_i.

h) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - zx\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(-zx)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\vec{k} \\ &= (x+x)\,\vec{\imath} + (y-y)\,\vec{\jmath} + (-z-z)\,\vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$
Puisque le rotationnel de $\vec{V}$ n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

i) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\,\vec{\imath} + (y^2-zx)\,\vec{\jmath} + (z^2-xy)\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2-zx)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2-yz)\right)\vec{\jmath} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-yz)\right)\vec{k} \\ &= (-x+x)\,\vec{\imath} + (-y+y)\,\vec{\jmath} + (-z+z)\,\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$
Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$, c'est-à-dire
$$(x^2-yz)\,\vec{\imath} + (y^2-zx)\,\vec{\jmath} + (z^2-xy)\,\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 - yz & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 - zx & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = z^2 - xy & (3) \end{cases}$$
On intègre (1) en x :
$$f(x,y,z) = \int(x^2-yz)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - xyz + g(y,z)$$
et on dérive par rapport à y :
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} \overset{(2)}{=} y^2 - zx \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = y^2 \quad \Longrightarrow \quad g(y,z) = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + h(z).$$
Donc
$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 - xyz + \frac{1}{3}y^3 + h(z)$$

et on dérive par rapport à z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) \overset{(3)}{=} z^2 - xy \quad \Longrightarrow \quad h_i(z) = \int z^2\, dz = \frac{1}{3} z^3 + c_i.$$

Finalement, les potentiels de $\vec{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} - xyz + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Exercice 9 – Champ central

Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1,x_2,x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$$\vec{x} = x_1\ \vec{\imath} + x_2\ \vec{\jmath} + x_3\ \vec{k} = (x_1,x_2,x_3) \qquad \text{est le vecteur position,}$$

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \qquad \text{est la distance du point de l'origine, et}$$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad \text{est une application dérivable.}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

Corrigé

Un champ central s'exprime bien en coordonnées sphériques : le vecteur position est $\vec{x} = r\,\vec{e_r}$ donc

$$\vec{V}(r,\theta,\varphi) = \vec{V}(r) = f(r)\, r\, \vec{e_r}\,.$$

Son rotationnel est nul, car

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial(r\,f(r))}{\partial\varphi}\,\vec{e_\theta} \ - \ \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,f(r))}{\partial\theta}\,\vec{e_\varphi} \ = \vec{0}.$$

Le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout $\mathbb{R}^3$, car il est bien défini en dehors de l'origine (quand $r \neq 0$), et dans l'origine, même si $\vec{e_r}$ n'est pas défini, le champ $\vec{V}$ est défini car il vaut zéro, puisque $r = 0$. Alors, par le Lemme de Poincaré, le champ $\vec{V}$ est un champ de gradient.

Un potentiel de $\vec{V}$ est un champ scalaire $g(r,\theta,\varphi)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, c'est-à-dire

$$r\,f(r)\,\vec{e_r} \ = \frac{\partial g}{\partial r}\,\vec{e_r} \ + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta} \ + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial g}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = r\,f(r) & (1) \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial g}{\partial\theta} = 0 & (2) \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\,\dfrac{\partial g}{\partial\varphi} = 0 & (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) disent que la fonction g ne dépend pas de φ et de θ, donc $g(r,\theta,\varphi) = g(r)$ s'obtient en intégrant l'équation (1).

Si $f(r) = e^r$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial r} = r\,e^r$ et l'éq. (1) s'intègre par parties :

$$g(r) = \int r\,e^r\,dr = r\,e^r - \int e^r\,dr = r\,e^r - e^r = (r-1)\,e^r,$$

à moins d'une constante.

Exercice 10 – Rotationnel [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\
&(2) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V}) = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\
&(3) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\
&(4) \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0} \qquad \text{si } f \text{ est de classe } C^2.
\end{aligned}
$$

Corrigé

Posons $\vec{U} = U_x\,\vec{\imath} + U_y\,\vec{\jmath} + U_z\,\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$. Alors :

(1) La somme des champs de vectors est donnée par la somme des vecteurs en tout point, c'est-à-dire

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\,\vec{\imath} + (U_y + V_y)\,\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\,\vec{k},$$

et on calcule séparément les composantes du rotationnel

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_x\,\vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_y\,\vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_z\,\vec{k}.$$

La première composante est

$$
\begin{aligned}
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_x &= \frac{\partial(U_z + V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(U_y + V_y)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\
&= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_x + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_x,
\end{aligned}
$$

et également pour les autres on a

$$
\begin{aligned}
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_y &= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_y + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_y \\
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_z &= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_z + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_z,
\end{aligned}
$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre, on a

$$\alpha\,\vec{V} = \alpha\,V_x\,\vec{\imath} + \alpha\,V_y\,\vec{\jmath} + \alpha\,V_z\,\vec{k},$$

et le rotationnel

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V}) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_x\,\vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_y\,\vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_z\,\vec{k}$$

a composantes

$$
\begin{aligned}
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_x &= \frac{\partial(\alpha\,V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha\,V_y)}{\partial z} \\
&= \alpha\,\frac{\partial V_z}{\partial y} - \alpha\,\frac{\partial V_y}{\partial z} \\
&= \alpha\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_x,
\end{aligned}
$$

et également

$$
\begin{aligned}
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_y &= \alpha\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_y \\
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_z &= \alpha\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_z,
\end{aligned}
$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V}) = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

(3) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction, le produit de f par $\overrightarrow{V}$ est calculé en tout point et s'écrit

$$f\,\overrightarrow{V} = f\,V_x\,\vec{\imath} + f\,V_y\,\vec{\jmath} + f\,V_z\,\vec{k},$$

et son rotationnel s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V}) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_x\,\vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_y\,\vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_z\,\vec{k}.$$

Ses composantes se calculent en applicant la règle de Leibniz à la dérivée d'un produit de fonctions :

$$\begin{aligned}\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_x &= \frac{\partial(f\,V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(f\,V_y)}{\partial z}\\ &= \frac{\partial f}{\partial y}\,V_z + f\,\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y - f\,\frac{\partial V_y}{\partial z}\\ &= \frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_x,\end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned}\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_y &= \frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_y\\ \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V})\Big)_z &= \frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_z,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V}) = &\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_z\right)\vec{\imath}\\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_y\right)\vec{\jmath}\\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x + f\,\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})\Big)_z\right)\vec{k}\\ = &\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x\right)\vec{k} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\end{aligned}$$

Or, le produit vectoriel de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$ vaut exactement

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x\right)\vec{k},$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \overrightarrow{V} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$.

(4) Puisque

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k},$$

les composantes de

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\Big)_x\,\vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\Big)_y\,\vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\Big)_z\,\vec{k}$$

sont

$$
\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\right)_x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \\
\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\right)_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \\
\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\right)_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0
\end{aligned}
$$

si la fonction f est de classe C^2, par le Théorème de Schwarz.