TD 5 – CHAMPS DE VECTEURS PÉRIODIQUES ET SYMÉTRIQUES

Exercice 17 – Champ périodique [Facultatif]
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,\vec{\imath} + \sin(x)\,\cos(y)\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu et même lisse.

b) Montrer que les valeurs de $\vec{V}$ sur le carré $D = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ donnent les valeurs de $\vec{V}$ sur tout son domaine de définition (c'est-à-dire que $\vec{V}$ est *périodique* et D est un *domaine de périodicité*).

c) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

d) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0,\pi/4)$, $(\pi/2,0)$ et $(\pi,\pi/4)$. Que se passe-t-il au point $(\pi/2,\pi/2)$? Que se passe-t-il si on démarre au point $(3\pi/2,\pi/2)$?

e) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Corrigé

a) Le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'ensemble des points du plan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartiennent au domaine de définition des deux fonctions

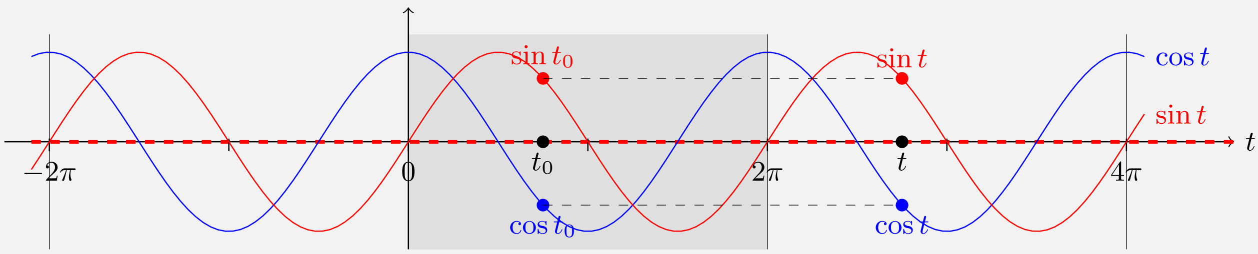
$$V_x(x,y) = \cos(x)\,\sin(y) \qquad \text{et} \qquad V_y(x,y) = \sin(x)\,\cos(y),$$

donc $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^2$. Le champ $\vec{V}$ est continu [respectivement différentiable] si les deux fonctions V_x et V_y le sont. Or, ces deux fonctions sont continues et même lisses, c'est-à-dire différentiables autant de fois qu'on veut, donc $\vec{V}$ l'est aussi.

b) Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(t + 2\pi\,k) = \cos t \quad \text{et} \quad \sin(t + 2\pi\,k) = \sin t \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

ou, de façon équivalente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $t_0 \in [0,2\pi]$ tel que $\cos t = \cos t_0$ et $\sin t = \sin t_0$



Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(x_0,y_0) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ tel que

$$(\cos x, \sin x) = (\cos x_0, \sin x_0) \qquad \text{et} \qquad (\cos y, \sin y) = (\cos y_0, \sin y_0)$$

et donc $\vec{V}(x,y) = \vec{V}(x_0,y_0)$ car

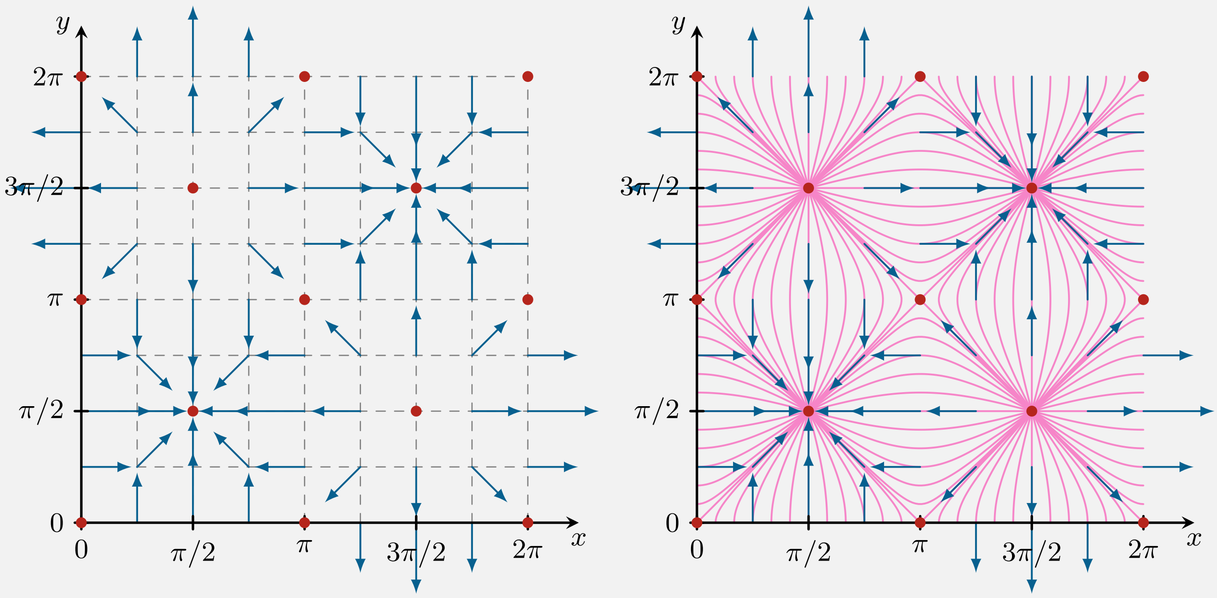
$$\cos x\,\sin y = \cos x_0\,\sin y_0 \qquad \text{et} \qquad \sin x\,\cos y = \sin x_0\,\cos y_0.$$

Donc $\vec{V}$ est périodique, avec domaine de périodicité $D = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

c) D'abord on calcule la valeur du champ $\vec{V}$ dans les points demandés :

	$\vec{V}(x,y)$	$y=0$	$y=\pi/4$	$y=\pi/2$	$y=3\pi/4$	$y=\pi$
$x=0$	$\sin y\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{\imath}$	$\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$
$x=\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y\,\vec{\imath}+\cos y\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=\pi/2$	$\cos y\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{0}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$
$x=3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin y\,\vec{\imath}+\cos y\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=\pi$	$-\sin y\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$-\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$-\vec{\imath}$	$-\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$
$x=5\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin y\,\vec{\imath}-\cos y\,\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=3\pi/2$	$-\cos y\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$
$x=7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y\,\vec{\imath}-\cos y\,\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$

Ensuite on dessine ces vecteurs sur le carré $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ et on complète en tenant compte de la périodicité et de la continuité des flèches :



d) Les lignes de champs qui partent des points $(0,\pi/4)$, $(\pi/2,0)$ et $(\pi,\pi/4)$ se dessinent en suivant les flèches, qui amènent toutes au point $(\pi/2,\pi/2)$. Ce point "attire" les autres : c'est un point où arrivent toutes les lignes de champ de son entourage (point d'*équilibre stable*), tout comme le point $(3\pi/2,3\pi/2)$.

Au contraire, le point $(3\pi/2,\pi/2)$ "repousse" les lignes de champ : si on est pile dans ce point on ne bouge pas, mais si on s'écarte un tout petit peu de ce point, on tombe sur une ligne de champ qui nous amène très loin dans une diréction qui dépend de notre écart initial (point d'*équilibre instable*). Le point $(\pi/2,3\pi/2)$ a la même propriété.

Enfin, le point (π,π) est l'arrivée d'exactement deux lignes (venant de $(3\pi/2,\pi/2)$ et de $(\pi/2,3\pi/2)$) et le départ de deux autres (allant vers $(\pi/2,\pi/2)$ et $(3\pi/2,3\pi/2)$). Toutes les autres lignes de son entourage l'évitent. Les points $(0,0)$, $(\pi,0)$ et $(0,\pi)$ ont la même propriété.

e) Pour savoir si le champ $\vec{V}$ est conservatif, on calcule son rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y)=\left(\frac{\partial(\sin x\cos y)}{\partial x}-\frac{\partial(\cos x\sin y)}{\partial y}\right)\vec{k}=(\cos x\cos y-\cos x\cos y)\,\vec{k}=\vec{0}.$$

Alors, par le Lemme de Poincaré, $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.

Cherchons un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire tel que

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y.$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) \overset{(1)}{=} \int \cos x \sin y \, dx = \sin x \sin y + g(y),$$

on dérive par rapport à y et on identifie à (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + g'(y) \overset{(2)}{=} \sin x \cos y$$

et on déduit que $g'(y) = 0$, i.e. $g(y) = c$ est constante. Donc

$$f(x,y) = \sin x \sin y + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Remarque : Le potentiel "physique" du champ $\overrightarrow{V}$, c'est-à-dire le champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi$, est l'opposé de f,

$$\phi(x,y) = -\sin x \sin y.$$

Cette fonction a huit point critiques (les points bleu du dessin des lignes de champ qui ont des propriétés particulières), dont deux maxima locaux, deux minima locaux et quatre points cols.
En effet, les points critiques de ϕ sont les points qui annullent $\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi = -\overrightarrow{V}$:

$$\begin{cases} -\cos x \sin y = 0 \\ -\sin x \cos y = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (a) \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (b) \begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} (a) & (\pi/2, \pi/2),\ (\pi/2, 3\pi/2),\ (3\pi/2, \pi/2),\ (3\pi/2, 3\pi/2), \\ (b) & (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi). \end{array}$$

La matrice Hessienne de ϕ est

$$H_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \sin y & -\cos x \cos y \\ -\cos x \cos y & \sin x \sin y \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut, dans les points de type (a) et dans ceux de type (b),

$$\begin{array}{llll} (a) & \det H_{\phi | \cos x = 0,\ \cos y = 0} = \sin^2 x \sin^2 y = 1 > 0 & \Longrightarrow & \text{extrema locaux,} \\ (b) & \det H_{\phi | \sin x = 0,\ \sin y = 0} = -\cos^2 x \cos^2 y = -1 < 0 & \Longrightarrow & \text{points cols.} \end{array}$$

Les points de type (a) sont des maxima ou des minima locaux selon le signe de $\sin x \sin y = \pm 1$:
— aux points $(\pi/2, \pi/2)$ et $(3\pi/2, 3\pi/2)$ on a $\sin x \sin y = +1$, ce sont des minima locaux,
— aux points $(\pi/2, 3\pi/2)$ et $(3\pi/2, \pi/2)$ on a $\sin x \sin y = -1$, ce sont des maxima locaux.

f) Pour savoir si le champ $\overrightarrow{V}$ est incompressible, on calcule sa divergence :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial(\cos x \sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin x \cos y)}{\partial y} = -\sin x \sin y - \sin x \sin y \neq \vec{0}.$$

Puisque $\operatorname{div} \overrightarrow{V} \neq \vec{0}$, ce champ n'est pas incompressible et n'admet pas de potentiel vectoriel.

Exercice 18 – Champ périodique et symétrique [Facultatif]
Considérons le champ de vecteurs
$$\vec{V}(x,y) = \frac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu (et lisse).

b) Montrer que $\vec{V}$ est périodique dans la variable x et que la bande $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^*$ est un domaine de périodicité.

c) En sachant que la fonction $\sin x$ est impaire et que la fonction $\cos x$ est paire, montrer qu'il suffit de connaitre les valeurs de $\vec{V}$ pour $y > 0$, car les valeurs en $-y < 0$ se trouvent alors comme
$$\vec{V}(x,-y) = -\vec{V}(-x,y).$$
(C'est-à-dire que $\vec{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π).

d) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour
$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 1,\ 2,\ 1/2.$$
Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

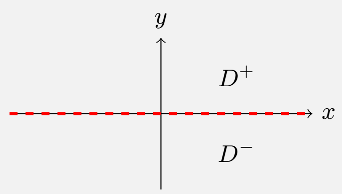
e) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0,1)$, $(\pi/2,1)$, $(\pi,1)$, $(5\pi/4,1)$ et $(3\pi/2,1)$.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

g) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Corrigé

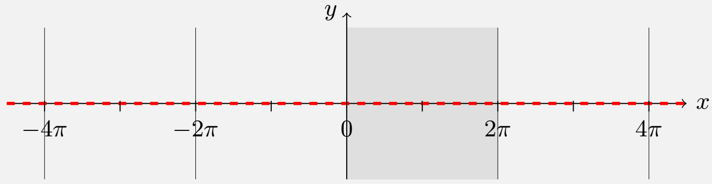
a) Le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'ensemble des points du plan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartiennent au domaine de définition des deux fonctions
$$V_x(x,y) = \frac{\cos x}{y} \qquad \text{et} \qquad V_y(x,y) = -\frac{\sin x}{y^2},$$
donc, si on indique $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, \infty[$, on a
$$\begin{aligned} D_{\vec{V}} &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\ \} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ &= D^+ \cup D^- \end{aligned}$$



avec $D^+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ et $D^- = \{(x,y) \mid y < 0\}$.
Le champ $\vec{V}$ est continu [respectivement différentiable] si les deux fonctions V_x et V_y le sont. Or, ces deux fonctions sont continues et même lisses, c'est-à-dire différentiables autant de fois qu'on veut, chacune sur son domaine de définition. Donc $\vec{V}$ l'est aussi.

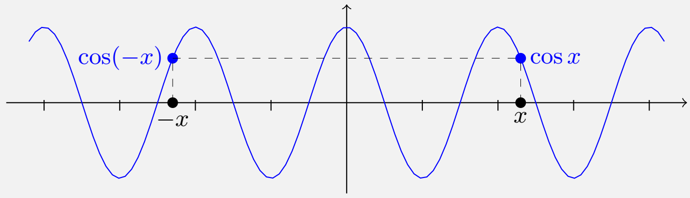
b) Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période 2π, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $x_0 \in [0, 2\pi]$ tel que
$$\cos x = \cos x_0 \quad \text{et} \quad \sin x = \sin x_0.$$
Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ il existe $(x_0,y) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{V}(x,y) = \vec{V}(x_0,y)$, car
$$\frac{\cos x}{y} = \frac{\cos x_0}{y} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sin x}{y^2} = -\frac{\sin x_0}{y^2}.$$

Donc $\overrightarrow{V}$ est périodique en x, avec domaine de périodicité donné par la bande verticale $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}*$.



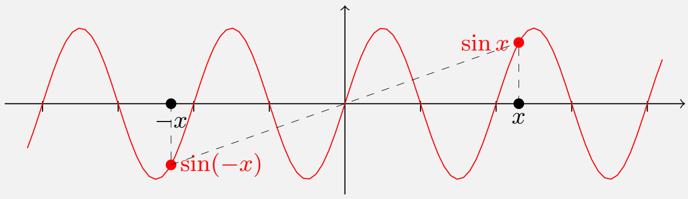
c) La fonction $\cos x$ est paire et la fonction $\sin x$ est impaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(-x) = \cos x$$



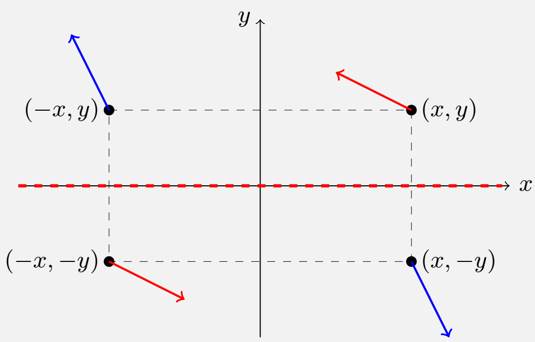
et

$$\sin(-x) = -\sin x$$



Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ un point du domaine de $\overrightarrow{V}$. Alors, au point $(x, -y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(x, -y) &= \frac{\cos x}{-y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{(-y)^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\frac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\frac{\cos(-x)}{y}\,\vec{\imath} - \frac{-\sin(-x)}{y^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\left(\frac{\cos(-x)}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin(-x)}{y^2}\,\vec{\jmath}\right) \\
&= -\overrightarrow{V}(-x, y).
\end{aligned}$$



Évidemment cette identité s'applique aussi si on part du point $(-x, -y)$ et donne

$$\overrightarrow{V}(-x, -y) = -\overrightarrow{V}(x, y).$$

Finalement, pour le champ $\overrightarrow{V}(x, y) = \dfrac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \dfrac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath}$, il est suffisant de connaitre la valeur dans le domaine $[0, 2\pi] \times]0, \infty[$, car, si $x \in [0, 2\pi]$ et $y < 0$, on a

$$\overrightarrow{V}(x, y) = -V(-x, -y) = -\overrightarrow{V}(-x + 2\pi, -y),$$

où $-y > 0$ et $-x + 2\pi \in [0, 2\pi]$ vu que $-x \in [-2\pi, 0]$.

Remarque : La propriété $\overrightarrow{V}(-x, -y) = -\overrightarrow{V}(x, y)$ signifie que $\overrightarrow{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π.
Si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation linéaire des vecteurs du plan, qu'on applique aussi aux points $P = (x, y)$ par $T(P) = T(\overrightarrow{OP})$, on dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est **symétrique par rapport à** T, si

$$T\big(\overrightarrow{V}(x, y)\big) = \overrightarrow{V}\big(T(x, y)\big) \qquad \text{pour tout } (x, y).$$

En particulier, la rotation d'angle π est la transformation donnée par la matrice

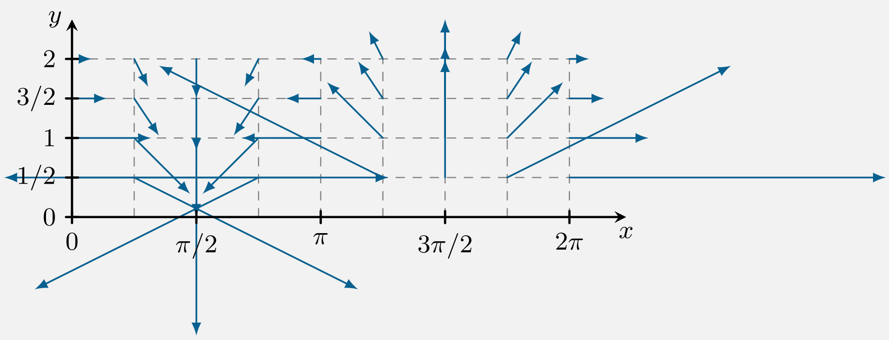
$$\mathrm{Rot}_\pi = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

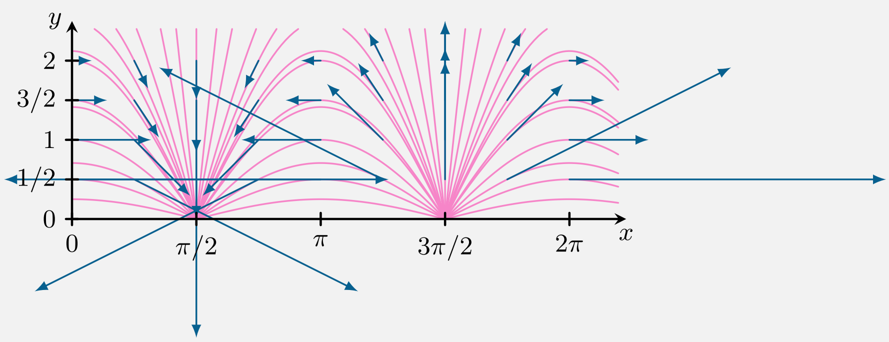
qui donne $\mathrm{Rot}_\pi(x,y) = (-x,-y)$, autrement dit $\mathrm{Rot}_\pi(\overrightarrow{V}) = -\overrightarrow{V}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$.

d) D'abord on calcule la valeur du champ $\overrightarrow{V}$ dans les points demandés :

	$\overrightarrow{V}(x,y)$	$y = 1/2$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	$\frac{1}{y}\,\vec{\imath}$	$2\,\vec{\imath}$	$\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}\,\vec{\imath}$
$x = \pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{y}\,\vec{\imath} - \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(2\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = \pi/2$	$-\frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}$	$-4\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$	$-\frac{1}{4}\,\vec{\jmath}$
$x = 3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{y}\,\vec{\imath} - \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-2\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = \pi$	$-\frac{1}{y}\,\vec{\imath}$	$-2\,\vec{\imath}$	$-\vec{\imath}$	$-\frac{1}{2}\,\vec{\imath}$
$x = 5\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{y}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = 3\pi/2$	$\frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}$	$4\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$	$\frac{1}{4}\,\vec{\jmath}$
$x = 7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{y}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$

Ensuite on dessine ces vecteurs sur le carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et on complète en tenant compte de la périodicité et de la continuité des flèches :





e) Les lignes de champs se dessinent en suivant les flèches. Pour ce champ, il n'y a pas de points qui "attirent" ou "repoussent" tous les autres, mais il y a deux lignes verticales droites : celles à $x = \pi/2$ (orientée vers le bas) et celle à $x = 3\pi/2$ (orientée vers le haut). Les autres lignes de champ sont *asymptotiques* à ces deux droites, c'est-à-dire, elles s'y approchent pour des temps infinis négatifs et positifs, sans jamais les toucher.

f) Pour savoir si le champ $\overrightarrow{V}$ est conservatif, on calcule son rotationnel :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin x}{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos x}{y}\right)\right)\vec{k} \\ &= \left(-\frac{\cos x}{y^2} + \frac{\cos x}{y^2}\right)\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Alors, par le Lemme de Poincaré, $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe. Cherchons un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire tel que

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos x}{y} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin x}{y^2}.$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) \overset{(1)}{=} \int \frac{\cos x}{y}\, dx = \frac{\sin x}{y} + g(y),$$

on dérive par rapport à y et on identifie à (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin x}{y^2} + g'(y) \overset{(2)}{=} -\frac{\sin x}{y^2}$$

et on déduit que $g'(y) = 0$, i.e. $g(y) = c$ est constante. Donc

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{y} + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Remarque : Le potentiel "physique" du champ $\overrightarrow{V}$, c'est-à-dire le champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$, est l'opposé de f,

$$\phi(x,y) = -\frac{\sin x}{y}.$$

Les points critiques de ϕ sont les points qui annullent $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = -\overrightarrow{V}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\cos x}{y} = 0 \\ \dfrac{\sin x}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible. Ce potentiel n'a pas de points critiques, donc il n'a pas de points d'équilibre stable ou instable (les extrema locaux), comme le montre le dessin des lignes de champ.

g) Pour savoir si le champ $\overrightarrow{V}$ est incompressible, on calcule sa divergence :

$$\text{div}\,\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin x}{y^2}\right) = -\frac{\sin x}{y} + \frac{2\sin x}{y^3} \neq 0.$$

Puisque $\text{div}\,\overrightarrow{V} \neq 0$, ce champ n'est pas incompressible et n'admet pas de potentiel vectoriel.