TD 6 – COURBES ET CIRCULATION

Exercice 18 – Circulation le long d'une courbe

Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{V}$ le long de C^+.

a) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ courbe plane fermée $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$.

c) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad C^+ =$ cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\, z\, \vec{e_\varphi}$, $\quad C^+ =$ cercle $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.

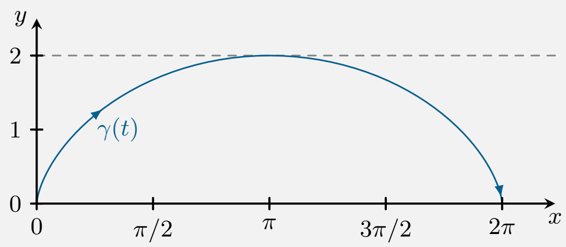
e) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\,\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\,\vec{k}$, $\quad C^+ =$ courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]\,0, T]$.

f) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ arc d'hyperbole $\begin{cases} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \to 2 \end{cases}$.

Corrigé

a) Dessin de la cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$:

$$\gamma(0) = (0,0)$$
$$\gamma(\pi) = (\pi, 2)$$
$$\gamma(2\pi) = (2\pi, 0)$$



Vitesse de la courbe : $\quad \gamma'(t) = (1-\cos t)\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$

Champ $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ le long de γ : $\quad \vec{V}(\gamma(t)) = (1-\cos t)\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Circulation de $\vec{V}$ le long de γ : puisque $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t)$, on a

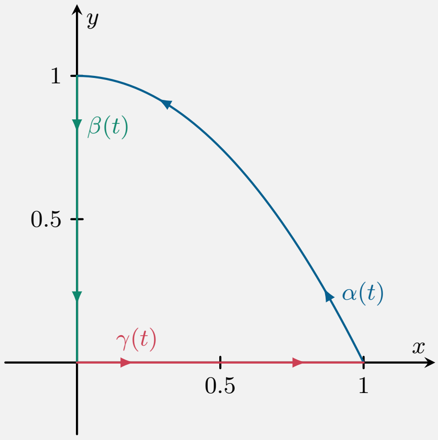
$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \big((1-\cos t)^2 - \sin t\big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(1 - 2\cos t + \cos^2 t - \sin t\big)\, dt \\ &= \left[\, t - 2\sin t + \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + \cos t\,\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\, 2\pi = 3\pi. \end{aligned}$$

b) Dessin et paramétrisation de la courbe C^+ : $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \big(1 - t, 1 - (1-t)^2\big) \\ &= (1 - t, 2t - t^2), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\beta(t) = (0, 1 - t), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma(t) = (t, 0), \quad t \in [0,1]$$



Vitesse des trois courbes :

$$\alpha'(t) = -\vec{\imath} + (2 - 2t)\,\vec{\jmath}$$

$$\beta'(t) = -\vec{\jmath}$$

$$\gamma'(t) = \vec{\imath}$$

Champ $\overrightarrow{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$ le long de C^+ :

$$\overrightarrow{V}(\alpha(t)) = \big((1-t)^2 + 1\big)\,\vec{\jmath} = (2 - 2t + t^2)\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{V}(\beta(t)) = \vec{\jmath}$$

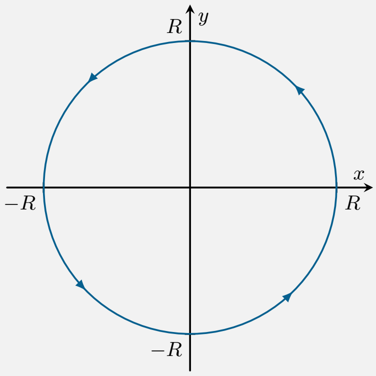
$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = (t^2+1)\,\vec{\jmath}$$

Circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_\alpha \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\beta \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_0^1 \overrightarrow{V}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt + \int_0^1 \overrightarrow{V}(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\,dt \int_0^1 \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (2-2t)(2-2t+t^2))\,dt - \int_0^1 dt + 0 \\ &= \int_0^1 (4 - 8t + 6t^2 - 2t^3 - 1)\,dt \\ &= \int_0^1 (3 - 8t + 6t^2 - 2t^3)\,dt \\ &= \left[\,3t - 4t^2 + 2t^3 - \frac{1}{2}\,t^4\,\right]_0^1 \\ &= 3 - 4 + 2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Dessin du cercle C^+ paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

$\gamma(0) = (R, 0)$
$\gamma(\pi/2) = (0, R)$
$\gamma(\pi) = (-R, 0)$
$\gamma(3\pi/2) = (0, -R)$



Vitesse de la courbe : $\gamma'(t) = -R\sin t\,\vec{\imath} + R\cos t\,\vec{\jmath}$

Champ $\vec{V}(x, y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ le long de γ : sur le cercle on a

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{R^2} = R,$$

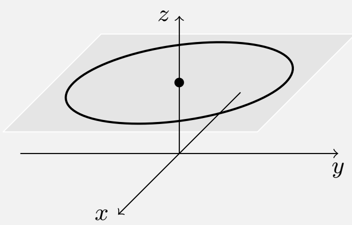
par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = \frac{R\sin t\;\vec{\imath} - R\cos t\;\vec{\jmath}}{R} = \sin t\;\vec{\imath} - \cos t\;\vec{\jmath}.$$

Circulation de $\vec{V}$ le long de C^+ :

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \big(-R\sin^2 t - R\cos^2 t\big)\,dt \\ &= -R\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -R\int_0^{2\pi} dt \\ &= -R\,[\,t\,]_0^{2\pi} = -2\pi\,R. \end{aligned}$$

d) Cercle C^+ : $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.



Paramétrisation du cercle : $\gamma(t) = (R\,\cos t, R\,\sin t, H)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$.

Champ $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho\,z\,\vec{e_\varphi}$ le long de γ : sur le cercle on a $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = R$ et $z = H$, par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = R\,H\;\vec{e_\varphi}\,.$$

Comme ce vecteur est en coordonnées cilyndriques, on calcule la vitesse de γ aussi en coordonnées cylindriques :

$$\gamma'(t) = -R\,\sin t\,\vec{\imath} + R\,\cos t\,\vec{\jmath} = R(-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}) = R\,\vec{e_\varphi}\,.$$

Ceci est équivalent à paramétrer le cercle en coordonnées cylindriques avec

$$\rho(t) = R, \qquad \varphi(t) = t, \qquad z(t) = H$$

et à dériver le vecteur position $\gamma(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho}\,(t) + z(t)\,\vec{k}$ à partir des dérivées

$$\rho'(t) = 0, \qquad \varphi'(t) = 1, \qquad z'(t) = 0$$

$$\vec{e_\rho}\,'(t) = \varphi'(t)\,\vec{e_\varphi}\,(t), \qquad \vec{e_\varphi}\,'(t) = -\varphi'(t)\,\vec{e_\rho}\,(t), \qquad \vec{k}'(t) = \vec{0},$$

ce qui donne

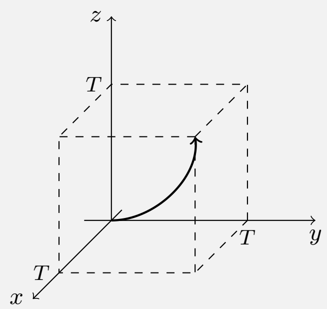
$$\gamma'(t) = \rho'(t)\,\vec{e_\rho}\,(t) + \rho(t)\,\vec{e_\rho}\,'(t) + z'(t)\,\vec{k} = R\,\vec{e_\varphi}\,.$$

Au final on peut calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = R\,H\;\vec{e_\varphi}$ et de $\gamma'(t) = R\,\vec{e_\varphi}$ dans le repère orthonormal $(\vec{e_\rho}\,, \vec{e_\varphi}\,, \vec{k})$ comme somme des produits composante par composante, et on obtient la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ paramétré par γ :

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = R^2\,H \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,R^2\,H.$$

e) Courbe C^+ paramétrée par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in]\,0, T].$$



Vitesse

$$\gamma'(t) = \vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}.$$

Champ $\overrightarrow{V}(x, y, z) = x^2 z\;\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\;\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\;\vec{k}$ le long de γ :

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = t^2\,t^3\;\vec{\imath} - \frac{t^2}{t}\;\vec{\jmath} + \frac{t\,(t^3)^2}{(t^2)^2}\;\vec{k} = t^5\;\vec{\imath} - t\;\vec{\jmath} + t^3\;\vec{k}$$

Circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ paramétrée par γ :

$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^T \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^T (t^5 - 2t^2 + 3t^5)dt = \int_0^T (4t^5 - 2t^2)dt$$

$$= \left[\,\frac{4}{6}\,t^6 - \frac{2}{3}\,t^3\,\right]_0^T = \frac{2}{3}\,T^6 - \frac{2}{3}\,T^3 = \frac{2}{3}\,T^3(T^3 - 1).$$

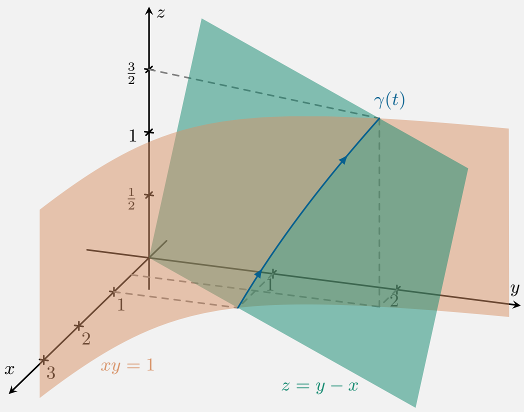
Remarque : Étant donné que $t = 0$ n'est pas dans l'intervalle de définition de $\gamma(t)$, on peut se demander pourquoi cette borne inférieure ne pose pas de problème dans l'intégrale ci-dessus. Or, bien que $\overrightarrow{V}$ ne soit pas défini à l'origine, les deux termes problématiques, y/x et xz^2/y^2, ont des limites bien définies dans le cas particulier où l'on s'approche de l'origine en suivant la courbe $\gamma(t)$ en sens inverse,

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t\to 0} t = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{x(t)\,z^2(t)}{y^2(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot t^6}{t^4} = \lim_{t\to 0} t^3 = 0 \qquad .$$

f) L'arc d'hyperbole C^+ d'équations

$$z = y - x, \quad xy = 1, \quad \text{avec } y \in [1,2]$$

est à l'intersection de l'hyperboloïde de profil $xy = 1$ et du plan $z = y - x$.



Paramétrisation de C^+ : on pose $y = t$ et on obtient

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t, t - \frac{1}{t}\right), \qquad \text{avec } t \in [1,2].$$

Vitesse : $\gamma'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)\vec{k}.$

Champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$ le long de γ :

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = \frac{1/t}{t}\,\vec{\imath} + t\left(t - \frac{1}{t}\right)\vec{\jmath} = \frac{1}{t^2}\,\vec{\imath} + (t^2 - 1)\,\vec{\jmath}.$$

Circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de γ :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_1^2 \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^4} + t^2 - 1\right) dt \\
&= \int_1^2 (-t^{-4} + t^2 - 1)dt \\
&= \left[-\frac{1}{-4+1}\,t^{-4+1} + \frac{1}{3}\,t^3 - t\right]_1^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{t^3} + \frac{1}{3}\,t^3 - t\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3}\,2^3 - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + 8 - 1 - 1\right) - 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1+48}{8}\right) - 1 \\
&= \frac{49}{24} - 1 = \frac{49-24}{24} = \frac{25}{24}.
\end{aligned}$$

Exercice 19 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$

Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème $\displaystyle\int_{A,\ C^+}^{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A)$.

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ avec $\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2)$, C^+ = courbe qui relie le point $(5,1,0)$ au point $(3,2,1)$.

b) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique** produit par une charge Q placée en $r = 0$

C_1^+ = courbe qui relie le point $A = (6,0,0)$ au point $B = (0,0,3)$,

C_2^+ = cercle centré en O de rayon R.

[*Quel est le potentiel $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

c) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\mu_0\,I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction $\vec{k}$.

C_1^+ = arc de cercle de rayon R centré sur le fil, reliant le point $A = (R,0,0)$ au point $B = (0,R,0)$

C_2^+ = cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

[*Quel est le potentiel scalaire $\phi(\varphi)$ de $\vec{B}(\rho)$ si on ne fait pas le tour complet autour du fil ? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

Corrigé

a) La circulation du champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, avec potentiel

$$\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2),$$

le long d'une courbe quelconque C^+ qui relie le point $A(5,1,0)$ au point $B(3,2,1)$, vaut

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} &= \phi(B) - \phi(A) = \phi(3,2,1) - \phi(5,1,0)\\ &= \ln(6+1) - \ln(5+0) = \ln\left(\frac{7}{5}\right).\end{aligned}$$

b) Le **champ électrostatique**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}\,, \qquad r \neq 0$$

est bien conservatif sur son domaine de définition $D_{\vec{E}} = \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$, parce que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $D_{\vec{E}}$ est simplement connexe (voir livret, section 4.4 page 44, l'exemple analogue à page 51 et aussi la fiche TD 4).

Le potentiel scalaire $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$, tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ (au sens physique), est le **potentiel de Coulomb** (voir livret page 32)

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}, \qquad r \neq 0.$$

Alors, la circulation de $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ le long d'une courbe C_1^+ qui relie le point $A(6,0,0)$, qui se trouve à distance $r_A = 6$ de l'origine O, au point $B(0,0,3)$, qui se trouve à distance $r_B = 3$ de l'origine O, vaut

$$\begin{aligned}\int_{C_1^+} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{C_1^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi \cdot \vec{d\ell} &= \phi(r_A) - \phi(r_B) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-2}{6} \\ &= -\frac{Q}{24\pi\epsilon_0}.\end{aligned}$$

De même, la circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe *fermée*, comme le cercle C_2^+, est nulle :

$$\oint_{C_2^+} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\oint_{C_2^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi \cdot \vec{d\ell} = 0.$$

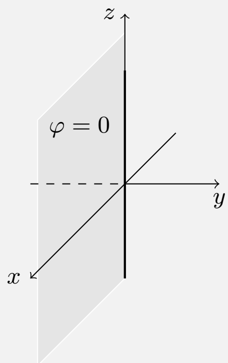
c) Le **champ magnétostatique**

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, \frac{1}{\rho}\, \vec{e_\varphi}\,, \qquad \rho \neq 0$$

est décrit en détail dans l'exercice à page 57 du livret de cours.
Ce champ est définit sur l'ensemble $D_{\vec{B}} = \mathbb{R}^3 \backslash \text{axe } Oz$, qui n'est pas simplement connexe.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \vec{0}$, par le Lemme de Poincaré I le champ $\vec{B}$ admet un potentiel scalaire *sur tout sous-ensemble simplement connexe de* $D_{\vec{B}}$.

Les sous-ensembles simplement connexes de $D_{\vec{B}}$ les plus grands possibles sont donnés par $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan vertical contenant l'axe Oz.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = 0\}$, égal à $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan déterminé par l'angle $\varphi = 0$, est un tel sous-ensemble simplement connexe de $D_{\vec{B}}$.
Mais on peut également considérer tout ensemble $\mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = \varphi_0\}$ égal à $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan déterminé par l'angle φ_0 fixé (par exemple $\varphi_0 = \pi/2$ ou $\varphi_0 = \pi$).



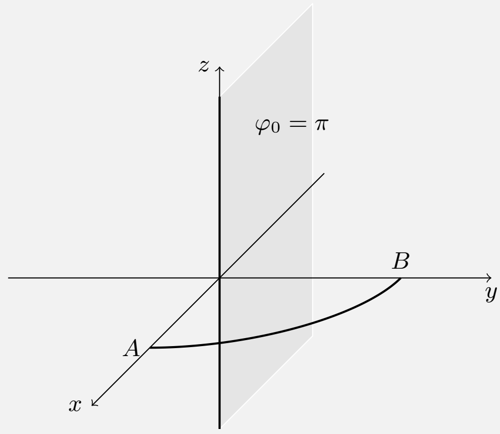
Un potentiel scalaire de $\vec{B}$, tel que $\vec{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$, sur l'ensemble $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = \varphi_0\}$ est (voir livret de cours page 58)

$$\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, (\varphi + \varphi_0), \qquad \varphi \in]0, 2\pi[\qquad \text{(et toujours } \rho \neq 0\text{)}.$$

À noter que le champ scalaire ϕ ne dépend pas explicitement de ρ mais seulement de l'angle φ de rotation autour de l'axe Oz.

Alors, pour calculer la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long de l'arc de cercle C_1^+ de rayon R centré en l'origine, reliant le point $A(R, 0, 0)$ au point $B(0, R, 0)$, on se place dans un sous-espace de $D_{\overrightarrow{B}}$ simplement connexe qui contient cet arc de cercle.

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan à angle $\varphi_0 = \pi$.



Puisque $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \pi/2$ et $\varphi_0 = \pi$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{C_1^+} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_{C_1^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \phi(\varphi_A) - \phi(\varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ (\varphi_A + \varphi_0 - \varphi_B - \varphi_0) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ (\varphi_A - \varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\mu_0\ I}{4}.\end{aligned}$$

Enfin, la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long d'un cercle *fermé* qui ne fait pas le tour de l'axe Oz, se calcule sur un sous-ensemble simplement connexe de $D_{\overrightarrow{B}}$ qui contient entièrement ce cercle (qui existe, puisque le cercle ne fait pas le tour de l'axe Oz), et est donc nulle :

$$\oint_{C_2^+} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\oint_{C_2^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$