

UCBL – L1 PCSI – UE Maths Complémentaires

Champs de vecteurs, circulation et flux

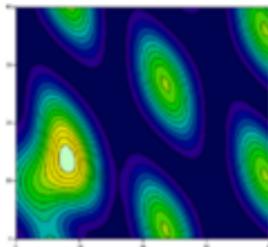
Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

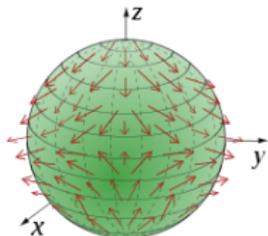
<http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2B/>

But du cours :

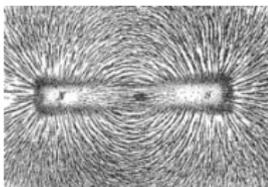
Champs scalaires
(lignes de niveau)



Champs de vecteurs
(ici, sur la sphère)



Lignes de champ
(dipole magnétique)



et aussi potentiels, circulation, flux...

Programme

Maths complémentaires : Champs de vecteurs, circulation et flux

Ch. 4 Champs scalaires et champs de vecteurs p. 1

Champs et fonctions

Champs scalaires

Champs de vecteurs

Champs conservatifs

Champs incompressibles

Ch. 5 Circulation et flux p. 35

Courbes

Circulation

Surfaces

Flux, Stokes et Gauss

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3**
(produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
(produit, déterminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartésienne du plan et de l'espace**
(droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
(graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre.**
6. **Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles, gradient, intégrales multiples.**

Chapitre 4

Champs scalaires et champs de vecteurs

- 4.1 – Champs et fonctions
- 4.2 – Champs scalaires
- 4.3 – Champs de vecteurs
- 4.4 – Champs conservatifs
- 4.5 – Champs incompressibles

4.1 – Champs et fonctions

Dans cette section :

- Repères et référentiels
- Dépendance des repères
- Loi de transformation d'un champ
- Dessin d'un champ

Repères et référentiels

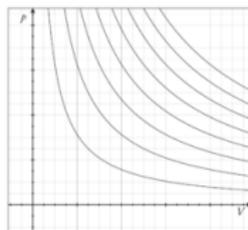
En physique, le **référentiel** est l'ensemble des *grandeurs* et de leurs *unité de mesure*. En mathématiques, le référentiel est représenté par un **repère** $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathbb{R}^n , où :

- la **direction** des vecteurs \vec{e}_i représente les grandeurs,
- la **longueur** des vecteurs \vec{e}_i représente l'unité de mesure,
- l'**origine** O donne la valeur zéro des grandeurs.

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, les **coordonnées** (x_1, \dots, x_n) telles que $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$ représentent les *mesures* des grandeurs \vec{e}_i .

Exemple – Dans un gaz parfait, la loi $PV = nRT$ décrit la relation entre la *pression* P , le *volume* V et la *temperature* T .

Les *isothermes* (courbes à température constante), sont dessinées dans l'espace \mathbb{R}^2 où l'on fixe le repère $(O, \vec{e}_V, \vec{e}_P)$ pour représenter le référentiel (V, P) .



Lois dépendantes du changement de repère

Idée – Une *fonction* et un *champ* sont des lois qui associent à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ une valeur $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. La différence entre fonctions et champs est dans la *dépendance des repères* sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m :
les fonctions sont indépendantes des changement de repères,
les champs en dépendent.

Exemple – On veut se ranger en file indienne devant la porte :

x = grandeur qui décrit chaque personne de cette salle

$P(x) = \frac{x}{10}$ = position dans la file à partir de la porte

Si on change l'unité de mesure de x , la position dans la file ne change pas, mais comment se transforme-t-elle la loi $P(x)$ qui représente cette position ?

On donne deux exemples : une loi qui ne dépend pas du changement de référentiel, et une qui en dépend.

Loi de transformation des fonctions

- **Loi basée sur l'âge** –

x = âge en années et $P(x) = \frac{x}{10}$ en mètres.

Si u = âge en mois, la même position est donnée par $\tilde{P}(u) = \frac{u}{120}$.

Par exemple, vu que $u = 12x$, on a :

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}(120) = \frac{120}{120} = 1.$$

Quelle est la relation entre $\tilde{P}(u)$ et $P(x)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \frac{u}{12}$, et on a

$$P(x) = P(h(u)) = P\left(\frac{u}{12}\right) = \frac{u}{120} = \tilde{P}(u)$$

c'est-à-dire $\boxed{\tilde{P} = P \circ h}$.

C'est la loi de transformation des fonctions par changement de coordonnées.

Loi de transformation des champs

- **Loi basée sur la distance** –

x = distance du tableau en mètres, alors $P(x) = \frac{x}{10}$ est en mètres.

Si u = distance en centimètres, la position dans la file ne change pas, mais elle est exprimée en centimètres et on a $\tilde{P}(u) = \frac{u}{10}$.

Par exemple, vu que $u = 100x$, on a :

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1m \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1000) = \frac{1000}{10} = 100cm (= 1m).$$

Quelle est donc, cette fois, la relation entre $P(x)$ et $\tilde{P}(u)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \frac{u}{100}$, et on a

$$P(x) = P(h(u)) = P\left(\frac{u}{100}\right) = \frac{u}{1000} = \frac{\tilde{P}(u)}{100} \quad \text{donc } \tilde{P} \neq P \circ h!$$

La bonne loi de transformation est $\boxed{\tilde{P} = H \circ P \circ h}$, où

$$h(u) = \frac{u}{100} \quad \text{et} \quad H(z) = 100z = h^{-1}(z).$$

Champs de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m

Definition – Un **champ de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m** est une loi

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto F(\vec{x})$$

qui se transforme, par changement de coordonnées $\vec{x} = h(\vec{u})$,
comme

$$\tilde{F}(\vec{u}) = H(F(\vec{x})) = H(F(h(\vec{u}))), \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire comme

$$\tilde{F} = H \circ F \circ h$$

A commutative diagram illustrating the transformation of a vector field. It consists of two horizontal rows of nodes. The top row has \mathbb{R}^n on the left and \mathbb{R}^m on the right, connected by a solid arrow labeled F pointing right. The bottom row also has \mathbb{R}^n on the left and \mathbb{R}^m on the right, connected by a solid arrow labeled \tilde{F} pointing right. A vertical arrow labeled h points upwards from the bottom-left \mathbb{R}^n to the top-left \mathbb{R}^n . A vertical arrow labeled H points downwards from the top-right \mathbb{R}^m to the bottom-right \mathbb{R}^m . A dashed arrow points from the bottom-left \mathbb{R}^n to the top-right \mathbb{R}^m , representing the composition $H \circ F \circ h$.

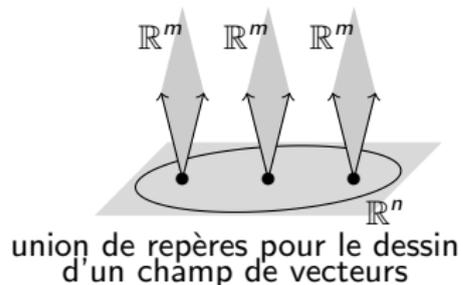
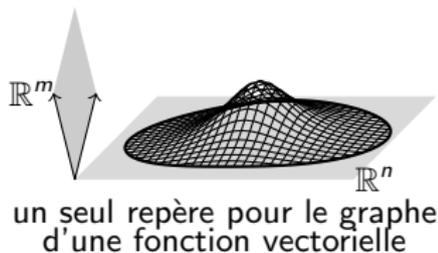
où $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un changement de repère sur \mathbb{R}^m déterminé par l'application h .

Dessin d'un champs

Remarque – Si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto F(\vec{x})$ est un champ, le repère utilisé pour décrire la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ n'est pas libre, mais dépend de celui utilisé pour décrire $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, un champ ne peut être représenté par un graphe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ comme si c'était une fonction (pour laquelle les repère de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m sont indépendants).

Définition – La **représentation graphique**, ou **dessin**, du champ F est l'ensemble des dessins de la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ au-dessus de chaque point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire dans un repère de \mathbb{R}^m centré au point \vec{x}),



4.2 – Champs scalaires

Dans cette section :

- Champs scalaires de \mathbb{R}^3
- Surfaces de niveau
- Le potentiel gravitationnel V et le potentiel de Coulomb ϕ

Champs scalaires de \mathbb{R}^3

Definition – Un **champ scalaire sur \mathbb{R}^3** est un champ $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$ à valeurs dans les nombres.

- Si $\vec{x} = h(\vec{u})$, à priori on a $\tilde{\phi}(\vec{u}) = H(\phi(\vec{x}))$, où $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un changement de repère dans \mathbb{R} déterminé par h .
- Dans \mathbb{R} il y a une seule direction $\vec{1}$, donc H n'affecte que l'*unité de mesure*. Sans unités de mesure, on peut supposer $H(y) = y$.

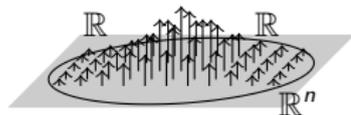
En maths, **un champ scalaire est assimilé à une fonction**

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \phi(\vec{x}),$$

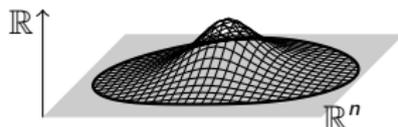
car il se transforme comme

$$\tilde{\phi}(\vec{u}) = \phi(\vec{x}) \quad \text{si} \quad \vec{x} = h(\vec{u})$$

et se représente avec un graphe usuel.



dessin d'un champ scalaire



graphe d'un champ scalaire
comme fonction réelle

- Attention en physique, quand l'unité de mesure change !

Exemples de champs scalaires sur \mathbb{R}^3

Exemple de champ scalaire –

- La **distance** depuis l'origine :

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En coordonnées sphériques :

$$d(r, \theta, \varphi) = r$$

Exemples qui ne sont pas des champs –

- L'altitude n'est pas un champ mais une fonction, car la détermination de l'endroit où on la mesure n'affecte pas le résultat.

- Le volume V n'est pas un champ scalaire, car il n'est pas défini sur les points de \mathbb{R}^3 mais pour des objets étendus.

La densité volumique ν est le champ scalaire qui permet de calculer le volume d'un objet (par intégration).

Exemples : potentiel gravitationnel et de Coulomb

- Le **potentiel gravitationnel** engendré par une masse M située à l'origine O :

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

où $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ est la *constante gravitationnelle*.

En coordonnées sphériques :

$$V(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r}.$$

- Le **potentiel électrostatique** ou **potentiel de Coulomb** engendré par une charge immobile Q située à l'origine O :

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

où $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12} \text{ As/V m}$ est la *permittivité diélectrique*.

En coordonnées sphériques :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}.$$

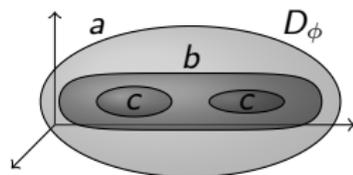
Surfaces de niveau

Définition – Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire.

- Comme une fonction f , ϕ est caractérisé par son **domaine de définition** $D_\phi \subset \mathbb{R}^3$, et il est **de classe** C^k s'il est différentiable jusqu'à l'ordre k .

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'analogue des *lignes de niveau* $L_a(f)$ d'une fonction f de deux variables est la **surface de niveau** a de ϕ :

$$S_a(\phi) = \left\{ (x, y, z) \in D_\phi \mid \phi(x, y, z) = a \right\}.$$



N.B. – En général on ne sait pas tracer le graphe de ϕ , qui est dans \mathbb{R}^4 .

Exercice : potentiels gravitationnel et de Coulomb

Énoncé – Pour le potentiel gravitationnel V et pour le potentiel de Coulomb ϕ , trouver les surfaces de niveau et dessiner le graphe comme fonctions de r .

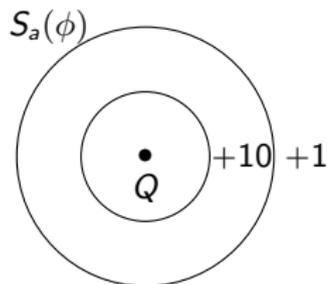
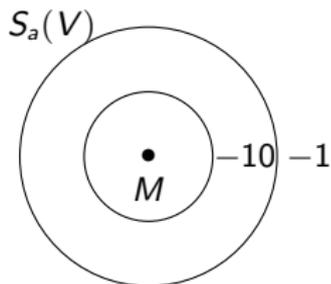
Réponse – En coordonnées sphériques, on a :

$$V(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r} \quad \text{et} \quad \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

• Pour $a \in \mathbb{R}$, les surfaces de niveau a sont données par :

$$r = -\frac{GM}{a} \quad \text{si } a < 0 \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad \text{si } a > 0$$

et sont donc des sphères centrées en l'origine

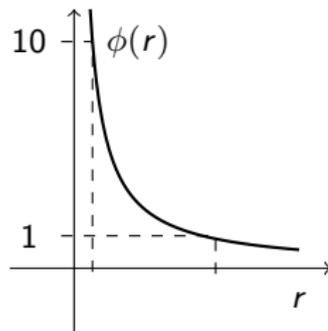
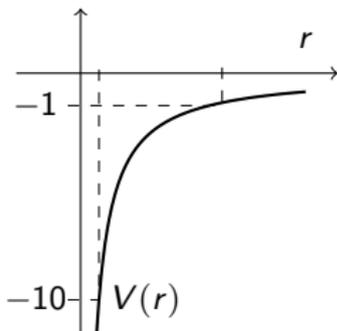


Exercice (suite)

- La différence entre le potentiel gravitationnel V et celui de Coulomb ϕ est dans le sens croissant des niveaux correspondants aux sphères : le graphe des potentiels

$$V(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r} \quad \text{et} \quad \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

dans la seule variable $r > 0$ est :



4.3 – Champs de vecteurs

Dans cette section :

- Champs de vecteurs
- Repères mobiles
- Lois de transformations en coordonnées cylindriques et sphériques
- Champ axial et champ central
- Lignes de champ
- Le champ électrique \vec{E} et le champ gravitationnel \vec{G}

Champs de vecteurs de \mathbb{R}^3

Définition – Un **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** de \mathbb{R}^3 est un champ

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \longmapsto \vec{V}(\vec{x})$$

à valeur dans les vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Exemples –

- La *position* \vec{x} des points, une *force* \vec{F} , les *champs gravitationnel* \vec{G} , *électrique* \vec{E} et *magnétique* \vec{B} , ou encore le *potentiel magnétique* \vec{A} , sont des champs vectoriels.
- La *vitesse d'écoulement des points d'un fluide* est un champ de vecteurs. La *vitesse de déplacement d'un corps ponctuel* est un champ vectoriel, défini sur la trajectoire du corps.
- La *vitesse de déplacement d'un objet étendu qu'on ne peut pas identifier à son baricentre* n'est pas un champ vectoriel, car elle n'est pas définie sur des points.

Composantes cartésiennes d'un champ de vecteurs

Définition – Soit $\vec{x} \mapsto \vec{V}(\vec{x})$ un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- Si $\vec{x} = (x, y, z)$ est donné en coordonnées cartésiennes, on a

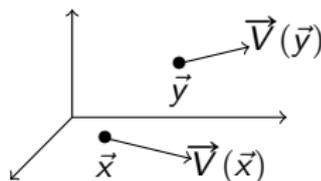
$$\vec{V}(\vec{x}) = V_x(\vec{x}) \vec{i} + V_y(\vec{x}) \vec{j} + V_z(\vec{x}) \vec{k},$$

où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère cartésien de \mathbb{R}^3 centré au point \vec{x} , et $V_x, V_y, V_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles qui s'appellent **coefficients** ou **composantes** de \vec{V} .

- Le **domaine** de \vec{V} est l'ensemble

$$D_{\vec{V}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \in D_{V_x}, \vec{x} \in D_{V_y}, \vec{x} \in D_{V_z} \right\}.$$

- Le champ est **de classe** C^k si ses coefficients le sont.
- Le **dessin** de \vec{V} consiste des vecteurs $\vec{V}(\vec{x})$ appliqués aux points \vec{x} :



Loi de transformation d'un champ vectoriel

Remarque – Soit \vec{V} un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- Même si on ne considère pas les unités de mesure,
un changement de variables $\vec{x} = h(\vec{u})$ modifie le repère pour $\vec{V}(\vec{x})$
dans la direction des vecteurs du repère.
- En général, si $\vec{x} = h(\vec{u})$, le champ $\vec{V}(\vec{x})$ se transforme en

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{V}}(\vec{u}) &= H(\vec{V}(h(\vec{u}))) \\ &= \tilde{V}_x(\vec{u}) H(\vec{i}) + \tilde{V}_y(\vec{u}) H(\vec{j}) + \tilde{V}_z(\vec{u}) H(\vec{k})\end{aligned}$$

où $\tilde{V}_x(\vec{u}) = V_x(h(\vec{u}))$ (même chose pour \tilde{V}_y et \tilde{V}_z),

et $H(\vec{i}), H(\vec{j}), H(\vec{k})$ sont les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k}
exprimés dans le nouveau repère de \mathbb{R}^3 déterminé par h ,

c'est-à-dire le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui permet de décrire
 $\vec{u} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3$ par les coordonnées (u, v, w) .

Repères mobiles

Définition – Un **repère mobile** est un repère centré en tout point P variable, et qui dépend de la représentation en coordonnées de P : les vecteurs indiquent la direction de variation des coordonnées de P .

En particulier :

- repère cartésien :

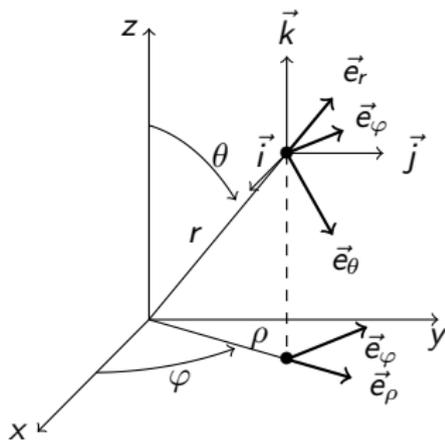
$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

- repère cylindrique :

$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$$

- repère sphérique :

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$$



Attention – Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ne changent pas de direction quand P bouge, mais les autres vecteurs si !

Transformations des repères cartésien, cylindrique et sphérique

Proposition – *Les transformations H entre les repères cartésien, cylindrique et sphérique, sont les suivantes :*

• **cartésien – cylindrique :**

$$\text{Si } (x, y, z) = h(\rho, \varphi, z), \text{ avec } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}, \text{ on a}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ , et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Transformations des repères cartésien, cylindriques et sphériques

- **cartésien – sphérique :**

$$\text{Si } (x, y, z) = h(r, \theta, \varphi), \text{ avec } \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \text{ on a}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + \sin \varphi \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{k} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_φ , \vec{e}_θ et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Champ vectoriel en coordonnées

Conclusion – Un champ vectoriel $\vec{V}(\vec{x})$ de \mathbb{R}^3 s'écrit dans le repère mobile de sa variable \vec{x} :

- en **coordonnées cartésiennes** (x, y, z) :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k},$$

- en **coordonnées cylindriques** (ρ, φ, z) :

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{k},$$

- en **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) :

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_\theta \vec{e}_\theta,$$

où les coefficients V_x , etc, sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

La **transformation** d'une forme à une autre est donnée par le **changement de coordonnées** usuel sur les coefficients, et par le **changement de repère** décrit ci-dessus sur les vecteurs.

Champ axial et champ central

Définition – Un champ de vecteurs \vec{V} de \mathbb{R}^3 s'appelle :

- **Axial** s'il ne dépend que de la distance ρ d'un axe (supposons \vec{k}) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" ρ).

En coordonnées cylindrique, il s'écrit

$$\vec{V}(\rho) = f(\rho) \vec{e}_\rho$$

- **Central** s'il ne dépend que de la distance r d'un point (supposons l'origine) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" r).

En coordonnées sphériques, il s'écrit

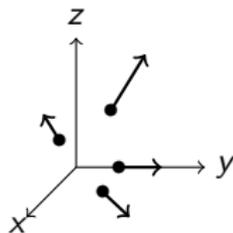
$$\vec{V}(r) = f(r) \vec{e}_r$$

Exemples de champs vectoriels

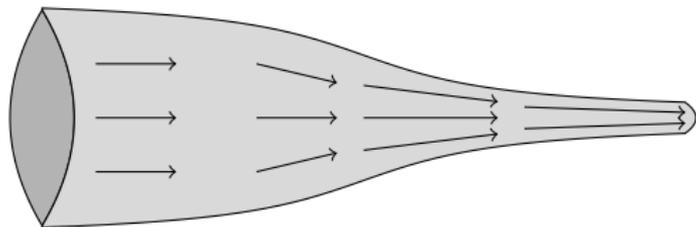
Exemples –

- Le **vecteur position** est le champ central

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \\ &= r\vec{e}_r\end{aligned}$$



- La **vitesse d'écoulement d'un fluide** :



Exemples de champs vectoriels

- Le **champ gravitationnel** engendré par une masse M est le champ central

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

Une masse m situé à distance r de M est soumise à la **force gravitationnelle**

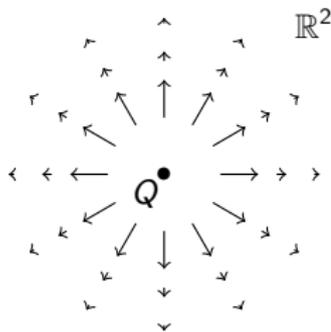
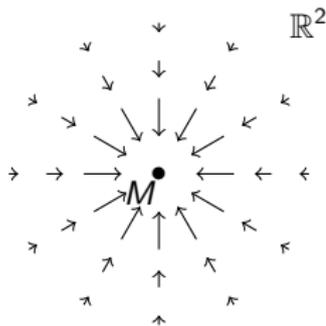
$$\vec{F}(r) = m\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r.$$

- Le **champ électrique** engendré par une charge Q est le champ central

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Une charge q située à distance r de Q est soumise à la **force de Coulomb**

$$\vec{F}(r) = q\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r.$$



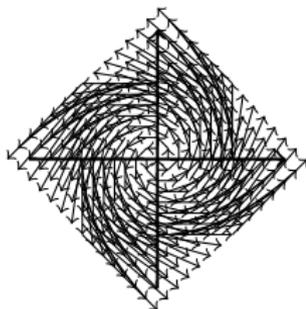
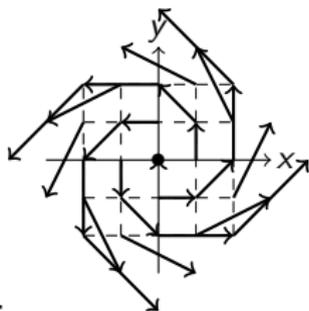
Exercices

Énoncé – Trouver le domaine des champs de vecteurs suivants, les dessiner en un point générique de \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2) et en deux ou trois points particuliers au choix. Enfin, exprimer ces champs en les autres coordonnées.

- $\vec{V}(x, y) = (-y, x) = -y \vec{i} + x \vec{j}$

Réponse –

Domaine = \mathbb{R}^2 .



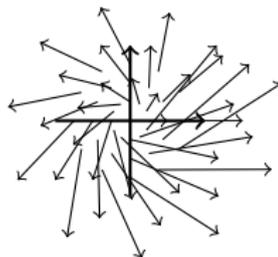
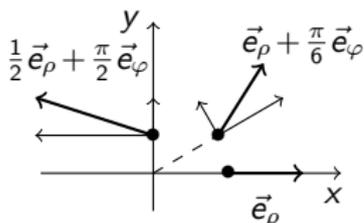
En coord. polaires :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\rho, \varphi) &= -\rho \sin \varphi (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + \rho \cos \varphi (\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \rho (-\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) \vec{e}_\rho + \rho (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \vec{e}_\varphi \\ &= \boxed{\rho \vec{e}_\varphi}.\end{aligned}$$

Exercices

- $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\rho + \varphi \vec{e}_\varphi$

Réponse – $\rho > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, ainsi $D_V = R_+^* \times [0, 2\pi[$.

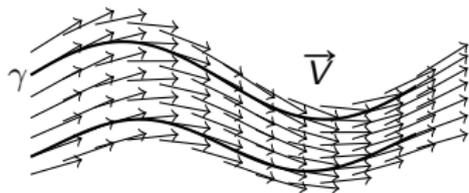


En coord. cartésiennes :

$$\begin{aligned}\vec{V}(x, y) &= \rho \left(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \right) + \varphi \left(-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \right) \\ &= \left(\rho \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right) \vec{i} + \left(\rho \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \right) \vec{j} \\ &= \left(x - \arctan \frac{y}{x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \vec{i} \\ &\quad + \left(y + \arctan \frac{y}{x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \vec{j} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } y > 0.\end{aligned}$$

Lignes de champ

Définition – Les **lignes de champ** ou **courbes intégrales** d'un champ vectoriel \vec{V} sont les courbes γ qui ont $\vec{V}(\vec{x})$ comme vecteur vitesse en tout point $\vec{x} \in \gamma$.



- Si γ est une **courbe paramétrée** par $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, avec $t \in \mathbb{R}$, le **vecteur vitesse de γ au point $\vec{x}(t)$** est le vecteur des dérivées

$$\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

- Alors γ est une ligne de champ pour $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ si et seulement si, pour tout t , on a :

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{V}(\vec{x}(t)) \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = V_x(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) = V_y(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = V_z(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

- Par tout point fixé $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ il passe une seule ligne de champ.

Exercice

Énoncé – Trouver et dessiner les lignes de champ des champs de vecteurs suivants.

- $\vec{V}(x, y, z) = (-y, x, 0) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

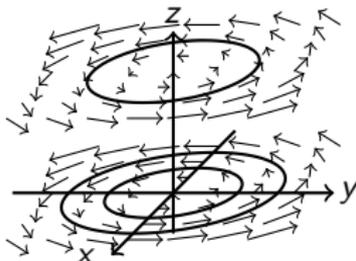
Réponse – $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ décrit une ligne de champ si :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \\ &= (-y(t), x(t), 0)\end{aligned}$$

Ainsi $\dot{x}(t)x(t) + \dot{y}(t)y(t) = \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = 0$, et donc

$$\begin{cases} x(t)^2 + y(t)^2 \text{ est constant} \\ z(t) \text{ est constant} \end{cases} .$$

Au final, γ décrit un cercle sur un plan horizontal centré sur l'axe Oz .



Exercice

- **Champ gravitationnel** : $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$.

Réponse – Les lignes de champ de $\vec{\mathcal{G}}$ donnent la *trajectoire* d'un corps soumis à la force gravitationnelle exercée par la masse M .

- En coord. sphériques, une courbe paramétrée γ est donnée par

$$r(t) \in]0, \infty[, \quad \varphi(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \theta(t) \in]0, \pi[.$$

- Les points de la courbe sont donnés par les vecteurs positions

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t),$$

où le vecteur \vec{e}_r dépend aussi de t car il change de direction avec le point $\vec{x}(t)$ (contrairement à \vec{i} , \vec{j} et \vec{k}).

- Le vecteur tangent à γ au point $\vec{x}(t)$ est donc

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r(t).$$

- Pour trouver les lignes de champ, il nous faut un petit lemme.

Dérivée d'un vecteur à norme constante

Lemme – Soit $\vec{u} = \vec{u}(t)$ un vecteur paramétré par $t \in \mathbb{R}$.

Si \vec{u} a norme constante non nulle, c-à-d $\|\vec{u}(t)\| = c \neq 0$, alors le vecteur dérivé $\dot{\vec{u}}$ est toujours orthogonal à \vec{u} , c-à-d

$$\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \quad (\text{produit scalaire}).$$

Preuve – On écrit $\|\vec{u}(t)\| = \sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}$ et on dérive :

$$\begin{aligned} \left(\|\vec{u}(t)\|\right)' &= \left(\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}\right)' = \frac{\dot{\vec{u}}(t) \cdot \vec{u}(t) + \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}} \\ &= \frac{2 \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}} = \frac{\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{\|\vec{u}(t)\|} \end{aligned}$$

On a donc

$$\|\vec{u}(t)\| = c \quad \Leftrightarrow \quad \left(\|\vec{u}(t)\|\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t) = 0. \quad \square$$

Exercice (suite)

- Résumé : pour une courbe γ en coordonnées sphérique

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t),$$

le vecteur tangent est

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r(t),$$

et, puisque $\vec{e}_r(t)$ a norme constante 1, le vecteur $\dot{\vec{e}}_r(t)$ est orthogonal à $\vec{e}_r(t)$, c-à-d avec seulement des composantes dans les directions $\vec{e}_\varphi(t)$ et $\vec{e}_\theta(t)$.

- Alors γ est une ligne de champ de $\vec{\mathcal{G}}$ si

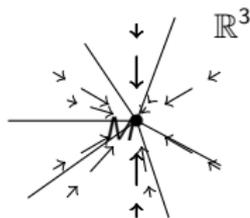
$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r(t) \\ &= \vec{\mathcal{G}}(\vec{x}(t)) = -\frac{GM}{r(t)^2} \vec{e}_r(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -\frac{GM}{r(t)^2} & (1) \\ \dot{\vec{e}}_r(t) = 0 & (2) \end{cases} .$$

Exercice (suite)

- (2) dit que $\vec{e}_r(t)$ est constant.
Donc les lignes de champ sont des droites *radiales* centrées en M .
- (1) donne la distance $r(t)$ de M :



$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\frac{GM}{r(t)^2} &\Rightarrow & r(t)^2 \dot{r}(t) = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}(r(t)^3) = -GM \\ & &\Rightarrow & r(t)^3 = -3GMt + r_0^3 \\ & &\Rightarrow & \boxed{r(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 3GMt}} \end{aligned}$$

où $r_0 = r(0)$ est la distance initiale du corps de M .
Pour que $r(t)$ soit positif, il faut que $t \leq r_0^3/3GM$.

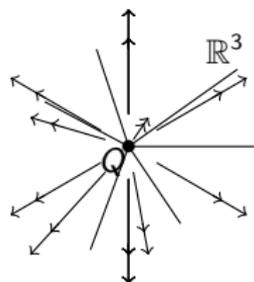
- En somme, un corps qui se trouve à distance r_0 de M est attiré par la masse (car $r(t)$ diminue quand t augmente), et la touche à l'instant $t = r_0^3/3GM$. Les lignes de champ sont orientées vers M : le champ gravitationnel est **attractif**.

Exercice (suite)

- **Champ électrique** : $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

Réponse brève – Les lignes de champ sont aussi des droites radiales, passant par la position de la charge Q qui engendre le champ.

Cette fois, les lignes de champs sont orientée vers l'extérieur : le champ électrique est **répulsif**.



4.4 – Champs conservatifs

Dans cette section :

- Gradient
- Potentiel scalaire et champs conservatifs
- Rotationnel
- Champs irrotationnels
- Ensembles connexes, simplement connexes, contractiles
- Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)
- Calcul du potentiel scalaire
- Le champ électrique \vec{E} et le champ gravitationnel \vec{G}

Gradient d'un champ scalaire

Définition – Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le **gradient** de ϕ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ sur D donné par les expressions :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{k}$$

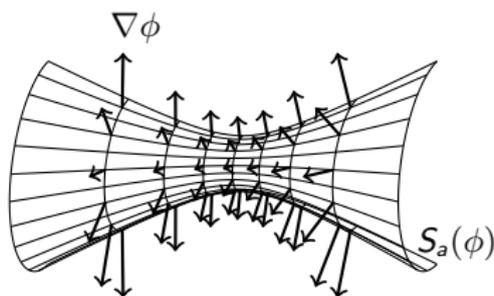
$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta.$$

Exemple – Le gradient de $\phi(r, \theta, \varphi) = r\varphi \sin\theta$ est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial(r\varphi \sin\theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(r\varphi \sin\theta)}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} \vec{e}_\theta \\ &= \varphi \sin\theta \vec{e}_r + \frac{r \sin\theta}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi + \frac{r\varphi \cos\theta}{r} \vec{e}_\theta \\ &= \varphi \sin\theta \vec{e}_r + \vec{e}_\varphi + \varphi \cos\theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Propriétés du gradient

Proposition – Le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ est orthogonal aux surfaces de niveau de ϕ en tout point, et indique le sens de plus forte croissance de ϕ .



Proposition – Le gradient $\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur linéaire agissant sur les champs scalaires (ici f et g) :

$$\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{\nabla}f + \mu \overrightarrow{\nabla}g, \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sur un produit, il agit par la règle de Leibniz :

$$\overrightarrow{\nabla}(f g) = (\overrightarrow{\nabla}f) g + f (\overrightarrow{\nabla}g).$$

Potentiel scalaire et champ conservatif

Définition –

- On appelle **champ de gradient** tout champ vectoriel \vec{V} qui est le gradient d'un champ scalaire ϕ , c'est-à-dire de la forme

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi.$$

- Une force \vec{F} est **conservative** si, quand elle agit sur un système isolé, l'*énergie mécanique* du système est conservée.

Si on voit \vec{F} comme un champ de force, cela arrive s'il existe un champ scalaire ϕ tel que

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} \phi.$$

Dans ce cas, le champ ϕ s'appelle **potentiel (scalaire)** de \vec{F} .

- Donc le potentiel de $\vec{V} = \overrightarrow{\nabla}\phi$ est le champ $-\phi$!

Exemples de forces conservatives

Exemples –

- La force gravitationnelle $\vec{F}(r) = m\vec{g}(r)$ et la force de Coulomb $\vec{F}(r) = q\vec{E}(r)$ sont conservatives.

Justement : quel est leur potentiel ?

- La *force de Lorentz* (due à un champ magnétique \vec{B}), la *pression*, le *frottement* ou un *choc* sont des forces non-conservatives.

Questions –

- Comment savoir si une force \vec{F} est conservative ?
- Si elle l'est, comment trouver son potentiel ?

Rotationnel d'un champ vectoriel

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Le **rotationnel de \vec{V}** est le champ de vecteurs sur D , noté $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ (produit vectoriel, en France \wedge), donné par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{k} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cartésiennes :

- $\vec{V}(x, y, z) = -y \vec{i} + x \vec{j}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{V}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + (1 + 1) \vec{k} = 2 \vec{k}.\end{aligned}$$

- $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + 2xy \vec{j} + z \vec{k}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{V}(x, y, z) &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + (2y) \vec{k} \\ &= 2y \vec{k}.\end{aligned}$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cylindriques et sphériques :

- $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \rho \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(\rho, \varphi, z) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial \sin \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho \cdot 0)}{\partial \rho} - \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{k} \\ &= -\vec{e}_\varphi - \frac{\cos \varphi}{\rho} \vec{k}.\end{aligned}$$

- $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = \sin \varphi \vec{e}_r + r \vec{e}_\theta$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta \cdot 0)}{\partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} - \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \cdot 0)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &= 0 \vec{e}_r + \frac{2r}{r} \vec{e}_\varphi + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \vec{e}_\theta \\ &= 2 \vec{e}_\varphi + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Champs irrotationnels

Proposition – *Le rotationnel est un opérateur linéaire agissant sur les champs de vecteurs (ici \vec{U} et \vec{V}) :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{U} + \mu \vec{V}) = \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} + \mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}, \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait l'identité

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \vec{0}, \quad \text{pour tout champ scalaire } \phi.$$

Définition – Un champ de vecteurs \vec{V} se dit **irrotationnel** si

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}.$$

- Donc tout champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ est irrotationnel.
- Mais un champ irrotationnel n'est pas toujours un gradient !
Pour savoir s'il l'est, il existe un critère basé sur les propriétés *topologiques* du domaine D du champ.

Ensembles simplement connexes et contractiles

Définition – Un sous-ensemble D de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 s'appelle :

- **Connexe** si tous les points de D peuvent être joint par une courbe contenue dans D .



connexe



connexe



non connexe

- **Simply connexe** s'il est connexe et toute courbe fermée dans D peut être déformée en un point.



simpl. connexe



non simpl. connexe

\mathbb{R}^n simpl. connexe
 $\mathbb{R}^2 \setminus \text{point}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \text{droite}$
non simpl. connexe

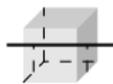
- **Contractile** si on peut déformer l'espace entier D en un point.



contractile



non contractile
simpl. connexe



non contractile
non simpl. connexe



contractile

Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)

Théorème – Soit \vec{V} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble simplement connexe. Alors :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad \text{sur } D \quad \iff \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

- Ainsi, si \vec{F} est un champ de force sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

Si D est **simplement connexe** :

\vec{F} est **conservative**
(a un potentiel scalaire) \iff \vec{F} est un champ **irrotationnel**

- **Attention** – On ne peut rien dire sur \vec{F} si D n'est pas simplement connexe : tout peut arriver !

Calcul du potentiel scalaire

Problème – Soit \vec{V} un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 tel que $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$, défini sur un domaine D simplement connexe.

Trouver son potentiel scalaire ϕ , tel que $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$.

Méthode – Pour simplifier, on cherche l'opposé de ϕ : une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla}f$. En coordonnées cartésiennes :

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = V_x, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = V_y, \quad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = V_z.$$

- On intègre (1) et on trouve

$$f(x, y, z) = \int V_x(x, y, z) dx + g(y, z). \quad (4)$$

- On dérive f par rapport à y , on trouve $\frac{\partial g}{\partial y}$ avec (2) et on l'intègre :

$$g(y, z) = \int \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) dy + h(z). \quad (5)$$

- On met (5) dans (4) pour obtenir à nouveau f . On dérive f par rapport à z et on utilise (3) pour trouver $h'(z)$ et donc $h(z)$.

- À rebours, on insère $h(z)$ dans (5) pour avoir $g(y, z)$, qu'on met dans (4), et on obtient enfin $f(x, y, z)$.

Exemple : calcul du potentiel scalaire

Exemple – Soit $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + y\vec{k}$.

- D'abord on vérifie que $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$.
- Puisque \vec{V} est défini sur tout \mathbb{R}^3 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on sait que \vec{V} est un champ de gradient.
- Cherchons la fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$. On a

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z, \quad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y.$$

• (1) donne $f(x, y, z) = \int 2xy \, dx + g(y, z) = x^2y + g(y, z)$.

• (2) donne $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + z$, d'où suit $\frac{\partial g}{\partial y} = z$,

ensuite $g(y, z) = \int z \, dy + h(z) = zy + h(z)$

et enfin $f(x, y, z) = x^2y + zy + h(z)$.

• (3) donne $\frac{\partial f}{\partial z} = y + h'(z) = y$, d'où $h'(z) = 0$ et $h(z) = c$.

• On a alors $f(x, y, z) = x^2y + zy + c$.

Exemple : potentiel du champ gravitationnel

Exemple – Soit $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$ le champ gravitationnel.

- D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel :

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{GM}{r^2} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{GM}{r^2} \right) \vec{e}_\theta = \vec{0}.$$

- Le champ $\vec{\mathcal{G}}$ est défini sur $D = \{(r, \theta, \varphi) \mid r > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{origine}$, qui est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré, $\vec{\mathcal{G}}$ admet donc un potentiel scalaire.

- En coordonnées sphériques : cherchons une fonction $\phi(r, \theta, \varphi)$ telle que $\vec{\mathcal{G}} = -\operatorname{grad} \phi$, c'est-à-dire

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r,$$

Cela donne les équations

$$(1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0.$$

- (2) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de φ et de θ .
- (1) devient alors $\phi'(r) = \frac{GM}{r^2}$, d'où suit $\phi(r) = -\frac{GM}{r} = V(r)$.

4.5 – Champs incompressibles

Dans cette section :

- Divergence
- Champs à divergence nulle (incompressibles, solénoïdaux)
- Potentiel vectoriel
- Lemme de Poincaré (cas contractile)
- Calcul du potentiel vectoriel
- Le champ magnétique \vec{B} et son potentiel \vec{A}

Divergence

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. La **divergence** de \vec{V} est le champ scalaire sur D , noté $\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (produit scalaire), donné par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta}$$

Exemples –

$$\bullet \vec{V}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j} \implies \operatorname{div} \vec{V}(x, y) = 0.$$

$$\bullet \vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z\vec{k} \implies \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) &= 2x + 2x + 1 \\ &= 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \implies \operatorname{div} \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{r^2} \right) = 0$$

Propriétés de la divergence

Proposition – La divergence est un opérateur linéaire agissant sur les champs de vecteurs (ici \vec{U} et \vec{V}) :

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{U} + \mu \vec{V}) = \lambda \operatorname{div} \vec{U} + \mu \operatorname{div} \vec{V}, \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait aux identités suivantes :

$$\operatorname{div}(\phi \vec{V}) = \phi \operatorname{div} \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi \cdot \vec{V}$$

$$\operatorname{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V})$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi) = \Delta \phi \quad (= \text{Laplacien})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{V}) = \Delta \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \quad (\Delta \vec{V} = \text{Laplacien vectoriel})$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}) = 0$$

pour tout champ scalaire ϕ .

Champs à divergence nulle, incompressibles, solénoïdaux

Définition –

- Un champ vectoriel \vec{V} est à **divergence nulle** si $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.
- Un fluide est **incompressible** si son volume reste constant quand il est soumis à une pression. (Par exemple, un liquide est considéré incompressible, un gaz non.) Cela arrive si le champ \vec{V} qui décrit la *vitesse d'écoulement* du fluide a divergence nulle.
- Un champ de vecteurs \vec{V} qui décrit un *courant de matière* est dit **solénoïdal** (du grèque *sôlen* = tuyau) si le volume de matière transportée est constant (comme s'il était contraint dans un tuyau) : cela arrive si $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

Exemple – Un champ de gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$ est solénoïdal si

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi) = \Delta \phi = 0,$$

c'est-à-dire si la fonction ϕ est harmonique.

Potentiel vectoriel et invariance de jauge

Définition – Soit \vec{V} un champ de vecteurs. On appelle **potentiel vectoriel** de \vec{V} un champ \vec{U} tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$.

Proposition –

- Si le champ \vec{V} admet un potentiel vectoriel, alors \vec{V} est à divergence nulle. (Car $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$ et $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = 0$.)
- Si \vec{U} est un potentiel de \vec{V} , alors $\vec{U} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ l'est aussi, quelconque soit le champ scalaire ϕ .

(En effet, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{U} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \vec{V},$$

car $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \vec{0}$ pour tout ϕ .)

Définition – Le remplacement $\vec{U} \rightarrow \vec{U} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ s'appelle **transformation de jauge**, la liberté dans le choix du potentiel vectoriel est due à l'**invariance de jauge** du champ \vec{V} et le choix d'un potentiel s'appelle **choix de jauge**.

Lemme de Poincaré (cas contractile)

Remarque – Si $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ alors $\text{div } \vec{V} = 0$, mais si $\text{div } \vec{V} = 0$ alors \vec{V} n'est pas toujours $= \text{rot } \vec{U}$!

Théorème – Soit \vec{V} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble contractile. Alors :

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{U} \quad \text{sur } D \quad \iff \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

• Ainsi, si \vec{V} est un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

Si D est **contractile** :

\vec{V} **admet un potentiel vectoriel** \iff \vec{V} **est à divergence nulle**
(incompressible / solénoïdal)

• **Attention** – On ne peut rien dire sur \vec{V} si D n'est pas contractile : tout peut arriver !

Calcul du potentiel vectoriel

Problème – Soit \vec{V} un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 tel que $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, défini sur un ensemble contractile. Trouver son potentiel vectoriel \vec{U} , tel que $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{U}$.

Méthode – En coordonnées cartésiennes, le potentiel vectoriel de \vec{V} est un champ $\vec{U} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$ défini sur D tel que $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{U}$, c'est-à-dire

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = V_x, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = V_y, \quad (3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

- Il s'agit de trouver les trois fonctions f , g et h à travers leurs dérivées partielles (9 en tout) à partir de seulement 3 équations différentielles du 1er ordre qui les relient.
- Ce système se résout par intégrations successives (comme pour le potentiel scalaire), mais n'a pas de réponse unique : mis à part les constantes, il y a en plus 6 ($= 9 - 3$) choix à faire !

Cas particulier de champ et de potentiel

Cas particulier – Si $\vec{V} = V_z \vec{k}$ (c-à-d $V_x = V_y = 0$), avec

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

et on choisit $h = 0$ (ce qui fixe 3 conditions sur les 6 libres), il ne reste qu'un potentiel de la forme $\vec{U} = f \vec{i} + g \vec{j}$ soumis aux équations

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

- (1) et (2) assurent que f et g ne dépendent pas de z .
- Pour résoudre (3), il faut encore fixer arbitrairement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ (2 conditions), plus l'une des deux dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $\frac{\partial g}{\partial x}$ (dernière condition libre).

Exemple : calcul de potentiel vectoriel

Exemple – Soit $\vec{V}(x, y, z) = (xy^2 - x^3y) \vec{k}$.

- D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel vectoriel :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial(xy^2 - x^3y)}{\partial z} = 0.$$

- Puisque $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, par le Lemme de Poincaré \vec{V} admet un potentiel vectoriel \vec{U} défini sur tout \mathbb{R}^3 .
- Cherchons \vec{U} sous la forme

$$\vec{U}(x, y, z) = f(x, y) \vec{i} + g(x, y) \vec{j}$$

($h = 0$ et donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$) tel que

$$(3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2 - x^3y.$$

Exemple (suite)

Solution 1 : on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = xy^2 \Rightarrow g(x, y) = \int xy^2 dx + G(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + G(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y \Rightarrow f(x, y) = \int x^3y dy + F(x) = \frac{1}{2}x^3y^2 + F(x)$$

où $F(x)$ et $G(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a donc

$$\vec{U}_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 + F(x) \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + G(y) \right) \vec{j}.$$

Solution 2 : on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Rightarrow g(x, y) = \tilde{G}(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = x^3y - xy^2 \Rightarrow f(x, y) &= \int (x^3y - xy^2) dy + \tilde{F}(x) \\ &= \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \tilde{F}(x) \end{aligned}$$

où $\tilde{F}(x)$ et $\tilde{G}(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a alors

$$\vec{U}_2(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \tilde{F}(x) \right) \vec{i} + \tilde{G}(y) \vec{j}.$$

Exemple (suite)

Transformation de jauge – La différence entre les deux solutions trouvées est donnée par le gradient d'une fonction : en posant toutes les fonctions F , G , \tilde{F} et \tilde{G} égales à zéro, on a

$$\begin{aligned}\vec{U}_1(x, y, z) - \vec{U}_2(x, y, z) &= \frac{1}{3}xy^3\vec{i} + \frac{1}{2}x^2y^2\vec{j} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{6}x^2y^3 + c \right).\end{aligned}$$

Exercice : le champ magnétique

Énoncé – Un courant d'intensité I qui passe dans un fil droit placé sur l'axe \vec{k} engendre le **champ magnétique** (statique)

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} \right),$$

où μ est la perméabilité magnétique. La force que \vec{B} exerce sur une charge q placée en position (x, y, z) en mouvement avec vitesse \vec{v} est donnée par

$$\vec{F}(x, y, z) = q \vec{v} \wedge \vec{B}(x, y, z)$$

et s'appelle **force de Lorentz**.

1) Trouver le domaine de définition de \vec{B} , son expression en coordonnées cylindriques et en dessiner quelques valeurs.

Réponse –

- $D_{\vec{B}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3$ privé de l'axe \vec{k}

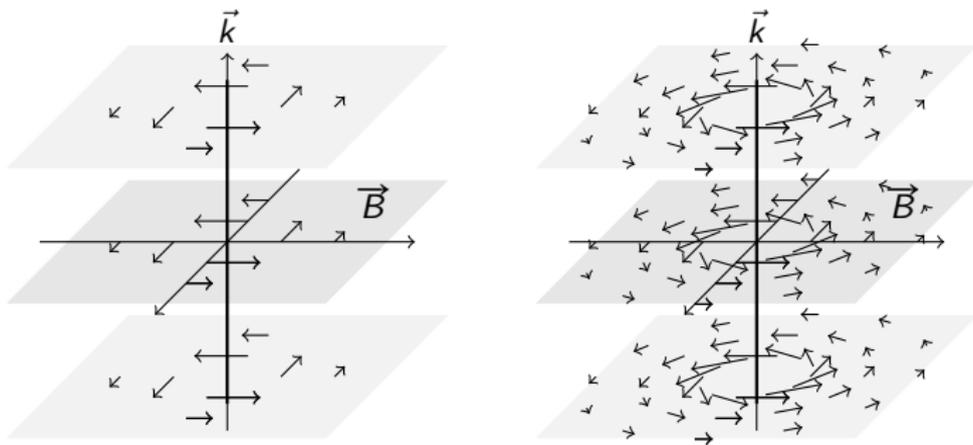
Donc $D_{\vec{B}}$ n'est pas simplement connexe (et pas contractile).

Exercice : le champ magnétique

- L'expression de $\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j} \right)$ en coordonnées cylindriques est :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\mu I}{2\pi} \left(-\frac{\rho \sin \varphi}{\rho^2} \vec{i} + \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} \vec{j} \right) \\ &= \boxed{\frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi}.\end{aligned}$$

- Le dessin de \vec{B} est alors :



Exercice : le champ magnétique

2) Le champ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$ est-il conservatif ?
Autrement dit, admet-il un potentiel scalaire ?

Réponse –

• On a

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{1}{\rho} \right) \vec{k} \right] = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel scalaire ϕ existe sur tout sous-ensemble $D \subset D_{\vec{B}}$ simplement connexe,
par exemple sur $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

• Calculons ϕ tel que $\vec{B} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$ sur un D simplement connexe :

$$(1) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 \quad (2) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad (3) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

(1) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de ρ et de z .

(2) s'écrit $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \implies \boxed{\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi + \varphi_0)}$.

Exercice : le champ magnétique

- Or, le potentiel $\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi + \varphi_0)$ est bien défini seulement si φ ne fait pas un tour complet autour de l'axe \vec{k} !

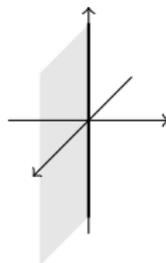
En effet, si φ peut faire un tour complet, au même point physique donné en coordonnées polaires par φ_0 ou $\varphi_0 + 2\pi$, on a deux valeurs distinctes du champ

$$\phi_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \varphi_0 \quad \text{et} \quad \phi_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi_0 + 2\pi),$$

ce qui n'a pas de sens.

En conclusion, le champ \vec{B} n'a pas de potentiel scalaire sur tout son domaine de définition.

- Par contre, le champ \vec{B} admet bien un potentiel scalaire sur l'espace \mathbb{R}^3 privé d'un demi-plan contenant l'axe \vec{k} , par exemple le demi-plan xOz des x positifs.



Exercice : le champ magnétique

3) Le champ \vec{B} admet-il un potentiel vecteur ?

Réponse –

- On a
$$\operatorname{div} \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel vectoriel \vec{A} existe sur tout sous-ensemble $D \subset D_{\vec{B}}$ contractile,

par exemple $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

- Calculons \vec{A} tel que $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ sur un D contractile. En générale :

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = f(\rho, \varphi, z) \vec{e}_\rho + g(\rho, \varphi, z) \vec{e}_\varphi + h(\rho, \varphi, z) \vec{k}$$

est soumis aux équations

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad (3) \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = 0$$

et on a six choix à faire pour avoir une solution (plus des constantes).

Exercice : le champ magnétique

- On choisit $f = g = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, alors on a :

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad h \text{ ne dépend pas de } \varphi \quad (\text{choix : } \varphi_0 = 0)$$

$$(2) \quad \frac{\partial h}{\partial \rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad h(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \quad (\text{choix : } \rho_0 = 1)$$

Avec ces choix, l'expression du **potentiel magnétique** \vec{A} est

$$\vec{A}(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\rho) \vec{k} .$$

- Contrairement au potentiel scalaire ϕ , le potentiel magnétique \vec{A} est bien défini partout sauf en $\rho = 0$:

$$D_{\vec{A}} = D_{\vec{B}}.$$

En conclusion, le champ magnétique \vec{B} admet bien un potentiel vectoriel sur tout son domaine de définition !

Chapitre 5

Circulation et flux

5.1 – Courbes

5.2 – Circulation

5.3 – Surfaces

5.4 – Flux, Stokes et Gauss

5.1 – Courbes

Dans cette section :

- Courbes données par deux équations
- Courbes paramétrées
- Élément de ligne

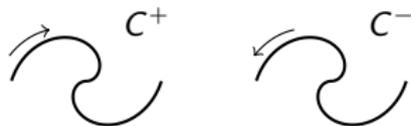
Courbes

Idée – Une **courbe** est une figure géométrique C de *dimension intrinsèque* égale à 1, comme une droite, une parabole, un cercle, ou l'union d'arcs de ce type :



- Une courbe est **plane** si elle est contenue dans un plan.
- Elle est **orientée**, et notée C^+ , si on fixe un sens de parcours (il y en a toujours deux).

Dans ce cas, on note C^- la courbe orientée dans le sens opposé.



- Elle est **fermée** si en la parcourant on revient au point de départ, comme sur un cercle.

Courbes données par des équations

Définition – Comme sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , une **courbe** est l'union d'ensembles donnés par deux équations :

$$C = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \text{ et } G(\vec{x}) = 0, \text{ plus restrictions sur } \vec{x} \right\}$$

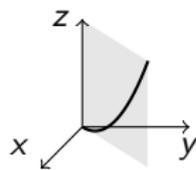
où $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles et les “restrictions” sont des inégalités dans les coordonnées.

Exemple –

- En coordonnées cartésiennes, les équations

$$x - y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - z = 0,$$

avec la restriction $x \in [0, 1]$, décrivent un arc de la parabole $z = x^2$ sur le plan $y = x$.



- En coordonnées cylindriques, le même arc de parabole est décrit par $\rho^2 - 2z = 0$ et $\varphi - \pi/4 = 0$ avec $\rho \in [0, \sqrt{2}]$.

Courbes paramétrées

Définition – Une **courbe paramétrée** est une courbe pour laquelle on donne aussi la *façon de la parcourir* en fonction d'un **paramètre** t (qui représente le *temps* en physique) :

$$C = \left\{ \gamma(t) = \vec{x}(t) \mid t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \right\},$$

où $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle dérivable qui s'appelle **paramétrisation** et denote souvent la courbe même.

L'**orientation** de γ est donné par le sens croissant de t .

La courbe est **fermée** si $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Paramétrisation des coordonnées –

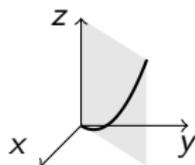
• cartésiennes : $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

• cylindriques : $\gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(t) + z(t) \vec{k}$

• sphériques : $\gamma(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$

Exemple : paramétrisation d'une courbe

Exemple – L'arc de parabole peut être paramétré comme suit :



• En coordonnées cartésiennes, on a $z = x^2$, $y = x$, et $x \in [0, 1]$, alors on peut choisir

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2, \quad \text{avec } t \in [0, 1]$$

et on obtient $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in [0, 1]$.

• En coordonnées cylindriques, on a $\rho^2 = 2z$, $\varphi = \pi/4$, et $\rho \in [0, \sqrt{2}]$, alors on peut choisir :

$$\rho(t) = t \quad \varphi(t) = \pi/4, \quad z(t) = t^2/2, \quad \text{avec } t \in [0, \sqrt{2}]$$

et on obtient $\gamma(t) = t \vec{e}_\rho(t) + t^2/2 \vec{k}$, avec $t \in [0, \sqrt{2}]$.

Vitesse et accélération

Définition – Pour une courbe paramétrée $\gamma(t) = \vec{x}(t)$ on appelle :

- **vitesse**, le vecteur

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t),$$

- **accélération**, le vecteur

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t).$$

Lemme – Les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont constants, par contre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi \end{array} \right.$$

Paramétrisation de la vitesse en coordonnées –

- cartésiennes :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}$$

- cylindriques :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi(t) + \dot{z}(t) \vec{k}$$

- sphériques :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t)$$

Courbes régulières

Définition – La courbe $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est **régulière** si la vitesse ne s'annule jamais, c'est-à-dire si

$$\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0} \quad (\text{ou bien } \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0) \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1].$$

Dans ce cas, la vitesse est un vecteur tangent à la courbe, et on appelle :

• **élément de ligne**, le vecteur

$$\vec{d\ell} = \dot{\gamma}(t) dt ;$$

• **abscisse curviligne**, la primitive de $\|\dot{\gamma}(t)\|$, notée $s = s(t)$, donc

on a $s'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$;

• **élément d'arc**, la différentielle

$$ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt ;$$

• **longueur**, l'intégrale

$$L_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds .$$

Exemples de courbes paramétrées

Exemples –

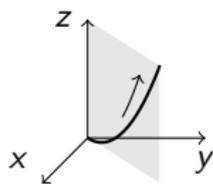
- **Parabole :** $x = y$, $z = x^2$ et $x \in [0, 1]$

$$\gamma(t) = (t, t, t^2) \quad \text{avec} \quad t \in [0, 1]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 1, 2t) = \vec{i} + \vec{j} + 2t \vec{k}$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2} \neq 0 \quad \implies \quad \gamma \text{ est régulière}$$

$$\vec{d\ell} = (1, 1, 2t) dt = dt \vec{i} + dt \vec{j} + 2t dt \vec{k}.$$

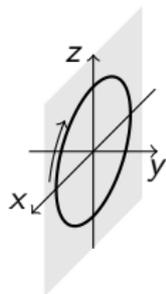


- **Ellipse :** $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ et $y = 0$

$$\gamma(t) = (3 \cos t, 0, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-3 \sin t, 0, 2 \cos t) \neq \vec{0}$$

$$\vec{d\ell} = (-3 \sin t, 0, 2 \cos t) dt = -3 \sin t dt \vec{i} + 2 \cos t dt \vec{k}.$$



Exemples de courbes paramétrées

- **Hélice circulaire :**

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{avec } t \in [0, 6\pi]$$
$$\implies x^2 + y^2 = 1, \quad \frac{y}{x} = \tan z \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \neq \vec{0} \implies \gamma \text{ rég.}$$
$$\implies \vec{d\ell} = (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}) dt$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

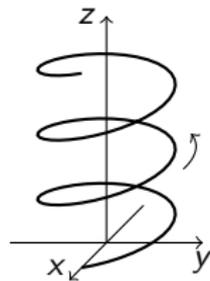
$$\implies L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

En cylindriques : $\rho(t) = 1, \quad \varphi(t) = t, \quad z(t) = t$

$$\implies \gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{k} = \vec{e}_\rho + t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + \dot{z}(t) \vec{k} = \vec{e}_\varphi + \vec{k}$$

$$\implies \vec{d\ell} = (\vec{e}_\varphi + \vec{k}) dt$$



5.2 – Circulation

Dans cette section :

- Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe
- Circulation d'un champ de gradient

Circulation et intégrale curviligne

Définition – Soit \vec{V} un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 et soit C^+ une courbe orientée dans le domaine de \vec{V} , paramétrée par $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. On appelle **circulation de \vec{V} le long de C^+ l'intégrale curviligne**

$$\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

où $\vec{V}(\gamma(t))$ indique que le champ \vec{V} est évalué sur les points de la courbe et \cdot indique le produit scalaire entre vecteurs.

Notation – Si C^+ est une courbe fermée, la circulation de \vec{V} le long de C^+ s'écrit

$$\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

Proposition – Si C^- est orientée dans le sens opposé à C^+ , on a

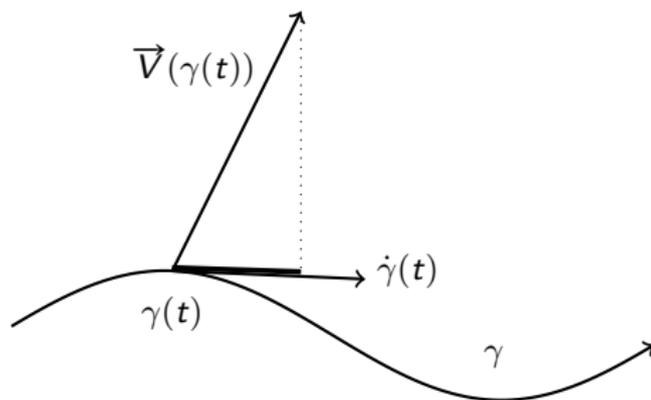
$$\int_{C^-} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

Signification de la circulation

Remarque – Dans l'expression de la circulation

$$\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt,$$

le produit scalaire $\vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ représente la projection orthogonale de $\vec{V}(\gamma(t))$ dans la direction du mouvement le long de γ , donnée par $\dot{\gamma}(t)$:

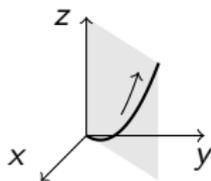


Exercices

Énoncé – Calculer la circulation des champs suivants, le long des courbes indiquées.

• Champ $\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$

Parabole $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in [0, 1]$



Réponse – On a

$$\vec{F}(\gamma(t)) = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \vec{i} + \vec{j} + 2t \vec{k}.$$

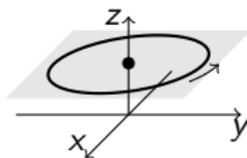
La circulation de \vec{F} le long de γ est donc

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 (t^2 - t + 2t^2) dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - t) dt \\ &= \left[t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercices

- Champ $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \varphi \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\varphi + \rho \vec{k}$

Cercle $x^2 + y^2 = 9, z = 2$
orienté en sens antihoraire



Réponse – On paramétrise $\gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{k}$ avec

$$\rho(t) = 3, \quad \varphi(t) = t \quad \text{et} \quad z(t) = 2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a alors

$$\vec{V}(\gamma(t)) = t \vec{e}_\rho + 2 \vec{e}_\varphi + 3 \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + \dot{z}(t) \vec{k} = 3 \vec{e}_\varphi$$

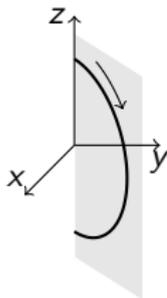
et la circulation de \vec{V} le long de γ est donc

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} 6 dt = 12\pi.$$

Exercices

- Champ $\vec{U}(r, \theta, \varphi) = \varphi \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \vec{e}_\theta$

Demi-cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x \geq 0$
orienté en sens horaire



Réponse – On paramétrise $\gamma(t) = r(t) \vec{e}_r$ avec

$$r(t) = 2, \quad \varphi(t) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta(t) = t, \quad t \in [0, \pi].$$

On a alors

$$\vec{U}(\gamma(t)) = \pi/4 \vec{e}_r + \sin t \vec{e}_\varphi + 2 \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta = 2 \vec{e}_\theta$$

et la circulation de \vec{U} le long de γ est donc

$$\int_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\pi} 4 dt = 4\pi.$$

Travail d'une force

Définition – Soit \vec{F} un champ de force de \mathbb{R}^3 qui déplace un corps le long d'un trajet paramétré par la courbe $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Le **travail de la force** \vec{F} est l'énergie W fournie pour accomplir le déplacement et est donné par la circulation de \vec{F} le long de γ .

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Exemple – Calculons le travail effectué par la force

$$\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$$

pour déplacer un objet le long de l'arc d'hélice

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a

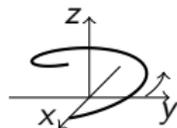
$$\vec{F}(\gamma(t)) = t \vec{i} - \sin t \vec{j} + \cos t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k},$$

donc

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (-t \sin t - \sin t \cos t + \cos t) dt$$

$$= \left[t \cos t \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi.$$



Circulation d'un champ de gradient

Théorème –

- *La circulation d'un champ de gradient le long d'une courbe C^+ qui joint deux points A et B de son domaine de définition ne dépend pas de la courbe mais seulement des deux points :*

$$\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A)$$

et

$$\int_{C^+} -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \phi(A) - \phi(B)$$

- *La circulation d'un champ de gradient le long d'une courbe fermée C^+ contenue dans son domaine de définition est nulle :*

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

et

$$\oint_{C^+} -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

La première assertion se démontre par calcul direct.

La deuxième est un corollaire de la première, ou du théorème de Stokes.

Exercice

Énoncé – *Considérons le champ scalaire*

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y(z^2 - x^2)}},$$

sur le domaine $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > x > 0 \}$.

Calculer le travail de la force conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une hélice C^+ contenue dans D qui joint le point $A = (0, 1, 2)$ au point $B = (3, 4, 5)$.

Réponse – Le travail de $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long de C^+ vaut :

$$\begin{aligned} W &= - \int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(0, 1, 2) - \phi(3, 4, 5) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-0}} - \frac{1}{\sqrt{4(25-9)}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

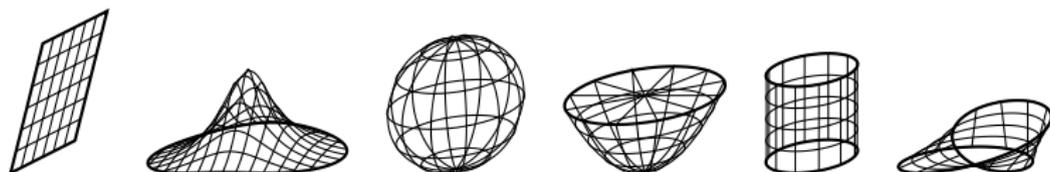
5.3 – Surfaces

Dans cette section :

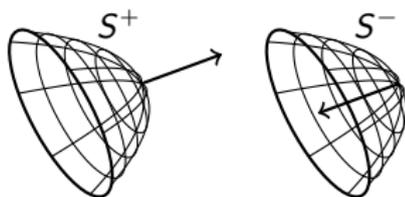
- Surfaces données par une équation
- Surfaces paramétrées
- Vecteur normale et élément de surface

Surfaces

Idée – Une **surface** est une figure géométrique S de *dimension intrinsèque* égale à 2, comme un plan, un disque, un parabololoïde, une sphère, un cylindre, la bande de Moebius, ou leur union :

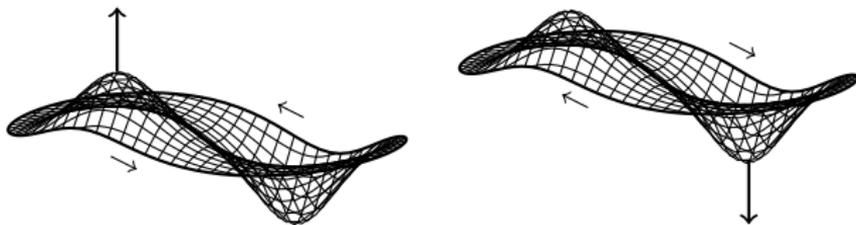


- Une surface est **plane** si elle est contenue dans un plan.
- Elle est **orientable** si on peut distinguer deux cotés. Ceci n'est pas toujours possible, par exemple pour la bande de Moebius.
- Une surface orientable est **orientée**, et notée S^+ , si on choisit un sens de traversée, indiqué par un vecteur sortant. Dans ce cas, on note S^- la surface orientée dans le sens opposé.



Bord des surfaces et surfaces fermées

- Le **bord** d'une surface S est la courbe ∂S qui délimite la surface, par exemple le cercle qui entoure un disque, ou les deux cercles qui délimitent un cylindre.
- Le bord d'une surface orientée est automatiquement orienté de telle sorte qu'en le parcourant débout (direction sortante de S), la surface se trouve sur la gauche.



- Une surface S est **fermée** si on peut distinguer son intérieur de son extérieur, comme pour la sphère. Cela arrive si son bord est vide : $\partial S = \emptyset$.
- Une surface fermée S delimitte un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, comme la sphère qui entoure la boule unitaire. On dit alors que S est le **bord de** Ω , et on écrit : $S = \partial\Omega$.

Surfaces données par une équation

Définition – Comme sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , une **surface** est l'union d'ensembles donnés par une équation :

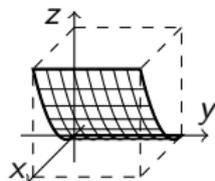
$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \quad \text{plus restrictions sur les variables} \right\}$$

où $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle et les “restrictions” sont des inégalités dans les coordonnées.

Proposition – *Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface d'équation $z = f(x, y)$, avec $(x, y) \in D_f$.*

Exemple – $z = x^2$, $x, y \in [0, 1]$
décrit un **cylindre parabolique**,
d'axe $\vec{O}y$.

Dans ce cas, S est non fermée et son bord ∂S est l'union de quatre courbes.



Surfaces paramétrées

Définition – Une **surface paramétrée** est une surface où les points sont décrits par deux **paramètres** indépendants u et v :

$$S = \left\{ f(u, v) = \vec{x}(u, v) \mid u \in [u_0, u_1], v \in [v_0, v_1] \right\},$$

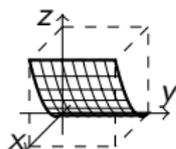
où $f : [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle différentiable qui s'appelle **paramétrisation** de la surface.

En coord. cartésiennes : $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Exemples –

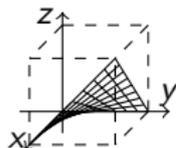
• **Cylindre parabolique** : $z = x^2$, $x, y \in [0, 1]$
si on pose $y = u$, $x = v$ et $z = v^2$, on a

$$f(u, v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0, 1]$$



• **Hyperboloïde** : $z = xy$, $x, y \in [0, 1]$
si on pose $x = u$, $y = v$ et $z = uv$, on a

$$f(u, v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0, 1]$$



Surfaces régulières et vecteur normal

Définition – Une surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est **régulière** au point $f(u, v)$ si le

- **vecteur normal**

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

est bien défini et non nul. Dans ce cas, S est orientée par \vec{n} , et on appelle :

- **élément de surface**, le vecteur

$$d\vec{S} = \vec{n}(u, v) \, du \, dv$$

- **élément d'aire**, le scalaire

$$dA = \|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv$$

- **aire de la surface**, l'intégrale double

$$\text{Aire}(S) = \iint_{U \times V} \|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv = \iint_{U \times V} dA$$

Exemples de surfaces paramétrées

Exemples –

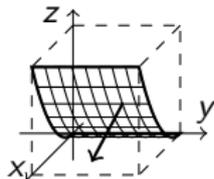
- **Cylindre parabolique** : $z = x^2$, $x, y \in [0, 1]$

$$f(u, v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vecteur orienté vers le bas

$$\vec{dS} = 2v \, du \, dv \, \vec{i} - du \, dv \, \vec{k}$$



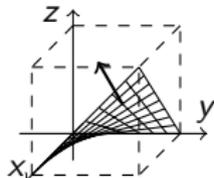
- **Hyperboloïde** : $z = xy$, $x, y \in [0, 1]$

$$f(u, v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

vecteur orienté vers le haut

$$\vec{dS} = -v \, du \, dv \, \vec{i} - u \, du \, dv \, \vec{j} + du \, dv \, \vec{k}$$



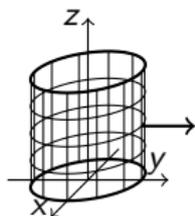
Exemples de surfaces paramétrées

- **Cylindre circulaire** : $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in [0, H]$

en coord. cylindriques : $\rho = R$, donc

$$\vec{f}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, H]$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

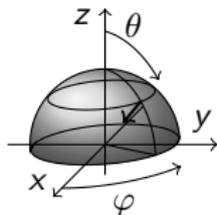
vecteur sortant

- **Démi-sphère** : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

en coord. sphériques : $r = 1$, donc

$$\vec{f}(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi/2]$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin^2 \theta \\ -\sin \varphi \sin^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

vecteur entrant

5.4 – Flux, Stokes et Gauss

Dans cette section :

- Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface
- Théorème de Stokes-Ampère
- Cas particuliers, Théorème de Green-Riemann
- Théorème de Gauss

Flux et intégrales de surface

Définition – Soit \vec{V} un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 et S^+ une surface contenue dans le domaine de \vec{V} , paramétrée par $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$, et orientée par le vecteur normal \vec{n} . On appelle **flux de \vec{V} à travers S^+ l'intégrale de surface**

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{U \times V} \vec{V}(f(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du \, dv,$$

où $\vec{V}(f(u, v))$ indique que le champ \vec{V} est évalué sur les points de la surface et \cdot est le produit scalaire de vecteurs.

Notation – Si S^+ une surface fermée, le flux de \vec{V} à travers S^+ s'écrit

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

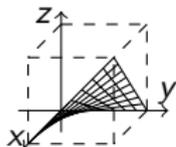
Proposition – Si S^- est orientée dans le sens opposé à S^+ , on a

$$\iint_{S^-} \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S}.$$

Exercice

Énoncé – Calculer le flux des champs suivants, à travers les surfaces indiquées.

- Champ $\vec{V}(x, y, z) = x \vec{i} + z \vec{j} + y \vec{k}$
Hyperboloïde $f(u, v) = (u, v, uv)$, $u, v \in [0, 1]$



Réponse – On a

$$\vec{V}(f(u, v)) = u \vec{i} + uv \vec{j} + v \vec{k}$$

$$\vec{n}(u, v) = -v \vec{i} - u \vec{j} + \vec{k}$$

donc le flux de \vec{V} à travers S^+ vaut

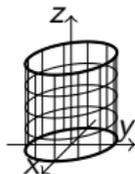
$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} (-uv - u^2v + v) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 (-u - u^2 + 1) \, du \int_0^1 v \, dv \\ &= \left[-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 + u \right]_0^1 \left[\frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Exercice

• Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre $f(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$,

$$\varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in [0, H]$$



Réponse – On a

$$\vec{V}(f(\varphi, z)) = R \cos \varphi z \vec{i} - R \sin \varphi z \vec{j}$$

$$\vec{n}(\varphi, z) = R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j}$$

donc le flux de \vec{V} à travers S^+ vaut

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0, 2\pi[\times [0, H]} R^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) z \, d\varphi \, dz$$

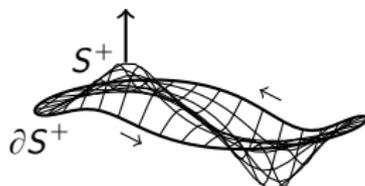
$$= R^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) \, d\varphi \int_0^H z \, dz$$

$$= R^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^H = 0$$

Théorème de Stokes-Ampère

Théorème – Si $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ et S^+ est une surface orientée quelconque, avec bord ∂S^+ , on a :

$$\iint_{S^+} \text{rot } \vec{U} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}$$



Autrement dit :

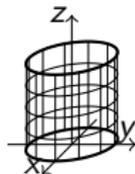
Le flux d'un champ $\text{rot } \vec{U}$ à travers une surface S^+ est égal à la circulation de \vec{U} le long de son bord ∂S^+ .

Exemple

Exemple – Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre $f(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$,

$$\varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in [0, H]$$



• On remarque que $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = z - z = 0$.

Puisque $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, \vec{V} a un potentiel vectoriel \vec{U} .

Après calculs, on trouve : $\vec{U}(x, y, z) = xyz \vec{k}$.

• On applique alors le théorème de Stokes :

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{U} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}.$$

• Le bord de S^+ est composé de deux cercles orientés

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, 0) \quad \text{et} \quad \beta(t) = (R \cos t, -R \sin t, H),$$

avec

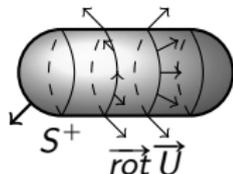
$$\dot{\alpha}(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j} \quad \text{et} \quad \dot{\beta}(t) = -R \sin t \vec{i} - R \cos t \vec{j}.$$

• On alors $\vec{U} \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$ et $\vec{U} \cdot \dot{\beta}(t) = 0$, donc $\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$.

Cas particuliers du théorème de Stokes

- Si S^+ est une surface fermée, on a :

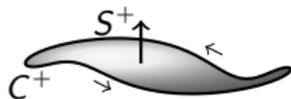
$$\oiint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0$$



En effet, le bord d'une surface fermée est vide, et la circulation de \vec{U} le long d'une courbe vide est nulle.

- Si $\vec{U} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ et C^+ est une courbe fermée, on a :

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = 0$$

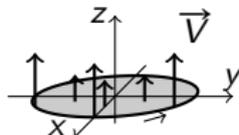


En effet, la courbe fermée C^+ est le bord d'une surface S^+ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = 0$, donc

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S^+} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{S} = 0.$$

Théorème de Green-Riemann

- Si S^+ est une surface plane dans le plan xOy ,
et $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$ est orthogonal à S ,
le champ \vec{U} ne dépend pas de z et on a :



$$\vec{U}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

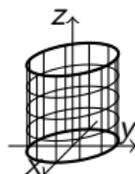
Dans ce cas : **Théorème de Green-Riemann :**

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S^+} (P dx + Q dy).$$

Exemple

Exemple – Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre précédent fermé par les deux disques
à hauteur $z = 0$ et $z = H$.



- Puisque $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ avec $\vec{U}(x, y, z) = xyz \vec{k}$,
et $\partial S^+ = \emptyset$, on a :

$$\begin{aligned} \oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \oiint_{S^+} \text{rot } \vec{U} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Théorème de Gauss-Ostrogradski

Théorème – Si \vec{V} est un champ de vecteurs quelconque et S^+ est une surface orientée fermée, qui delimité un espace borné Ω , c'est-à-dire que $\partial\Omega = S$, on a :

$$\iint_{S^+ = \partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz .$$

Exemple – Si \vec{V} est un champ avec $\operatorname{div} \vec{V} = 5$, et S est la coquille d'un oeuf Ω de volume 4, le flux de \vec{V} entrant dans l'oeuf est :

$$\begin{aligned} \oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz \\ &= 5 \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = 5 \operatorname{Vol}(\Omega) = 20. \end{aligned}$$

Exercice

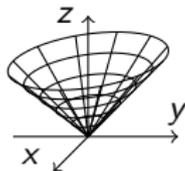
Énoncé – Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers le cône S^+ d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$, paramétré par

$$f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$$

$$\rho \in [0, 3], \varphi \in [0, 2\pi].$$



Réponse –

- D'abord, on observe que la surface S n'est pas fermée, car son bord ∂S est le cercle $x^2 + y^2 = 9$ et $z = 3$.
- Ensuite, on observe que $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z \neq 0$.
- Alors on ne peut appliquer aucun théorème, il faut calculer le flux de \vec{V} à travers S^+ en utilisant la définition.

Exercice (suite)

• Pour : $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$

et S^+ : $f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$, $\rho \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

on a :

$$\vec{V}(f(\rho, \varphi)) = \rho^2 \cos^2 \varphi \vec{i} + \rho^2 \sin^2 \varphi \vec{j} + \rho^2 \vec{k},$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cos \varphi \\ -\rho \sin \varphi \\ \rho \end{pmatrix}.$$

• Le flux est alors :

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0,3] \times [0,2\pi]} (-\rho^3 \cos^3 \varphi - \rho^3 \sin^3 \varphi + \rho^3) d\rho d\varphi \\ &= \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} 3^4 2\pi = \frac{81\pi}{2}, \end{aligned}$$

parce que $\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = 0$.

Exercice

Exercice – Calculer le flux du même champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers la surface fermée S^+ formée du cône précédent $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$ et du disque $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 3$, orientée par les vecteurs normaux sortants.

Réponse – Puisque la surface est fermée, on peut utiliser le théorème de Gauss :

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz,$$

où Ω est le solide entouré par S , donc

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3\},$$

et

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z.$$

Exercice (suite)

On a alors, en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \left(\rho^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \rho z \right) d\rho \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} \rho^2 z \right]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} z^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^3 dz \left[\frac{1}{3} z^3 (\sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= 2 \int_0^3 \frac{1}{2} z^3 \, 2\pi \, dz \\ &= 2\pi \frac{1}{4} 3^4 = \frac{81\pi}{2}\end{aligned}$$

Exercice

Exercice – Calculer le flux du rotationnel de

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers le cône S^+ d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$, paramétré par

$$f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho), \quad \rho \in [0, 3], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Réponse – Pour trouver ce flux on utilise le théorème de Stokes :

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$$

et on n'a pas besoin de calculer $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$.

Le bord ∂S^+ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$, orienté dans le sens horaire, qu'on paramétrise par

$$\gamma(t) = (3 \cos t, -3 \sin t, 3), \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Exercice (suite)

On a alors : $\gamma'(t) = -3 \sin t \vec{i} - 3 \cos t \vec{j}$ et

$$\vec{V}(\gamma(t)) = 9 \cos^2 t \vec{i} + 9 \sin^2 t \vec{j} + 9 \vec{k}.$$

Le flux de $\text{rot } \vec{V}$ à travers le cône S^+ est donc :

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \oint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-27 \cos^2 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t + 0) dt \\ &= 27 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

FIN DU COURS !

BONNE CONTINUATION !