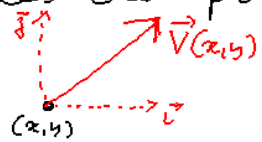
7 février 2023 Math2B TD 2

Exo 3 de la fiche TD1 : questions ? voir le corrigé sur site web.

Exo 4 Chgt coordonnées pour les champs : formulaire !



a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

exprimer en fct de (ρ, φ) coord. polaires $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$

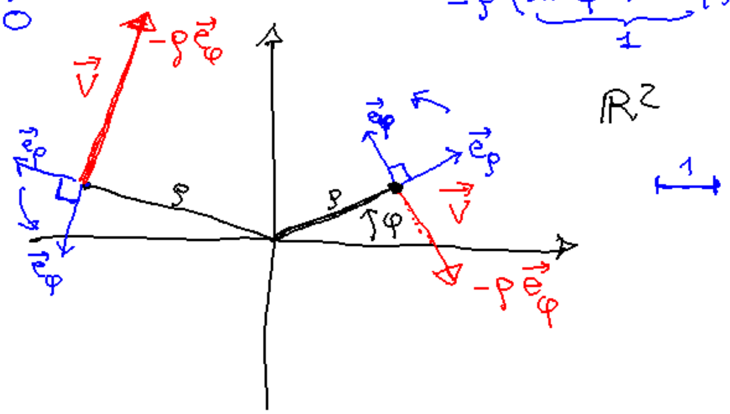
et aussi $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$: $\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\varphi \, \vec{e}_\rho - \sin\varphi \, \vec{e}_\varphi \\ \vec{\jmath} = \sin\varphi \, \vec{e}_\rho + \cos\varphi \, \vec{e}_\varphi \end{cases}$

$$\vec{V}(\rho,\varphi) = \cos\varphi \, \vec{e}_\rho - \sin\varphi \, \vec{e}_\varphi + \sin\varphi \, \vec{e}_\rho + \cos\varphi \, \vec{e}_\varphi$$
$$= (\cos\varphi + \sin\varphi) \, \vec{e}_\rho + (-\sin\varphi + \cos\varphi) \, \vec{e}_\varphi \, .$$

b) $\vec{V}(x,y) = y \, \vec{\imath} - x \, \vec{\jmath}$

$$\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho \sin\varphi \left(\cos\varphi \, \vec{e}_\rho - \sin\varphi \, \vec{e}_\varphi \right) - \rho\cos\varphi \left(\sin\varphi \, \vec{e}_\rho + \cos\varphi \, \vec{e}_\varphi \right)$$
$$= \Big(\underbrace{\rho \cancel{\sin\varphi} \cos\varphi - \rho \cancel{\cos\varphi} \sin\varphi}_{0} \Big) \vec{e}_\rho + \underbrace{\left(-\rho \sin^2\varphi - \rho\cos^2\varphi \right)}_{-\rho\,(\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1})} \vec{e}_\varphi$$
$$= \boxed{-\rho \, \vec{e}_\varphi}$$
$$= \rho \cdot \left(-\vec{e}_\varphi \right)$$

champ de rotation horaire



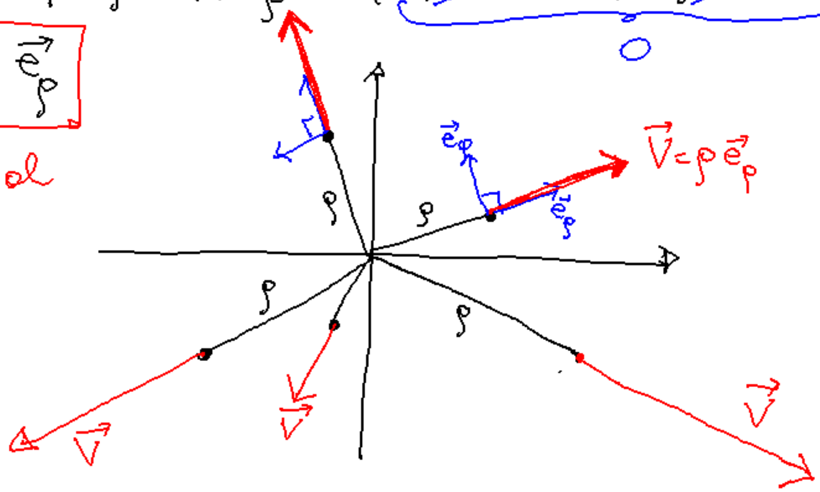
c) $\vec V(x,y,\cancel{z}) = x\,\vec i + y\,\vec j$

$$\vec V(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi\left(\cos\varphi\,\vec e_\rho - \sin\varphi\,\vec e_\varphi\right) + \rho\sin\varphi\left(\sin\varphi\,\vec e_\rho + \cos\varphi\,\vec e_\varphi\right)$$

$$= \left(\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi\right)\vec e_\rho + \left(\underbrace{-\cancel{\rho\cos\varphi\sin\varphi} + \cancel{\rho\sin\varphi\cos\varphi}}_{0}\right)\vec e_\varphi$$

$$= \boxed{\rho\,\vec e_\rho}$$

champ radial



d) $\vec V(x,y,z) = \underbrace{x\,\vec i + y\,\vec j}$ $+ z\,\vec k$

$\vec V(\rho,\varphi,z) =$ déjà calculée : $\rho\,\vec e_\rho$ $+ z\,\vec k$ $= \boxed{\rho\,\vec e_\rho + z\,\vec k}$.

$\vec V(r,\theta,\varphi) = ?$ deux méthodes :

1) $(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$

2) $(\rho,\varphi,z) \to (r,\theta,\varphi)$

1) $$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec i = \cos\varphi\sin\theta\,\vec e_r + \cos\varphi\cos\theta\,\vec e_\theta - \sin\varphi\,\vec e_\varphi \\ \vec j = \sin\varphi\sin\theta\,\vec e_r + \sin\varphi\cos\theta\,\vec e_\theta + \cos\varphi\,\vec e_\varphi \\ \vec k = \cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta \end{cases}$$

$$\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\cos\varphi\sin\theta\left(\cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$
$$+ r\sin\varphi\sin\theta\left(\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_r + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$
$$+ r\cos\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$
$$= \left(r\overbrace{\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi}^{1}\sin^2\theta + r\cos^2\theta\right)\vec{e}_r$$
$$+ \left(r\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta$$
$$+ \left(-\cancel{r\cos\varphi\sin\varphi}\sin\theta + \cancel{r\sin\varphi\cos\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$= r\left(\underbrace{\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}\right)\vec{e}_r + r\underbrace{\left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} - 1\right)}_{0}\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_\theta + 0\cdot\vec{e}_\varphi$$
$$= r\,\vec{e}_r + 0\cdot\vec{e}_\theta + 0\cdot\vec{e}_\varphi = r\,\vec{e}_r\,.$$

Alternative à la méthode 1) avec moins de calculs :

$$\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$ (pas les vecteurs !)

$$= r\underbrace{\left(\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)}_{\text{on le reconnait (sur le formulaire) : c'est } \vec{e}_r\ !!} = r\,\vec{e}_r$$ super !

2) $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta \\ \varphi = \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{k} = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

$$\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\left(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta\right) + r\cos\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$
$$= r\underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1}\vec{e}_r + r\underbrace{\left(\sin\theta\cancel{\cos\theta} - \cancel{\cos\theta}\sin\theta\right)}_{0}\vec{e}_\theta$$
$$= r\,\vec{e}_r$$

Exo 5 Lignes de champ (livret p. 15)

<u>Rappel</u>: Une <u>ligne de champ</u> du champ $\vec{V}(\overset{\vec{x}}{x,y,z})$ est une <u>courbe paramétrée</u>

$\boxed{\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))}$, avec $t \in [t_0, t_1] = I \subset \mathbb{R}$,

à trouver

t.q. $\forall t$ on a $\boxed{\vec{V}(\vec{x}(t)) = \dot{\vec{x}}(t)}$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{V}(x(t),y(t),z(t)) = \boxed{V_x(\vec{x}(t))\,\vec{\imath} + V_y(\vec{x}(t))\,\vec{\jmath} + V_z(\vec{x}(t))\,\vec{k}}$$

$$= \boxed{\dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\,\vec{k}} = \dot{\vec{x}}(t) \quad \text{vitesse de } \vec{x}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = V_x(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) = V_y(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = V_z(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}}$$

système d'éq. diff. ordinaires du 1er ordre

$\Rightarrow$ infinité de solutions, <u>sol. unique</u> si $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ fixé.

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ dans $\mathbb{R}^2$

courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$: on cherche les deux fcts $x(t), y(t)$,

t.q. $\boxed{\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath} \overset{!}{=} \vec{V}(\gamma(t)) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = t + a & \forall a \in \mathbb{R} \\ y(t) = t + b & \forall b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Rem</u>: $(a, b) = (x(0), y(0))$ est le point de passage au temps $t=0$

<u>Sol</u>: $\boxed{\gamma(t) = (t+a, t+b) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2}$

$\gamma(0) = (a,b)$ pt. de départ, $\gamma(1) = (a+1, b+1)$ pt. après temps $t=1$

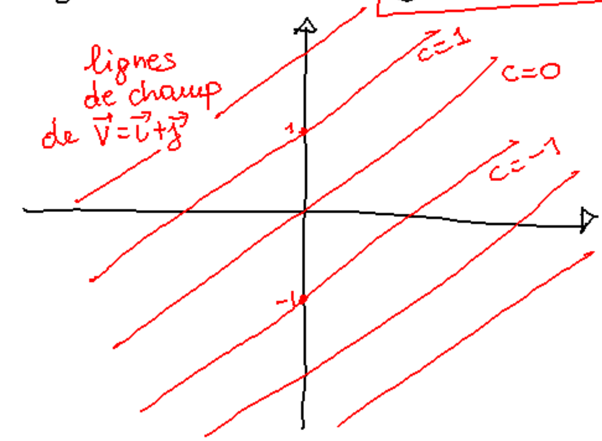
ceci donne ~~la~~ <u>trajectoire</u> en physique, avec pt départ (a,b).

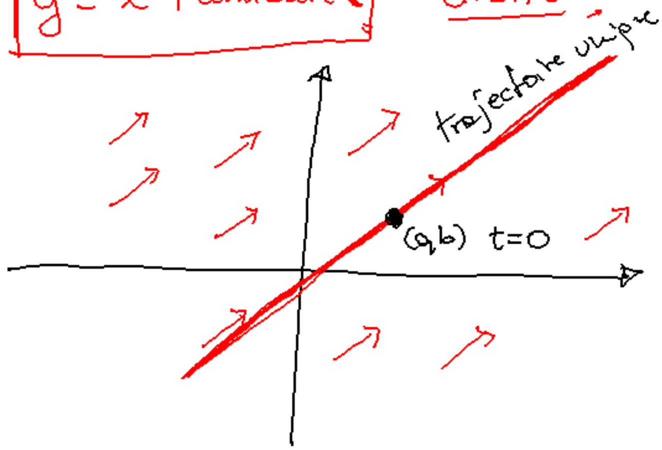
Question : quelle est la forme de cette trajectoire ?

Pour trouver la forme, il faut la relation entre $x(t)$ et $y(t)$ qui vaut pour tous les temps t.

$$\begin{cases} x(\cancel{t}) = t + a \\ y(\cancel{t}) = t + b \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x - a \\ \boxed{y = x - a + b} \end{cases} \qquad \boxed{y = x + \text{constante } c}$$

droite !





b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ t.q. $\dot{\gamma}(t) = \vec{V}(\gamma(t))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 2 \\ \dot{z}(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \int \dot{x}(t)\,dt = \int dt = t + a & \forall a \in \mathbb{R} \\ y(t) = \int \dot{y}(t)\,dt = 2\int dt = 2t + b & \forall b \in \mathbb{R} \\ z(t) = t + c & \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

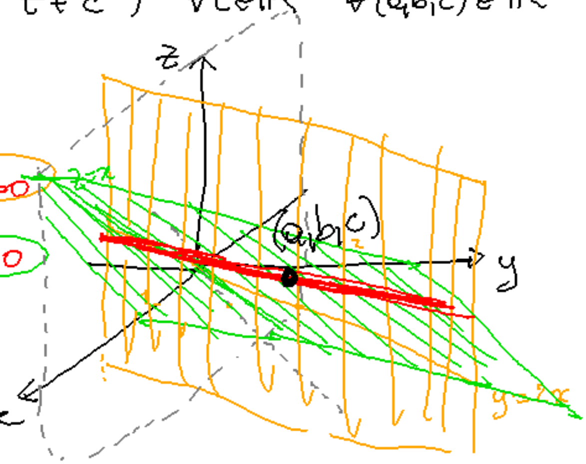
$\Leftrightarrow$ trajectoire : $\gamma(t) = (t+a, 2t+b, t+c)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Forme de la trajectoire ?

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = 2t + b \\ z = t + c \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x - a \\ \boxed{\begin{array}{l} y = 2x \underbrace{-2a+b}_{d} \\ z = x \underbrace{-a+c}_{e} \end{array}} \end{cases}$$

plan 1 $2x - y + d = 0$

plan 2 $x - z + e = 0$



intersection de deux plans = droite par (a,b,c)

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\vec{i} + y\vec{j}$

ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et vitesse $\dot\gamma(t) = \dot x(t)\vec{i} + \dot y(t)\vec{j}$,

t.q. $\dot\gamma(t) = \vec{V}(\gamma(t)) = (x(t)+1)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot x(t) = \underbrace{x(t) + 1}_{\text{non h.}} \\ \boxed{\dot y(t) = y(t)} \ (3) \end{cases} \overset{\text{TMB}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x(t) = x_0(t) + x_p(t) & \text{où } \underset{(1)}{\boxed{\dot x_0(t) = \overset{a(t)=1}{\checkmark} x_0(t)}} \text{ et } x_p = \underset{(2)}{\text{sol. part.}} \\ y(t) = y_0(t) & \text{sol générale} \end{cases}$$

(1) $x_0(t) = \lambda e^{\int a(t)\,dt} = \lambda e^{t} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(2) $x_p(t) = \lambda(t)e^{t}$ t.q. $\lambda'(t)e^{t} + \cancel{\lambda(t)e^{t}} = \cancel{\lambda(t)e^{t}} + 1 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{e^{t}} = e^{-t}$

$\Leftrightarrow \lambda(t) = \int e^{-t}dt + \underset{\text{inutile}}{\cancel{\text{const.}}} = -e^{-t} \Rightarrow x_p(t) = -e^{-t}.e^{t} = -e^{-t+t} = -1$

$\Rightarrow$ (1)+(2) $x(t) = \lambda e^{t} - 1$

(3) $y(t) = \mu e^{t} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \gamma(t) = (\lambda e^{t} - 1, \mu e^{t})$ trajectoire $\forall t \in \mathbb{R}, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

Point de départ : pour $t=0$! $\gamma(0) = (\lambda e^{0} - 1, \mu e^{0}) = (\lambda - 1, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Si pt. départ est (a,b), on doit prendre la ligne de champ

avec paramètres $\begin{cases} \lambda - 1 = a \\ \mu = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = a+1 \\ \mu = b \end{cases}$

c'est à dire : $\gamma_{(a,b)}(t) = \left((a+1)e^{t} - 1, b e^{t}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Forme de la ligne de champ ?

$$\begin{cases} x(\cancel{t}) = \lambda e^{t} - 1 \\ y(\cancel{t}) = \mu e^{t} \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{x = \frac{\lambda}{\mu} y - 1} & \frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R} \\ e^{t} = \frac{1}{\mu} y \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{\mu}{\lambda}(x+1) = \frac{\mu}{\lambda}x + \mu/\lambda}$$

éq. $\boxed{y = cx + c}$ droite !

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ t.q. $\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) \overset{(1)}{=} y(t) \\ \dot{y}(t) \underset{(2)}{=} x(t) \end{cases}}$ éq. diff. matricielle hors TMB !

On ne sait pas résoudre ce système d'éq. diff. pour l'instant.
Faut attendre Math 3 en L2 physique.

Mais on peut reconnaître la forme de la trajectoire avec une astuce :

$$\begin{cases} \dot{x}(t)\,x(t) \overset{(1)}{=} y(t)\,x(t) = x(t)\,y(t) \\ \dot{y}(t)\,y(t) \underset{(2)}{=} x(t)\,y(t) \end{cases} \Rightarrow 2\,\dot{x}(t)\,x(t) \overset{\forall t}{=} 2\,\dot{y}(t)\,y(t)$$

$$x(t)^2 = \int \frac{d}{dt}\left(x(t)^2\right) dt \overset{\forall t}{=} \int \frac{d}{dt}\left(y(t)^2\right) dt = y(t)^2 + a$$

$\Updownarrow$

$(\forall t)$ $\boxed{x^2 - y^2 = a}$ éq. cartésienne des trajectoires

$\Rightarrow$ si $a=0$  2 droites ou si $a>0$  hyperboles $a<0$ 

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ t.q. $\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) \overset{(1)}{=} y(t) \\ \dot{y}(t) \underset{(2)}{=} x(t) \end{cases}}$ éq. diff. matricielle hors TMB !

On ne sait pas résoudre ce système d'éq. diff. pour l'instant.
Faut attendre Math 3 en L2 physique.

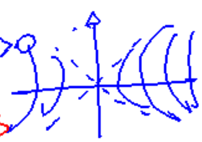
Mais on peut reconnaître la forme de la trajectoire avec une astuce :

$$\begin{cases} \dot{x}(t)\,x(t) \overset{(1)}{=} y(t)\,x(t) = x(t)\,y(t) \\ \dot{y}(t)\,y(t) \underset{(2)}{=} x(t)\,y(t) \end{cases} \Rightarrow 2\,\dot{x}(t)\,x(t) \overset{\forall t}{=} 2\,\dot{y}(t)\,y(t)$$

$$x(t)^2 = \int \frac{d}{dt}\left(x(t)^2\right) dt \overset{\forall t}{=} \int \frac{d}{dt}\left(y(t)^2\right) dt = y(t)^2 + a$$

$\Updownarrow$

$(\forall t)$ $\boxed{x^2 - y^2 = a}$ éq. cartésienne des trajectoires

$\Rightarrow$ si $a=0$  2 droites ou si $a>0$  hyperboles $a<0$