23 avril 2023 - Questions sur le CC3

Intégrales :

$\int_0^{\pi/2} \sin(t^2)\,dt$ long, certainement pas au CC3 !

ça vient de $\vec{V}(\gamma(t)) = (\sin t + t)\vec{i} + (\cos t + t)\vec{j} + (\sin t + \cos t)\vec{k}$

$\dot{\gamma}(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ $\quad t \in [0, \pi/2]$

$$\int_\gamma \vec{V}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin t\,(\sin t + t) + \cos t\,(\cos t + t) + \sin t + \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^2 t - t\sin t + \cos^2 t + t\cos t + \sin t + \cos t\right) dt$$

à part :

deux choix pour : soit à part (par parties), soit $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$ ⟶ chgt de var. $u = 2t$

(par parties)

- $\int \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t + \int \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,dt = -\sin t \cos t + \underbrace{\int dt}_{t} - \int \sin^2 t\,dt$

  $u = \sin t \quad v' = \sin t$

  $u' = \cos t \quad v = -\cos t$

  $2\int \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t + t \implies \boxed{\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t)}$

- $\boxed{\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t)}$

- $\boxed{\int (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt} = \int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin(2t)$

  $u = 2t \quad t = \frac{1}{2}u$

  $dt = \frac{1}{2}du$

  $= \frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t = \boxed{\sin t\cos t}$

Test : $\int \cos^2 t\,dt - \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(\cancel{t} + \sin t\cos t - \cancel{t} + \sin t\cos t\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\sin t\cos t$

- $\int t \sin t \, dt = -t\cos t + \int \cos t \, dt = -t \cos t + \sin t$

$u = t \quad v' = \sin t$

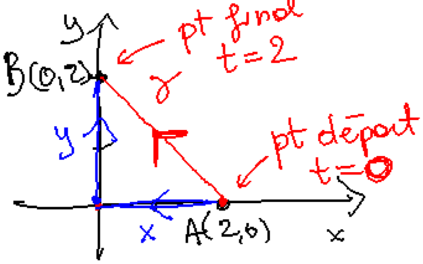
$u' = 1 \quad v = -\cos t$

- $\int t \cos t \, dt = t \sin t - \int \sin t \, dt = t \sin t + \cos t$

$u = t \quad v' = \cos t$

$u' = 1 \quad v = \sin t$

Q1 - Paramétrer le segment allant de $A(2,0)$ à $B(0,2)$ avec $t \in [0,2]$.



$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec x, y liés par éq. droite $ax + by + c = 0$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{2-0} \qquad 2(x-2) = -2\cdot y \qquad 2x - 4 = -2y \qquad 2x + 2y - 4 = 0 \qquad \boxed{x + y - 2 = 0}$$

1er choix

Pour paramétrer: $\boxed{y = -x + 2}$, $t = x \in [0,2]$

$\gamma(t) = (t, 2-t)$, $t \in [0,2]$ $\qquad \gamma(0) = (0,2) = B$ NON!

→ Astuce pour inverser le sens de parcours : $\boxed{t \mapsto 2-t}$

$\gamma(t) = (2-t, 2-(2-t)) = (2-t, t) \qquad \gamma(0) = (2,0) = A$ OK.

$\boxed{x = 2 - y} \qquad t = y$ ok

Q4 Calculer $\int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{d\ell}$

$\vec{V}$; f : potentiel (math) de $\vec{V}$ = "primitive" de $\vec{V}$

Thm
$$\boxed{\int_{\gamma \text{ de } A \text{ au } B} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{d\ell} = f(B) - f(A) \equiv [f]_A^B}$$

analogue du Thm. Fonda de l'analyse : $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b$

f = primitive de f'
(car f' = dérivée de f)

ex : $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$

$\boxed{\gamma(t) = (2-t,\ (3-t)^2,\ (1+t)^3) \text{ avec } t \in [0,1]}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} A = \gamma(0) = (2, 9, 1) \\ B = \gamma(1) = (1, 4, 8) \end{array}}$

$\Rightarrow \int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{d\ell} = f(1,4,8) - f(2,9,1) = \ln(4+8) - \ln(18+1)$
$= \ln\left(\frac{12}{19}\right)$ Erreur dans le QCM

Q5 param. de surface $S = \{(x,y,z) \mid \boxed{z^3 = x^3}\}$, choix :

$y \in \mathbb{R}$

(a) (u,v,u) (b) $(u^3, 0, v^3)$ (c) (u,v,u^3) (d) $(u,0,v)$

Test l'éq. sur les fcts $x(u,v)$, $y(u,v)$ et $z(u,v)$ données :

(a) $z^3 = u^3$, $x^3 = u^3$ éq OK + paramètre $y = v$ libre OK → bonne param !

(b) $z^3 = (v^3)^3 = v^9$, $x^3 = (u^3)^3 = u^9$ NON

(c) $z^3 = (u^3)^3 = u^9$ $x^3 = u^3$ NON

(d) $z^3 = v^3$, $x^3 = u^3$ NON

extra : (e) $(u-v, 0, u-v)$ $z^3 = (u-v)^3 = x^3$ ok

mais $y = 0$ ne va pas ! NON

Calcul de flux : choisir la bonne méthode !

Déf : Q8

$$\iint_S \vec V\cdot d\vec S = \iint_{U\times V} \vec V\,(f(u,v)) \cdot \vec n(u,v)\; du\, dv$$

Q5 Q6

$S \leftarrow$ param. $f(u,v)$ avec $u\in U$, $v \in V$

Thm Stokes Q9 :

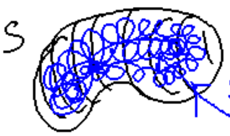
Si $\vec V = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec U$ suffit, alors $\displaystyle\iint_{S^+} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec U\cdot d\vec S = \oint_{\partial S^+} \vec U\cdot d\vec \ell$

$S^+ \leftarrow$ suffit le bord

Q7

Thm Gauss : Q10

Si S fermée $\iff$ ∂S est vide $\iff$ $S = \partial\Omega$ solide, alors $\displaystyle\oiint_S \vec V\cdot d\vec S = \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec V \cdot dx\,dy\,dz$



intérieur

Q10 Flux de $\vec V(x,y,z) = (2x)\vec\imath - yz\,\vec k$ à travers le bord du cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ orienté avec $\vec n$ sortant

Sol : Gauss car $S = \partial\Omega$ où Ω = cube plein $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ est fermée ! intérieur

$$\iint_{S^+} \vec V\cdot d\vec S \overset{\text{Gauss}}{=} + \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec V\cdot dx\,dy\,dz = (*)$$

$\vec n$ sortant

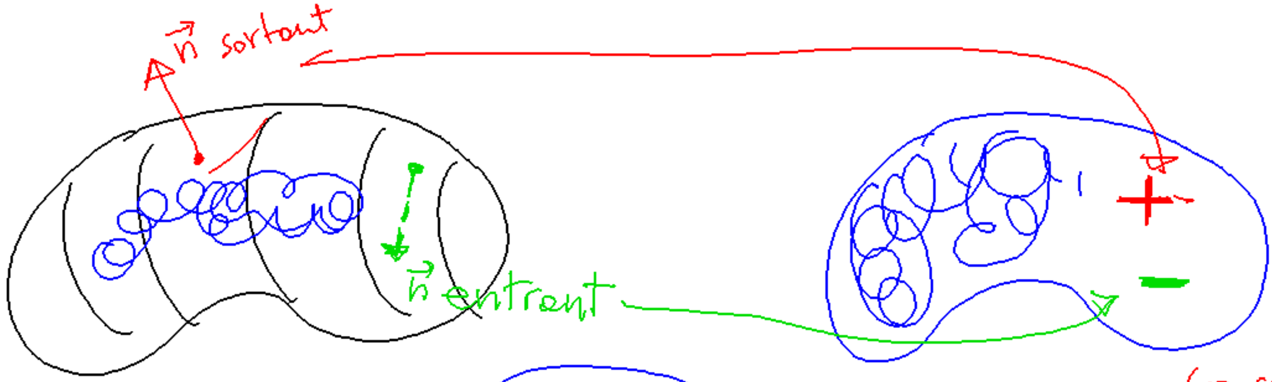
$$\mathrm{div}\,\vec V = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz) = 2-y$$

$$(*) = \iiint_{\text{cube}} (2-y)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dx \int_0^1 (2-y)\,dy \int_0^1 dz = [x]_0^1\cdot\left[2y - \tfrac12 y^2\right]_0^1 [z]_0^1$$

$$= 1\times\left(2-\tfrac12\right)\times 1 = \frac32 .$$

Orientation de $S^{+} = \partial \Omega$ (solide) $\Longrightarrow$ orientation de Ω

$\partial S = \emptyset$, fermée



Gauss : $\displaystyle\iint_{S^{\pm}} \vec V \cdot \vec{dS} = \pm \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec V \cdot dx\,dy\,dz$ coord. sphériques (r, θ, φ) $(r, \varphi\ \theta)$

$(\vec i, \vec j, \vec k) \underset{\det J > 0}{\rightsquigarrow} (\vec e_r, \vec e_\theta, \vec e_\varphi)$

pb. dans signe $\Longleftarrow$ $(\vec e_r, \vec e_\varphi, \vec e_\theta)$ $\det J < 0$