

EXAMEN FINAL
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Jeudi 1 juin 2006. Durée de l'épreuve : 2h

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.
Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personnelles.

Exercice 1 (Formule de Taylor). Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{24},$$

en utilisant le développement de Taylor de la fonction $\cos x$ autour de $x = 0$.

Exercice 2 (Calcul d'intégrale). Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx,$$

en remarquant que $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 3 (Équation différentielle du 1er ordre). Trouver l'unique solution y de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = \frac{e^{x^2}}{\cos^2 x}$$

qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 4 (Équation différentielle du 2ème ordre). Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sinh x.$$