Université Claude-Bernard Lyon 1

EXAMEN PARTIEL
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Mardi 5 avril 2005. Durée de l'épreuve : 1h30

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.
Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personelles.

Exercice 1. Trouver les solutions complexes de

$$iz^2 + (4 - 5i)z - (11 - 3i) = 0$$

et les dessiner sur le plan complexe.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$y(x) = \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right).$$

1) Vérifier que $y(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbf{R}$.

2) En regardant le graphe des fonctions arccos et cosh, montrer que

$$y(x) \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3) En utilisant la définition de la fonction arccos, montrer que

$$\tan^2(y(x)) + 1 = \cosh^2 x \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

4) En regardant le graphe de la fonction sinh, deduire de 2) que

$$y(x) = \arctan(\sinh x) \quad \text{si } x \geq 0.$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes en utilisant le Théorème de L'Hôpital.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{\cos x - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\sinh x \ln x}}{x^{\sinh x}}$

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^{10} - \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{1 - x} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3}} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

2) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$?