

EXAMEN PARTIEL  
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE  
LICENCE 1ère ANNÉE

Mardi 11 avril 2006. Durée de l'épreuve : 1h30

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.

Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personnelles.

**Exercice 1.** Trouver les solutions complexes de

$$2z^2 - (2 + 3i)z - 1 + i = 0$$

et les dessiner sur le plan complexe.

**Exercice 2.** Calculer les limites suivantes (éventuellement en utilisant le Théorème de L'Hôpital)

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^2}{x^3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sinh x)}{\sqrt{\sinh x}}$

**Exercice 3.** Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 - \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 1) La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbf{R}$  ?
- 2) En utilisant le Théorème des Valeurs Intermédiaires, montrer que  $f$  a au moins deux zéros compris entre  $-1$  et  $8$ .
- 3) La fonction  $f$  est-elle dérivable sur  $\mathbf{R}$  ?

**Exercice 4.** Etudier la fonction

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \arccos(x)$$

et dessiner son graphe. Plus précisément,

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) La fonction  $f$  est-elle continue sur  $D_f$  ?
- 3) Déterminer l'ensemble  $D'_f \subset D_f$  où  $f$  est dérivable, et calculer la fonction dérivée  $f'$ .
- 4) Trouver deux constantes  $A$  et  $B$  telles que

$$\begin{aligned} f(x) &= A, & \text{pour } x > 0 \text{ dans } D'_f, \\ f(x) &= 2 \arccos(x) + B, & \text{pour } x < 0 \text{ dans } D'_f. \end{aligned}$$