Exercice 29

f) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+2x+2}} \boldsymbol{dx}$

Il faut savoir pour commencer par déterminer si le polynôme du second degré $x^2 + 2x + 2$ est irréductible ou non.
S'il n'est pas irréductible, il faudra le factoriser puis décomposer alors la fraction en éléments simples.
Pour déterminer s'il est irréductible ou non, on calcule son discriminant :
$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc le polynôme $x^2 + x + 2$ est irréductible.
On cherche alors la forme canonique du polynôme : $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$,
Cela nous amène à effectuer le changement de variable $u = x + 1 = h^{-1}(x)$. On a alors : $x = u - 1 = h(u)$ et $dx = du$. Ainsi,

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+2x+2}} \boldsymbol{dx} = \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+1)^2+1}} \boldsymbol{dx} = \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u^2+1}} \boldsymbol{du} = \boldsymbol{arctan}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{arctan}(\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) + \boldsymbol{C}$$

où C est un nombre réel.

h) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^4+x^2+1}} \boldsymbol{dx}$

<u>Etape 1 : Factorisation de $X^4 + X^2 + 1$</u>
On résout $X^4 + X^2 + 1 = 0$ (dans $\mathbb{C}$), en posant $Y = X^2$.
On a alors l'équation $Y^2 + Y + 1 = 0$.
Le discriminant est égal à $\triangle$ = -3 : on a donc deux solutions complexes conjuguées : $Y = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; : $Y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$
On a donc : $X^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $X^2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$
Ces deux équations possèdent chacune deux solutions dans $\mathbb{C}$:
$Z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}$; $Z_1 = -e^{\frac{i\pi}{3}}$; $Z_2 = e^{\frac{-i\pi}{3}} = \overline{Z_0}$; $Z_3 = -e^{\frac{-i\pi}{3}} = \overline{Z_1}$.
On a alors $P(X) = X^4 + X^2 + 1 = (X - Z_0)(X - \overline{Z_0})(X - Z_1)(X - \overline{Z_1})$
Donc : $P(X) = \left(X^2 - \left(e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)X + 1\right)\left(X^2 + \left(e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)X + 1\right) =$
$\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right)\left(X^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$
$\boxed{P(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)}$

Etape 2 : Décomposition en éléments simples :

On cherche a, b ,c, d tels que $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$.

On calcule :

$\frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} = \frac{(ax+b)(x^2+x+1)+(cx+d)(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1} = \frac{(a+c)x^3+(a+b-c+d)x^2+(a+b+c-d)x+(b+d)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b+d-c=0 \\ a+b+c-d=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow : \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=1 \\ a-c=-1 \\ b-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-1 \\ a+c=0 \\ 2b=1 \\ b=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-0{,}5 \\ c=0{,}5 \\ b=0{,}5 \\ d=0{,}5 \end{cases}$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples obtenues est :

$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} + \frac{0{,}5x+0{,}5}{x^2+x+1}$.

Etape 3 : Recherche de forme de dérivées connues :

On utilise les formules de dérivation suivantes :

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$\frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} = -0{,}25\,\frac{2x-2}{x^2-x+1} = -0{,}25\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-1}{(x-0{,}5)^2-0{,}25+1}\right]$$

$$\frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} = -0{,}25\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-1}{(x-0{,}5)^2+\frac{3}{4}}\right]$$

$$\frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} = -0{,}25\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3}\frac{-1}{\left(\frac{x-0{,}5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\right]$$

$$\frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} = -0{,}25\times\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-1}{3}\times\frac{-1}{\left(\frac{2(x-0{,}5)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\frac{-0{,}5x+0{,}5}{x^2-x+1} = -0{,}25\times\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{-2}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2(x-0{,}5)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Ainsi une primitive de $\frac{-0,5x+0,5}{x^2-x+1}$ est $-0,25\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{6}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-0,5\right)$

De la même façon, on peut écrire :

$$\frac{0,5x+0,5}{x^2+x+1}=0,25\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2(x+0,5)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Donc, une primitive de $\frac{0,5x+0,5}{x^2+x+1}$ est $0,25\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{6}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+0,5\right)$

Conclusion :

Les primitives de la fonction $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ sont les fonctions de la forme :

$-0,25\ln(x^2-x+1)+0,25\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{6}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-0,5\right)$

$+\frac{\sqrt{3}}{6}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+0,5\right)+C$ où C est un nombre réel.

j) $\int\frac{x}{(x+1)^3}dx$

Le dénominateur est déjà factorisé.

Etape 1 : Décomposition en éléments simples :

On cherche a, b ,c tels que $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+1}$.

On calcule : $\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+1}=\frac{a+b(x+1)+c(x+1)^2}{(x+1)^3}=\frac{cx^2+(b+2c)x+a+b+c}{(x+1)^3}$

Par identification, on obtient : $\begin{cases}c=0\\b+2c=1\\a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\b=1\\a=-1\end{cases}$:

Ainsi, la décomposition en éléments simples obtenues est :

$\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}$.

Etape 2 : Primitives de ces éléments simples :

$\int\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\frac{-1}{(x+1)^3}dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+C$

où C est un nombre réel.

k) $\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx$

<u>Etape 1 : Décomposition en éléments simples :</u>

Avant de commencer, il faut diviser $x^3 - 2x$ par x + 1 car le numérateur de la fraction rationnelle a un degré supérieur à celui du dénominateur.

$$\begin{array}{c|c}
x^3 - 2x & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-(x^3+u^2)} & x^2 - x - 1 \\
-x^2 - 2x & \\
\underline{-(-x^2 - x)} & \\
-x & \\
-(-x-1) & \\
1 &
\end{array}$$

On a donc $\frac{x^3-2x}{x+1} = x^2 - x - 1 + \frac{1}{x+1}$

<u>Etape 2 : Primitives de ces éléments simples :</u>

$\int \frac{x^3-2x}{x+1}dx = \int (x^2 - x - 1)dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) + C$

où C est un nombre réel.

l) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

<u>Etape 1 : Irréductibilité de $x^2 - 5x + 6$? :</u>

Il faut savoir pour commencer par déterminer si le polynôme du second degré $x^2 - 5x + 6$ est irréductible. Pour cela, on calcule $\Delta = 25 - 24 = 1$. $x^2 - 5x + 6$ admet donc deux racines : $X = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$ et $X = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$.

Donc $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

<u>Etape 2 : Décomposition en éléments simples :</u>

On remarque tout d'abord que le numérateur et le dénominateur de cette fraction ont le même degré.

On commence alors par écrire : $\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = \mathbf{1} + \frac{3}{x^2-5x+6}$ *(s' obtient "de tête" ou par division des deux polynômes).*

On cherche ensuite a, b tels que $\frac{3}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a-3b}{x^2-5x+6}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=0 \\ -2a-3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples obtenues est :

$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}=1+\frac{3}{x-3}+\frac{-3}{x-2}$.

<u>Etape 2 : Primitives de ces éléments simples :</u>

Il n'y a pas ici de difficultés particulières :

$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx=\int 1\,dx+\int \frac{3}{x-3}dx+\int \frac{-3}{x-2}dx=x+3ln(|x-3|)-3ln(|x-2|)+C$

où C est un nombre réel.

<u>Exercice 30</u>

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3(x)dx$

C'est un cas classique de fonctions trigonométriques dans lequel les changements de variables $t=\cos(x)$ ou $t=\sin(x)$ n'aboutissent pas.

On pose alors : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)=h^{-1}(x)$.

Ainsi pour le changement des bornes après le changement de variables, on calcule : $h^{-1}(0)=\tan(0)=0$ et $h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

A savoir par cœur, on aura alors : $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Ainsi, $\sin^3(x)dx=\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3\times\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{16t^3}{(1+t^2)^4}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(x)dx=\int_0^1\frac{16t^3}{(1+t^2)^4}dt$

Pour calculer cette intégrale, on utilise la méthode de décomposition en éléments simples :

Tout d'abord, $1+t^2$ est irréductible

On cherche a, b, c, d, e, f, g, h tels que $\frac{16t^3}{(1+t^2)^4}=\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{ct+d}{(1+t^2)^2}+\frac{et+f}{(1+t^2)^3}+\frac{gt+h}{(1+t^2)^4}$

Or $\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{ct+d}{(1+t^2)^2}+\frac{et+f}{(1+t^2)^3}+\frac{gt+h}{(1+t^2)^4}=\frac{(at+b)(1+t^2)^3+(ct+d)(1+t^2)^2+(et+f)(1+t^2)+gt+h}{(1+t^2)^4}=$

$\frac{(at+b)(1+3t^2+3t^4+t^6)+(ct+d)(1+2t^2+t^4)+(et+f)(1+t^2)+gt+h}{(1+t^2)^4}=$

$\frac{(at+b)(1+3t^2+3t^4+t^6)+(ct+d)(1+2t^2+t^4)+(et+f)(1+t^2)+gt+h}{(1+t^2)^4} =$

$\frac{at^7+bt^6+(3a+c)t^5+(3b+d)t^4+(3a+2c+e)t^3+(3b+d+f)t^2+(a+c+e+g)t+(b+d+f+h)}{(1+t^2)^4}$

Par identification, on a $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 3a + c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 3a + 2c + e = 16 \\ 3b + d + f = 0 \\ a + c + e + g = 0 \\ b + d + f + h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = d = f = h = 0 \\ e = 16 \\ g = -16 \end{cases}$

D'où $\frac{16t^3}{(1+t^2)^4} = \frac{-16t}{(1+t^2)^4} + \frac{16t}{(1+t^2)^3}$

On est à présent prêt à calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)dx = \int_0^1 \frac{16t^3}{(1+t^2)^4}dt = \int_0^1 \frac{-16t}{(1+t^2)^4}dt + \int_0^1 \frac{16t}{(1+t^2)^3}dt$$

$$= \left[\frac{-8}{2(1+t^2)^2} + \frac{8}{3(1+t^2)^3}\right]_0^1$$

(On peut avant cela effectuer le changement de variable $u = 1 + t^2$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)dx = \frac{-8}{2\times 4} + \frac{8}{3\times 8} - \left(\frac{-8}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{-24+8+96-64}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)} dx$

C'est un cas classique de fonctions trigonométriques dans lequel les changements de variables $t = \cos(x)$ ou $t = \sin(x)$ n'aboutissent pas.

On pose alors : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = h^{-1}(x)$.

Ainsi pour le changement des bornes après le changement de variables, on calcule : $h^{-1}(0) = \tan(0) = 0$ et $h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

A savoir par cœur, on aura alors : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ainsi, $\cos(x) + \sin(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}$

Donc $\frac{1}{\cos(x)+\sin(x)} = \frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{-t^2 + 2t + 1} \times \frac{2dt}{1 + t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{-t^2 + 2t + 1}$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise la méthode de décomposition en éléments simples :

Tout d'abord, on regarde si $-t^2 + 2t + 1$ admet des racines réelles (et donc est factorisable)

On calcule pour cela $\Delta = 4 - 4(-1) = 8$. L'équation admet deux solutions :

$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

On a donc : $-t^2 + 2t + 1 = -\left(t - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(t - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right) = -(t - 1 +$

2t−1−2

On cherche a et b tels que $\frac{2}{-t^2+2t+1} = \frac{-2}{(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} = \frac{a}{(t-1+\sqrt{2})} + \frac{b}{(t-1-\sqrt{2})}$

Or $\frac{a}{(t-1+\sqrt{2})} + \frac{b}{(t-1-\sqrt{2})} = \frac{a\left(t-1-\sqrt{2}\right)+b\left(t-1+\sqrt{2}\right)}{(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} = \frac{(a+b)t+a\left(-1-\sqrt{2}\right)+b\left(-1+\sqrt{2}\right)}{(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})}$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a\left(-1 - \sqrt{2}\right) + b\left(-1 + \sqrt{2}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a\left(-1 - \sqrt{2}\right) - a\left(-1 + \sqrt{2}\right) = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ -2\sqrt{2}a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où $\frac{2}{-t^2+2t+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(t-1+\sqrt{2})} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{(t-1-\sqrt{2})}$

On est à présent prêt à calculer l'intégrale :

$\int_0^1 \frac{2dt}{-t^2+2t+1} = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}/2}{(t-1+\sqrt{2})} + \frac{-\sqrt{2}/2}{(t-1-\sqrt{2})}\right) dt = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|t - 1 + \sqrt{2}\right|\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|t - 1 -\right.\right.\right.$

201=22ln2−22ln2−22ln2−1+22ln1+2=22ln1+22−1=22ln1+22−1

Remarque : la dernière valeur peut se simplifier : $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{2-1} =$

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$. Alors : $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^2\right] = \sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

f) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$

Par analogie avec le e), on pose $x = sh(u) = h(u)$.
On a donc $u = argsh(x) = h^{-1}(x)$
Ainsi, on changera les bornes après avoir calculer :
$h^{-1}(0) = argsh(0) = 0$ car $sh(0) = 0$ et $h^{-1}(1) = argsh(1) = 1+\sqrt{2}$:
Pour trouver cette valeur, il faut résoudre : $sh(u) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^u - e^{-u}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^u - e^{-u} = 2$
D'où $sh(u) = 1 \Leftrightarrow e^{2u} - 2e^u - 1 = 0$
On se ramène à une équation du second degré, en posant $X = e^u$: $X^2 - 2X - 1 = 0$
Le discriminant vaut $\Delta = 8$. L'équation admet deux solutions :
$X_1 = 1-\sqrt{2}$ et $X_2 = 1+\sqrt{2}$.
Donc $e^u = 1-\sqrt{2} < 0$ *ou* $e^u = 1+\sqrt{2} > 0$
L'équation $sh(u) = 1$ a donc une solution, $u = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = argsh(1)$
Pour le changement de variable : $x = sh(u)$ donc $dx = ch(u)du$
et $1 + x^2 = \sqrt{1+sh^2(u)} = \sqrt{ch^2(u)} = ch(u)$
L'intégrale à calculer devient alors :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} ch^2(u)du = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (e^{2u} + 2 + e^{-2u})du = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2u}}{2} + 2u + \frac{e^{-2u}}{-2}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

Petit calcul préalable :

$$e^{2\ln(1+\sqrt{2})} = e^{\ln(1+\sqrt{2})^2} = (1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Et, $e^{-2\ln(1+\sqrt{2})} = e^{\ln\left(\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right)} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-(2\sqrt{2})^2} =$
$\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3 - 2\sqrt{2}$

Revenons au calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2u}}{2} + 2u + \frac{e^{-2u}}{-2}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2\ln(1+\sqrt{2})}}{2} + 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{e^{-2\ln(1+\sqrt{2})}}{-2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^0}{2} + 2\times 0 + \frac{e^0}{-2}\right)$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2} + 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{3-2\sqrt{2}}{-2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$
$= \frac{4\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

g) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

On pose ici pour changement de variable : $x = 2t = h(t)$.
On a alors $t = \frac{x}{2} = h^{-1}(x)$
Les bornes 0 et 2 deviennent alors (on applique h^{-1}) : 0 et 1.
Et $dx = 2dt$; $x^2 = 4t^2$
D'où $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4t^2}} 2dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4(1-t^2)}} 2dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} 2dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$
Donc $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\mathrm{Arcsin}(t)]_0^1 = \mathrm{Arcsin}(1) - \mathrm{Arsin}(0) = \frac{\pi}{2} - 0.$

h) Primitives de $\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$

On cherche la forme canonique de $2x - x^2$ pour retrouver une fonction de la forme $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, dérivée de Arcsin(u).
$2x - x^2 = -(x^2 - 2x) = -[(x-1)^2 - 1] = 1 - (x-1)^2$
Cela nous amène à poser : $u = x - 1$. On a alors $x = u + 1$; $du = dx$ et
Ainsi : $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int \frac{u+1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du + \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2u}{2\sqrt{1-u^2}}$ est la dérivée de $-\sqrt{1-u^2}$
Ainsi :
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx = -\sqrt{1-u^2} + Arcsin(u) + C = -\sqrt{1-(x-1)^2} + Arcsin(x-1) + C$$
où C est un nombre réel.

i) Primitives de $\frac{1}{\mathrm{Ch}x}$

$\frac{1}{Chx} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$ .On prend ici pour changement de variable : $t = e^x$.
On a alors : : $dt = e^x dx$ d'où $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$.
On a alors :
$$\int \frac{1}{Chx} dx = \int \frac{2dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{2dt/t}{t+1/t} = \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2\, arctan(t) + C = 2\, arctan(e^x) + C$$
où C est un nombre réel.

k) Primitives de $\frac{1}{xln(x)}$

$\frac{1}{xln(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{ln\,(x)}$: est de la forme $\frac{u'}{u}$

On pose alors : $u = ln\,(x)$. On a alors $du = \frac{dx}{x}$

Ainsi, $\int \frac{1}{xln(x)} dx = \int \frac{1}{ln(x)} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = ln(|u|) + C = ln(|ln\,(x)|)$+C où C est un nombre réel.

l) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

On pose $x = u^2 = h(u)$. Ainsi, $u = \sqrt{x} = h^{-1}(x)$.

Les bornes de l'intégrales 0 et 1 deviennent alors $h^{-1}(0) = \sqrt{0} = 0$ et $h^{-1}(1) = \sqrt{1} = 1$.

On a aussi $dx = 2udu$.

On a alors : $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+u} 2udu = \int_0^1 \frac{2u^3+2u}{1+u} du$

Pour calculer cette intégrale, il faut diviser $2u^3 + 2u$ par $1 + u$ car le numérateur de la fraction rationnelle a un degré supérieur à celui du dénominateur :

$$\begin{array}{c|l}
2u^3 + 2u & 1 + u \\ \cline{2-2}
-(2u^3 + 2u^2) & 2u^2 - 2u + 4 \\
-2u^2 + 2u & \\
-(-2u^2 - 2u) & \\
4u & \\
-(4u + 4) & \\
-4 &
\end{array}$$

On a donc $\frac{2u^3+2u}{1+u} = 2u^2 - 2u + 4 - \frac{4}{1+u}$

Ainsi, $\int_0^1 \frac{2u^3+2u}{1+u} du = \int_0^1 \left(2u^2 - 2u + 4 - \frac{4}{1+u}\right) du = [\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u - 4\ln(1+u)]_0^1$

$$= \frac{2}{3} - 1 + 4 - 4\ln 2 - (0 - 4\ln 1) = \frac{11}{3} - 4\ln 2$$

o) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}dx$

On pose comme changement de variable : $u = \sqrt{4x+2} = h^{-1}(x)$.
Les bornes 1 et 4 se changent alors en $h^{-1}(1) = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$ et
$h^{-1}(4) = \sqrt{16+2} = \sqrt{18}$.
On a alors $u^2 = 4x+2$ donc $x = \frac{u^2-2}{4}$ et $du = \frac{4dx}{2\sqrt{4x+2}} = \frac{2dx}{\sqrt{4x+2}}$.

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}dx = \int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} \frac{u^2-2}{8}du = [\frac{u^3}{24} - \frac{1}{4}u]_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} = \frac{18\sqrt{18}}{24} - \frac{1}{4}\sqrt{18} - \frac{6\sqrt{6}}{24} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}dx = \frac{18\sqrt{18}}{24} - \frac{1}{4}\sqrt{18} - \frac{6\sqrt{6}}{24} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{18}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{18} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

p) $\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$

On pose comme changement de variable : $u = \sqrt{1+x} = h^{-1}(x)$.
Les bornes 2 et 3 se changent alors en $h^{-1}(2) = \sqrt{3}$ et $h^{-1}(3) = \sqrt{4} = 2$.
On a alors $u^2 = 1+x$ donc $dx = 2udu$ et $\frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \frac{2udu}{(u^2-1)u} = \frac{2du}{u^2-1}$

$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{u^2-1}du$$

On effectue une décomposition en éléments simples de $\frac{2}{u^2-1}$ sachant que
$u^2-1 = (u-1)(u+1)$: On cherche a et b tels que $\frac{2}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$

$$\frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} = \frac{a(u+1)+b(u-1)}{(u-1)(u+1)} = \frac{(a+b)u+a-b}{u^2-1}$$

Par identification, on a $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{u^2-1}du = \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = [ln(|u-1|) - ln(|u+1|)]_{\sqrt{3}}^2$

$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = [ln(|u-1|) - ln(|u+1|)]_{\sqrt{3}}^2$$

$$= ln(1) - ln(3) - ln(\sqrt{3}-1) + ln(\sqrt{3}+1) = ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - ln\ (3)$$

Remarque : pour simplifier le résultat : $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3-1} = 2+\sqrt{3}$

Donc $\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$

q) Primitives de $\frac{1}{\cos(x)\times\sin(x)}$

C'est un cas classique de fonctions trigonométriques dans lequel les changements de variables $t = \cos(x)$ ou $t = \sin(x)$ n'aboutissent pas.

On pose alors : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = h^{-1}(x)$.

A savoir par cœur, on aura alors : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ainsi, $\frac{dx}{\cos(x)\times\sin(x)} = \frac{2}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}$

Pour déterminer les primitives, on utilise la méthode de décomposition en éléments simples :

Tout d'abord, $t(1-t^2) = t(1-t)(1+t)$

On cherche a, b et c tels que $\frac{1}{t(1-t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$

Or $\frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t} = \frac{a(1-t^2)+bt(1+t)+ct(1-t)}{t(1-t^2)} = \frac{t^2(-a+b-c)+t(b+c)+a}{t(1-t^2)}$

Par identification, on a $\begin{cases} -a+b-c=1 \\ b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-c=2 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=-1 \end{cases}$

D'où $\frac{1}{t(1-t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} + \frac{-1}{1+t}$

On est à présent prêt à trouver les primitives :

$$\int \frac{dx}{\cos(x)\times\sin(x)} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} + \frac{-1}{1+t}\right) dt$$
$$= \ln(|t|) - \ln(|1-t|) - \ln(|1+t|) + C$$

Les primitives de $\frac{1}{\cos(x)\times\sin(x)}$ sont les fonctions :

$\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C$ avec C réel.

r) Primitives de $\frac{1}{ch(x)\times sh(x)}$

$$\frac{1}{ch(x)\times sh(x)} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} = \frac{4}{e^{2x}-e^{-2x}}$$

On pose comme changement de variable : $u = e^{2x}$.

On a donc $du = 2e^{2x}dx$ donc $dx = \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{du}{2u}$

On a donc $\int \frac{dx}{ch(x)\times sh(x)} = \int \frac{4}{u-\frac{1}{u}} \times \frac{du}{2u} = \int \frac{2}{u^2-1} du$

On utilise ensuite la méthode de décomposition en éléments simples :

On cherche a et b tels que $\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$

Or $\frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} = \frac{a(u+1)+b(u-1)}{u^2-1} = \frac{u(a+b)+a-b}{u^2-1)}$

Par identification, on a $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

D'où $\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$

On est à présent prêt à trouver les primitives :

$$\int \frac{dx}{ch(x) \times sh(x)} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln(|u-1|) - \ln(|u+1|) + C$$

Les primitives de $\frac{1}{ch(x)\times sh(x)}$ sont les fonctions :

$\ln(|1-e^{2x}|) - \ln(|1+e^{2x}|) + C$ avec C réel.

Remarque : $\frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Donc $\ln(|1-e^{2x}|) - \ln(|1+e^{2x}|) + C = \ln(|th(x)|) + C$, avec C réel

Exercice 31

a) Sur $[0;\frac{\pi}{4}]$, tan (x) est positif donc $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

On peut faire un changement de variable : $u = \cos(x) = h^{-1}(x)$.

On a alors, $du = -\sin(x)dx$ et les bornes 0 et $\frac{\pi}{4}$ se changent en $h^{-1}(0) = \cos(0) = 1$ et $h^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan(x)\, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u} = [-ln(|u|)]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + ln(1)$

$A = -ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$

b) Sur $[1;5]$, $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ est positif donc $B = \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

On peut faire un changement de variable : $u = \sqrt{x-1} = h^{-1}(x)$.

On a alors, $x = u^2 + 1$; $dx = 2udu$ et les bornes 1 et 5 se changent en $h^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = 0$ et $h^{-1}(5) = \sqrt{5-1} = 2$.

Ainsi, $B = \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int_0^2 \frac{u}{u^2+1} 2udu = 2\int_0^2 \frac{u^2}{u^2+1} du = 2\int_0^2 \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du$

$B = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du = 2[u - \arctan(u)]_0^2$

$$B = 2(2-\arctan(2)) - 2(0-\arctan(0)) = 4 - 2\arctan(2)$$

…………………………………………..

g) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

On pose ici pour changement de variable : $x = 2t = h(t)$.

On a alors $t \; = \frac{x}{2} = h^{-1}(x)$

Les bornes 0 et 2 deviennent alors (on applique h^{-1}) : 0 et 1.

Et $dx = 2dt$; $x^2 = 4t^2$

D'où $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4t^2}}2dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4(1-t^2)}}2dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}2dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Donc $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [Arcsin(t)]_0^1 = Arcsin(1) - Arsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

m) Primitives de $(x+2)\sin(x^2+4x-6)$

On pose $u = x^2 + 4x - 6$ et $du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$

On a donc : $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(u)\,du = \frac{-1}{2}\cos(u) + C$

$= \frac{-1}{2}\cos(x^2+4x-6) + C$.