

UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

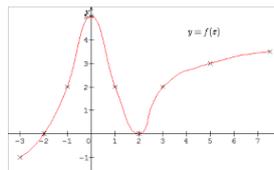
Alessandra Frabetti et Léon Matar Tine

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

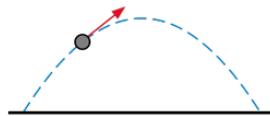
<http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/>

But du cours

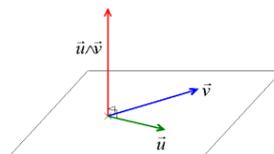
Minima et maxima locaux
(graphe de fonction)



Équations différentielles
(trajectoire d'un projectile)



Bases du calcul vectoriel
(produit vectoriel)



Symétries
(rotation et réflexion)



Pour celà: nombres complexes, graphes, dérivées, primitives, vecteurs, matrices, géométrie cartésienne...

Programme du cours

Partie I : Fonctions et équations différentielles

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes	p.1
Ch. 2 – Fonctions, graphes, réciproques	p.11
Ch. 3 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor	p.29
Ch. 4 – Primitives et intégrales	p.41
Ch. 5 – Équations différentielles	p.53

Partie II : Vecteurs, transformations linéaires et géométrie

Ch. 6 – Espaces vectoriels et vecteurs	p.65
Ch. 7 – Transformations linéaires et matrices	p.77
Ch. 8 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace	p.93

TMB – Chapitre 1

Nombres complexes

Dans ce chapitre:

1. Nombres complexes (conjugués, opérations).
2. Représentation polaire (module, argument, exponentiel complexe).
3. Polynômes complexes (racines, factorisation).

1. Nombres complexes

Définition: Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels et i est un symbole ayant la propriété $i^2 = -1$, qui s'appelle **unité imaginaire**.

Attention: i n'est pas un nombre réel.

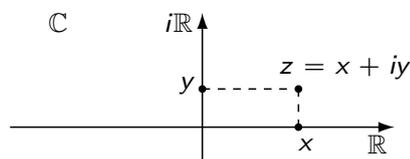
Exemples: $3 + 2i$, **zéro** $0 = 0 + i0$, **un** $1 = 1 + i0$.

- On note $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ l'**ensemble des nombres complexes**. Il contient deux sous-ensembles:

les nombres réels: $\mathbb{R} = \{x = x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}$;

les nombres **imaginaires purs**: $i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- L'ensemble \mathbb{C} se représente comme **plan complexe**:



Parties réelle et imaginaire, conjugué complexe

Définition: Pour un nombre complexe $z = x + iy$, on appelle:

- **partie réelle** le nombre réel $\boxed{\operatorname{Re}(z) = x}$
- **partie imaginaire** le nombre réel $\boxed{\operatorname{Im}(z) = y}$
- **conjugué complexe** le nombre complexe $\boxed{\bar{z} = x - iy}$

Exemples –

- Pour $z = 3 - 2i$: $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = -2$, $\bar{z} = 3 + 2i$.
- Le conjugué d'un réel $z = \sqrt{2}$ est lui-même: $\bar{z} = \sqrt{2}$.
- Le conjugué d'un imaginaire pur $z = 5i$ est son opposé: $\bar{z} = -5i$.

Égalité et opérations entre nombres complexes

Définition: Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$ deux complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **égalité:** $z = w$ si et seulement si $x = u$ et $y = v$
- **addition:** $z + w = (x + u) + i(y + v)$
- **soustraction:** $z - w = (x - u) + i(y - v)$
- **produit par un scalaire:** $\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$
- **multiplication:** $z w = xu + iy u + ix v + i^2 y v = (xu - yv) + i(xv + yu)$
- **division:** $\frac{z}{w} = \frac{z \bar{w}}{w \bar{w}} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$
- **puissance entière positive:** $z^n = z \times z \times z \times \cdots \times z$ n fois
- **puissance entière négative:** $z^{-n} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \cdots \times \frac{1}{z}$ n fois
- **racines n-ième:** c'est tout nombre complexe δ tel que $\delta^n = z$.
Attention: il y en a n distinctes.

Propriétés des opérations

Propriétés: Les opérations dans \mathbb{C} ont les mêmes propriétés que leurs opérations analogues dans \mathbb{R} .

Soient z et w deux nombres complexes. Alors:

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$
- si $w \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ et $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
- $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ est toujours un réel positif ou nul.

Exemples: opérations entre nombres complexes

Exemples: Soient $z = 2(3 + 2i)$ et $w = 5 - i$. Alors:

$$z + w = (6 + 4i) + (5 - i) = 11 + 3i$$

$$z - w = (6 + 4i) - (5 - i) = 1 + 5i$$

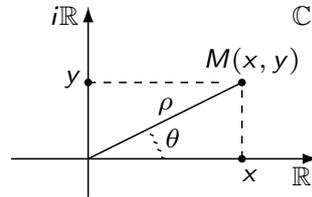
$$\begin{aligned}zw &= 2(3 + 2i)(5 - i) \\ &= 2(15 - 3i + 10i - 2i^2) \\ &= 2((15 + 2) + (-3 + 10)i) \\ &= 2(17 + 7i) = 34 + 14i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{2(3 + 2i)}{5 - i} = \frac{2(3 + 2i)(5 + i)}{25 + 1} \\ &= \frac{2(15 - 2 + 10i + 3i)}{26} \\ &= \frac{13}{13} + \frac{13}{13}i = 1 + i\end{aligned}$$

2. Module et argument

Définition: On identifie le plan complexe \mathbb{C} avec le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle alors:

- **affixe complexe** d'un point $M(x,y)$ le nombre complexe $z = x + iy$
- **module** de z la distance $|z| = \text{dist}(M, O) = \rho$
- **argument** de z l'angle θ par rapport à l'axe des réels (voir figure):



Propriétés: On a alors:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$
- $\text{Re}(z) = x = \rho \cos \theta$ et $\text{Im}(z) = y = \rho \sin \theta$
- $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$

Exercice: module et argument

Exercice: Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

- $z = -1 - i$

Réponse: Le module est $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. L'argument est un angle θ tel que

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Par exemple, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ est un argument de z .

- $z = 5 - 3i$

Réponse: Le module est $|z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$. L'argument est un angle θ tel que

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{-3}{\sqrt{34}}.$$

De cet angle on peut dire (sans calculatrice) que $\tan \theta = -3/5$.

Propriétés du module

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le **module** de z est donc $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés:

- $|z| \geq 0$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ est la valeur absolue du réel z
- $|-z| = |z|$;
- $z\bar{z} = |z|^2$ par conséquent $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = \lambda z_2$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, i.e. $\begin{cases} |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| & \text{si } |z_1| \geq |z_2|, \\ |z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1| & \text{si } |z_1| \leq |z_2|. \end{cases}$

Exponentiel complexe

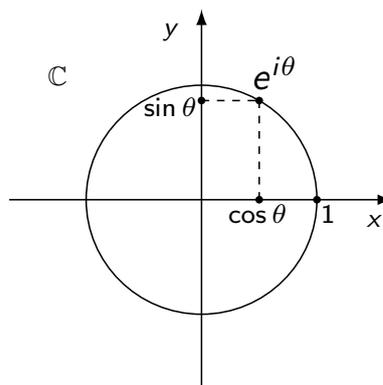
Définition: L'exponentiel complexe d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ est le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Exemples: $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Propriétés:

- $e^{i\theta}$ est **périodique** de **période** 2π , i.e. $e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta}$
pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe **unitaire**, i.e. $|e^{i\theta}| = 1$

- le point $M(e^{i\theta})$ se trouve sur le **cercle unitaire** $x^2 + y^2 = 1$



Représentation polaire

Théorème: Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la **forme polaire**

$$z = \rho e^{i\theta}, \text{ où } \rho = |z|.$$

En effet: $z = x + iy = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$.

Propriétés: Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $w = r e^{i\varphi}$ deux nombres complexes en forme polaire. On a alors:

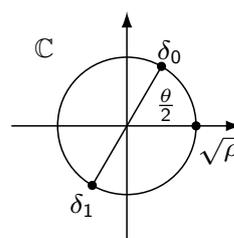
- **produit:** $z w = (\rho r) e^{i(\theta+\varphi)}$,
- **puissance entière positive:** $z^n = \rho^n e^{in\theta}$, où $n \in \mathbb{N}$
- **puissance entière négative:** $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\rho^n} e^{-in\theta}$ si $\rho \neq 0$,
- **racines n -ièmes:** $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ où $k = 0, 1, \dots, n-1$
(Attention: il y a n distinctes racines n -ièmes!).
- **formule de Moivre:** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
i.e. $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Racines carrées et cubiques d'un nombre complexe

- Les **racines carrées** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours deux, δ_0 et δ_1 :

$$\delta_k = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}, \quad k = 0, 1$$

c-à-d $\delta_0 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\delta_1 = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$



Propriété: On a $\delta_1 = -\delta_0$.

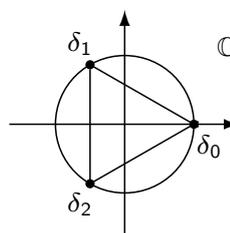
- Les **racines cubiques** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours trois:

$$\delta_k = \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2$$

Propriété: Si une racine cubique est réelle, les autres deux sont conjugués complexes.

Exemple: Si $\theta = 0$ et $\delta_0 = \sqrt[3]{\rho}$, on a

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{\delta_1}$$



Exercice: racine carrée de nombres complexes

Exercice: Calculer les racines carrées des complexes suivants:

- $z = 1 + i\sqrt{3}$

Réponse: On écrit z en forme polaire: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors:

$$\delta_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$\delta_1 = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

- $z = 15 - 8i$

Réponse: Puisque on ne connaît pas la forme polaire de z , on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = z = 15 - 8i$

(et donc aussi $|\delta^2| = x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{225 + 64} = 17$):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -\frac{4}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

On a donc $\delta_0 = 4 - i$ et $\delta_1 = -4 + i$.

3. Polynômes complexes

Définition: Un **polynôme complexe** est un polynôme

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ avec coefficients complexes, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. (Peu importe X , c'est une variable.)

Le **degré** de $P(X)$ est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

Exemples: $iX^3 + (5 - i)X$ est un polynôme de degré 3
 $i \sin(X^3) + 5X$ n'est pas un polynôme

Définition: Une **factorisation** d'un polynôme $P(X)$ est l'écriture

$$P(X) = Q_1(X) Q_2(X) \cdots Q_l(X)$$

comme produit de polynômes de degré inférieur à celui de $P(X)$.

Exemple: $iX^3 + (5 - i)X = iX(X^2 - 1 - 5i)$

Définition: Un polynôme $P(X)$ est **irréductible** [dans \mathbb{C} resp. \mathbb{R}] s'il ne se factorise pas [dans \mathbb{C} resp. \mathbb{R}].

Exemples: $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ n'est pas irréductible

$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est irréductible dans \mathbb{R} mais pas dans \mathbb{C} .

Racines des polynômes

Définition: Une **racine** d'un polynôme complexe $P(X)$ est un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Exemple: $z = i$ et $z = -i$ sont racines de $X^2 + 1$

Lemme: Si z est une racine de $P(X)$, alors il existe un entier $m \geq 1$ et un polynôme $Q(X)$ tels que

$$P(X) = (X - z)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(z) \neq 0.$$

On appelle m la **multiplicité** de la racine z .

Théorème de d'Alembert-Gauss: Tout polynôme complexe $P(X)$ de degré d se factorise comme

$$P(X) = z_0(X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_l)^{m_l}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$, z_1, \dots, z_l sont les racines de $P(X)$ et $m_1 + \cdots + m_l = d$.

Par conséquent:

- Tout polynôme complexe de degré d admet d racines.
- Seuls les polynômes complexes $a_1X + a_0$ sont irréductibles.

Racines d'un polynôme complexe de degré 2

Proposition: Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, à coefficients complexes, sont

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \in \mathbb{C}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Par conséquent: Le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$

- une racine double $z = -b/2a$ si $\Delta = 0$,
- deux racines distinctes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$.

Exercice: équation complexe de degré 2

Exercice: Résoudre l'équation $z^2 - (1 + i)z + 6 - 2i = 0$.

Réponse: Les solutions de cette équation sont $z = \frac{1 + i \pm \delta}{2}$, où il faut trouver $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta^2| = |\Delta|$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2) + i2xy &= (1 + i)^2 - 4(6 - 2i) \\ &= 1 + 2i - 1 - 24 + 8i = -24 + 10i \\ x^2 + y^2 &= 2|-12 + 5i| = 2\sqrt{144 + 25} = 2 \times 13 = 26\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ 2xy = 10 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 5/x = \pm 5 \end{cases}$$

et par conséquent $\delta = \pm(1 + 5i)$. On a donc

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1 + i + (1 + 5i)}{2} = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i \\ z_2 &= \frac{1 + i - (1 + 5i)}{2} = \frac{0 - 4i}{2} = -2i\end{aligned}$$

Racines complexes d'un polynôme réel

Proposition: Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de $P(X)$ de multiplicité m , alors son conjugué \bar{z} est aussi une racine de $P(X)$, de même multiplicité m .

Exemple: Le polynôme réel $X^2 + 1$ a comme racines $\pm i$, où $-i = \bar{i}$.

Par conséquent:

- Puisque $z = \bar{z}$ seulement si $z \in \mathbb{R}$, tout polynôme réel de degré impair $d \geq 3$ admet au moins une racine réelle.
- Les polynômes réels irréductibles sont de degré 1 ou 2, c'est-à-dire qu'ils sont de la forme $a_1X + a_0$ ou bien $a_2X^2 + a_1X + a_0$.
- Tout polynôme réel irréductible de degré 2 admet deux racines complexes conjuguées, z et \bar{z} .

Exemple: Le polynôme $X^2 - 4X + 5$ est irréductible dans \mathbb{R} , car $\Delta = 16 - 20 < 0$, mais a deux racines complexes $2 + i$ et $2 - i = \overline{2 + i}$.

Exercice: factorisation d'un polynôme réel

Exercice: Factoriser le polynôme $P(X) = X^6 - \sqrt{2}X^3 + 1$ en polynômes réels irréductibles.

Réponse: La procédure est en deux étapes:

Étape 1) On factorise $P(X)$ dans \mathbb{C} en produit de six polynômes de degré 1,

$$P(X) = (X - z_0)(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4)(X - z_5),$$

où z_0, \dots, z_5 sont les six solutions de l'équation $z^6 - \sqrt{2}z^3 + 1 = 0$ (*).

Pour cela, on pose $w = z^3$. Alors (*) donne $w^2 - \sqrt{2}w + 1 = 0$ et on trouve deux solutions

$$w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad w_2 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Alors, l'éq. $z^3 = w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ a trois solutions $z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$ pour $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_2 = -i,$$

et l'éq. $z^3 = w_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ a trois solutions $z_{3+k} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$ pour $k = 0, 1, 2$:

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \quad z_4 = i, \quad z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Au final, on a donc la factorisation de $X^6 - \sqrt{2}X^3 + 1$ en six polynômes complexes de degré 1.

Exercice: factorisation d'un polynôme réel (suite)

Étape 2) Les six solutions sont deux à deux conjuguées: on multiplie deux à deux les polynômes $(X - z_k)(X - \bar{z}_k)$ correspondants aux nombres complexes conjugués, et on obtient des polynômes réels irréductibles de degré 2:

$$\begin{aligned} X^6 - \sqrt{2}X^3 + 1 &= (X - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})(X + i) \\ &\quad (X - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})(X - i)(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ &= \left(\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) \left(\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) (X^2 + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1) (X^2 + \sqrt{3}X + 1) (X^2 + 1). \end{aligned}$$

Au final on a la factorisation souhaitée en polynômes réels irréductibles.

TMB – Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre:

1. Fonctions usuelles.
2. Graphes des fonctions.
3. Fonctions croissantes, décroissantes, monotônes. Fonctions paires et impaires.
4. Opérations entre fonctions: addition, multiplication, composition.
5. Fonctions réciproques.

1. Fonctions réelles

Définition: Une **fonction (réelle)** est une "loi" qui associe à tout $x \in \mathbb{R}$ au maximum une valeur $y \in \mathbb{R}$, qu'on note $y(x)$ car elle dépend de x . Une fonction est aussi notée

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

- Le **domaine (de définition)** d'une fonction f est l'ensemble

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}, \text{ i.e. la valeur } f(x) \text{ est bien définie}\}$$

- L'**image** d'une fonction f est l'ensemble

$$I_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ pour un } x \in D_f\}$$

Attention: une loi qui associe à $x \in \mathbb{R}$ deux valeurs distinctes $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (ou plus) n'est pas une fonction.

Exemples:

- La loi $f(x) = x^2$ est une fonction de domaine $D_f = \mathbb{R}$ et image $I_f = \mathbb{R}^+$.
- La loi $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction de domaine $D_f = \mathbb{R}^+$ et image $I_f = \mathbb{R}^+$.
- La loi $f(x) = \pm\sqrt{x}$ n'est pas une fonction, ex. $f(4) = +2$ ou bien -2 .

Polynômes, fractions, racines

Définition: On appelle “usuelles” les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes:

- **fonctions polynomiales**, abrégé en “polynômes”:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{R}, \text{ avec } D_f = \mathbb{R}.$$

- **fractions rationnelles**, abrégé en “fractions”: ce sont les quotients de polynômes $a(x)$ et $b(x)$

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \quad \text{avec } D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid b(x) \neq 0\}.$$

- **fonctions radicales**, abrégé en “racines”: ce sont les racines k -ièmes de polynômes $a(x)$, pour $k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sqrt[k]{a(x)} \quad \text{défini par } f(x)^k = a(x)$$

avec domaine $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} a(x) \in \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair} \\ a(x) \in \mathbb{R}^+ & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \right\}.$

Fonctions circulaires

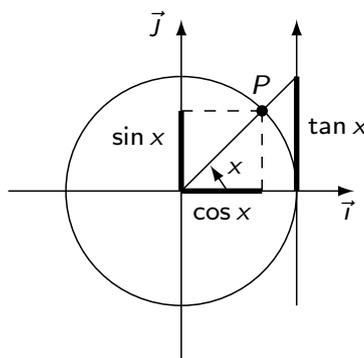
- **cosinus** $f(x) = \cos x$ avec $D_{\cos} = \mathbb{R}$ et $I_{\cos} = [-1, 1]$

- **sinus** $f(x) = \sin x$ avec $D_{\sin} = \mathbb{R}$ et $I_{\sin} = [-1, 1]$

où $(\cos x, \sin x)$ sont les coordonnées du point P qui se trouve sur le cercle unitaire à angle x mesuré dans le sens antihoraire depuis l'axe de direction \vec{i} .

Puisque le cercle a équation $X^2 + Y^2 = 1$, si on pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$ on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$



- **tangente** $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ avec

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et } I_{\tan} = \mathbb{R}$$

Formulaire sur les fonctions circulaires 1

- **Valeurs particulières:**

$\cos(0) = 1$	$\sin(0) = 0$	$\tan(0) = 0$
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$	$\sin(\pi/6) = 1/2$	$\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$
$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$\tan(\pi/4) = 1$
$\cos(\pi/3) = 1/2$	$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$	$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$
$\cos(\pi/2) = 0$	$\sin(\pi/2) = 1$	$\tan(\pi/2) = \pm\infty$
$\cos(\pi) = -1$	$\sin(\pi) = 0$	$\tan(\pi) = 0$
$\cos(3\pi/2) = 0$	$\sin(3\pi/2) = -1$	$\tan(3\pi/2) = \pm\infty$

- **Periodicité:** pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

- **Egalité:**

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\iff x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -y + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \sin y &\iff x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -y + (2k + 1)\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = \tan y &\iff x = y + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- **Identité circulaire:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

- **Expression de $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\cos x$:**

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \tan x = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

- **Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan(x/2)$:**

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

- **Formule de puissance (Moivre):** $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formulaire sur les fonctions circulaires 2

- **Formules d'addition:**

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

- **Formules de duplication:**

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.\end{aligned}$$

- **Formules de linéarisation:**

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) & \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) & \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) & \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\end{aligned}$$

- **Formules de factorisation:**

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

- **Formules relatives aux angles associés:**

Angles opposés:

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

Angles supplémentaires:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

Angles complémentaires:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

Angles "de différence π ":

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \quad \tan(x + \pi) = \tan x.$$

Fonctions arc

- **arccosinus** $f(x) = \arccos x$

$\arccos x$ est l'angle compris entre 0 et π qui a x comme cosinus, c.-à-d.
 $\arccos x = \theta \Leftrightarrow x = \cos \theta$ et $\theta \in [0, \pi]$, alors

$$D_{\arccos} = [-1, 1] \quad \text{et} \quad I_{\arccos} = [0, \pi]$$

- **arcsinus** $f(x) = \arcsin x$

$\arcsin x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme sinus, c.-à-d.
 $\arcsin x = \theta \Leftrightarrow x = \sin \theta$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors

$$D_{\arcsin} = [-1, 1] \quad \text{et} \quad I_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

- **arctangente** $f(x) = \arctan x$

$\arctan x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme tangente, c.-à-d.
 $\arctan x = \theta \Leftrightarrow x = \tan \theta$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors

$$D_{\arctan} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_{\arctan} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Exponentiel

- La **fonction exponentielle**, abrégé en "exponentiel", de base le **nombre de Néper** (de Euler et Napier, XVII s.)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2,7182$$

est la fonction $f(x) = e^x = \exp(x)$ qui peut être définie de plusieurs façons (voir les prochains chapitres pour comprendre):

- c'est la seule fonction continue qui transforme une somme en produit, $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$, et qui vaut e en $x = 1$;
- c'est la seule solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ qui vaut 1 en $x = 0$;
- iii) comme somme de série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

On a $D_{\exp} = \mathbb{R}$ et $I_{\exp} =]0, \infty[$.

Logarithme

- La **fonction logarithme naturel**, abrégé en “logarithme”, est la fonction

$f(x) = \ln x$ qui donne l'exposant à l'exponentiel pour obtenir x , c'est-à-dire telle que $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

Elle peut également être définie des façons suivantes (voir les prochains chapitres pour comprendre):

- i) c'est la seule fonction continue qui transforme un produit en somme, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, et qui vaut 1 en $x = e$;
- ii) c'est la seule primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui vaut 0 en $x = 1$.

On a $D_{\ln} =]0, \infty[$ et $I_{\ln} = \mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques

- **cosinus hyperbolique** $f(x) = \operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ avec

$D_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}$ et $I_{\operatorname{ch}} = [1, \infty[$

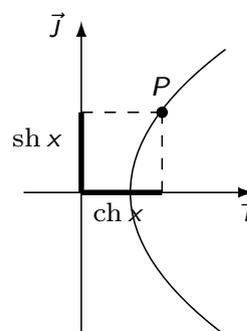
- **sinus hyperbolique** $f(x) = \operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ avec

$D_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$ et $I_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$

On a

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

donc $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ sont les coordonnées des points P qui se trouvent sur la branche droite de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$



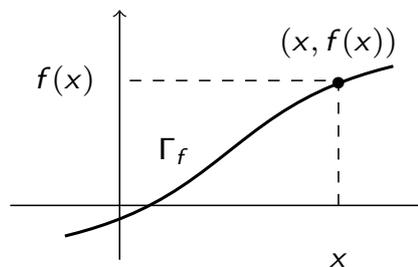
- **tangente hyperbolique**

$f(x) = \operatorname{th} x = \tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ avec $D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$ et $I_{\operatorname{tan}} =]-1, 1[$

2. Graphe de fonctions

Définition: Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des points du plan

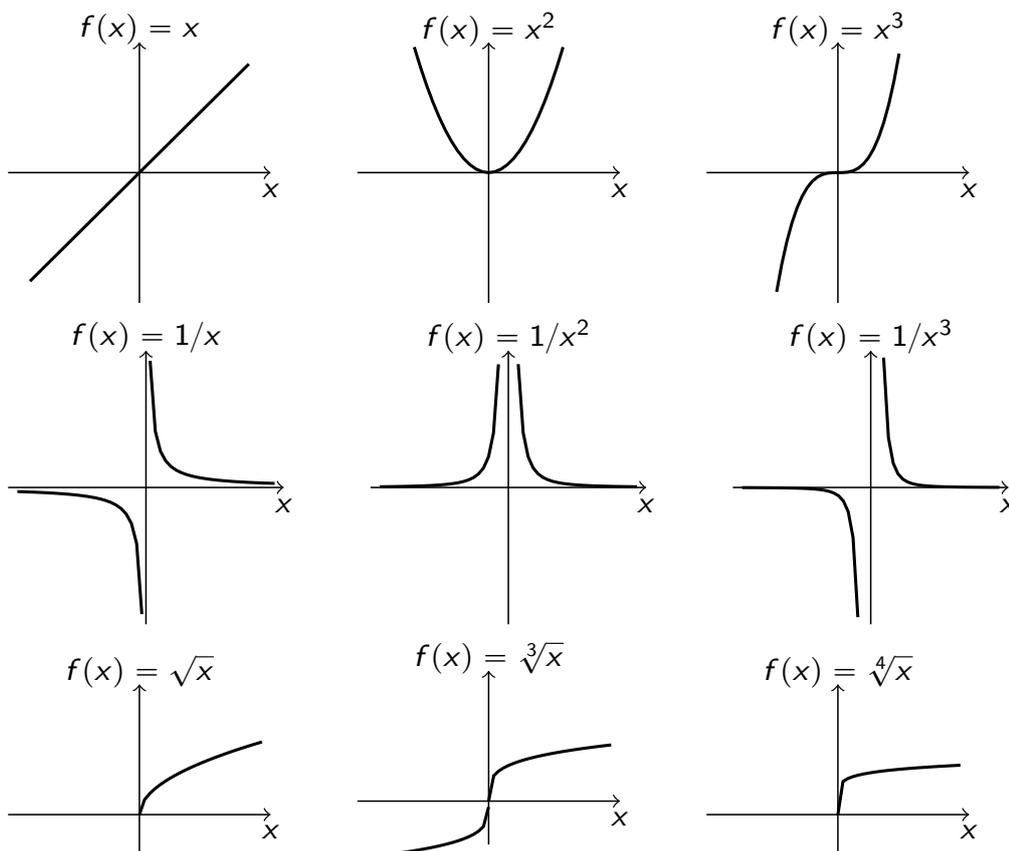
$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f, y = f(x) \right\} \\ &= \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \right\} \subset \mathbb{R}^2\end{aligned}$$



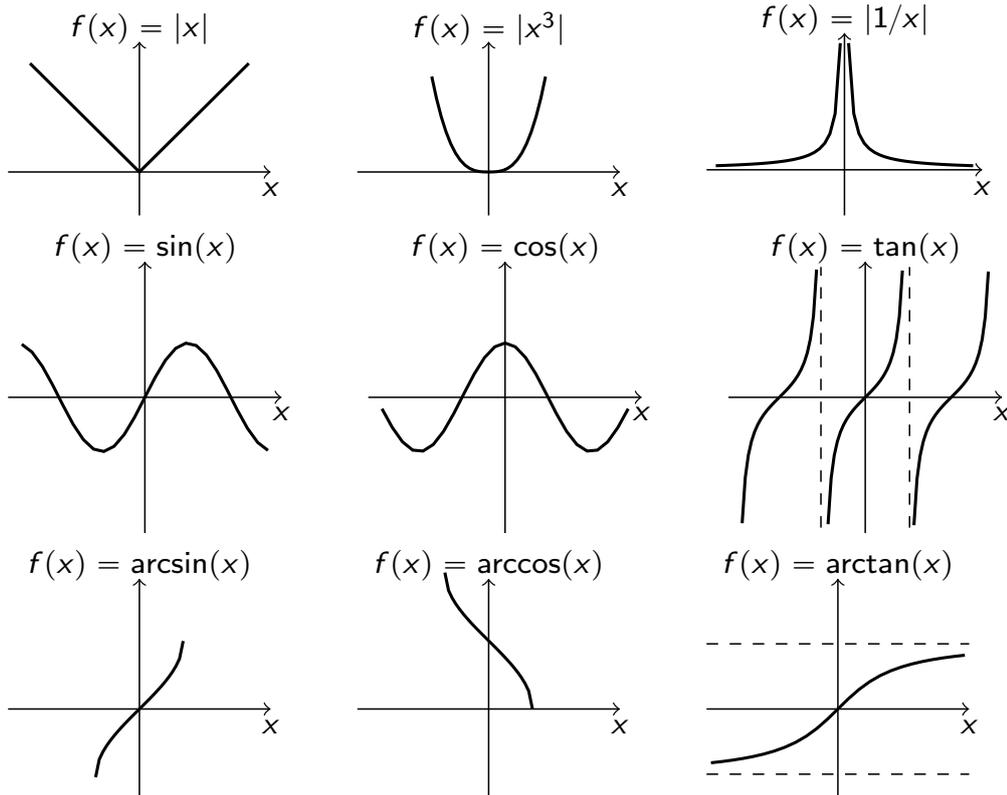
En regardant le graphe d'une fonction on peut déduire quel est son domaine, son image et ses propriétés importantes.

Le graphe des fonctions usuelles est à connaître par cœur.

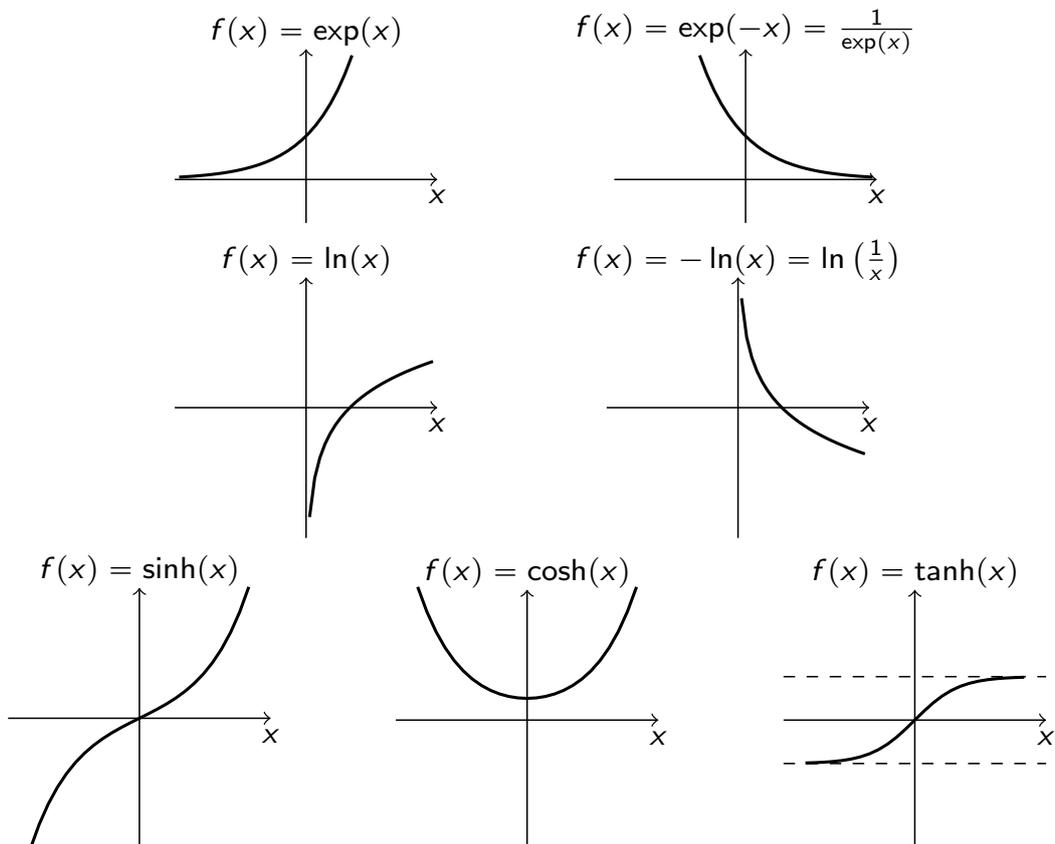
Graphes à connaître !



D'autres graphes à connaître !



D'autres encore... ouf !



3. Fonctions croissantes, décroissantes, monotônes

La première propriété qu'on voit sur le graphe est la croissance.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

- f est **(strictement) croissante sur D** si $f(x) < f(y)$ pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$. 
- f est **(strictement) décroissante sur D** si $f(x) > f(y)$ pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$. 
- f est **constante sur D** si $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in D$. 

Si on n'indique pas l'ensemble D , on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f .

- f est **(strictement) monotône** si elle est partout croissante ou partout décroissante sur D_f .

L'appellatif "strictement" peut être remplacé par "largement" si on considère des inégalités larges \leq et \geq .

S'il est sous-entendu on considère les inégalités strictes $<$ et $>$.

Exemple de fonctions monotônes

Exemples:

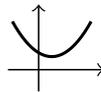
- Les polynômes x^n sont monotônes croissants seulement si n est impair.
Si n est pair, ils sont décroissants pour $x < 0$ et croissants pour $x > 0$.
- Les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont monotônes décroissantes seulement si n est impair.
Si n est pair, elles sont croissantes pour $x < 0$ et décroissantes pour $x > 0$.
- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont monotônes croissantes.
- Les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ ne sont pas monotônes (elles sont **oscillantes**). La tangente $\tan x$ est monotône croissante.
- Les fonctions $\arcsin x$ et $\arctan x$ sont monotônes croissantes, alors que $\arccos x$ est monotône décroissante.
- L'exponentiel e^x et le logarithme $\ln x$ sont monotônes croissants.
- Les fonctions hyperboliques $\sinh x$ et $\tanh x$ sont monotônes croissantes, alors que $\cosh x$ est décroissant pour $x < 0$ et croissant pour $x > 0$.

Fonctions convexes et concaves

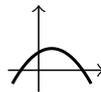
La deuxième propriété qu'on voit sur le graphe est la convexité.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

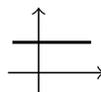
- f est **convexe sur** D si elle a la forme



- f est **concave sur** D si elle a la forme



- f est **plate sur** D si elle est constante



Si on n'indique pas l'ensemble D , on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f .

Exemples:

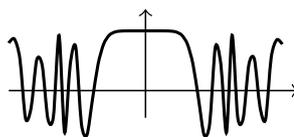
- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont convexes si n est pair.
Si n est impair, ils sont concaves pour $x < 0$ et convexes pour $x > 0$.
- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont concaves.
- L'exponentiel e^x est convexe. Le logarithme $\ln x$ est concave.

Fonctions paires, impaires et périodiques

La troisième propriété qu'on voit sur le graphe est la symétrie.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:

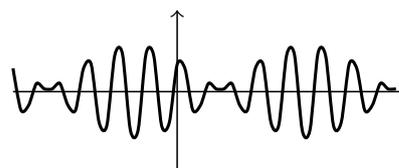
- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie axiale).



- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie centrale).



- f est **périodique** de **période** p si $f(x + p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie par translation).



Exemples:

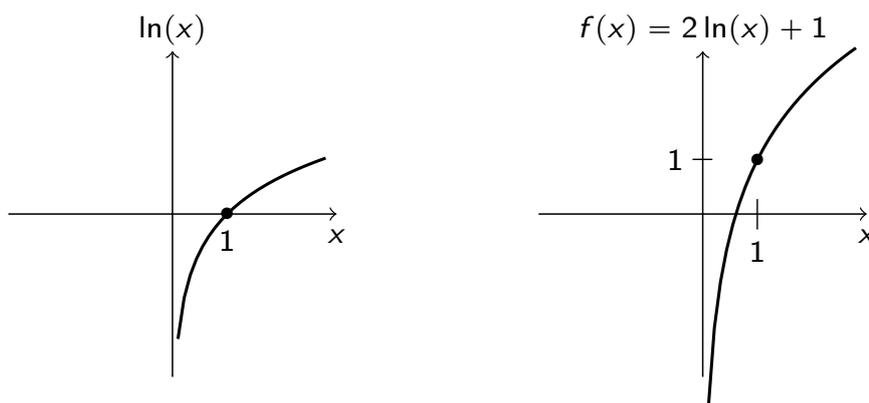
- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont des fonctions paires si n est pair, et des fonctions impaires si n est impair.
- Les fonctions $\sin x$ et $\tan x$ sont impaires, $\cos x$ est paire. Toutes les trois sont périodiques: $\sin x$ et $\cos x$ de période 2π , $\tan x$ de période π .

Exercice

Exercice: Pour les fonctions suivantes, dessiner le graphe, préciser le domaine de définition et si elles sont monotônes (croissantes ou décroissantes), paires ou impaires et périodiques.

- $f(x) = 2 \ln x + 1$

Réponse: Le graphe de $f(x) = 2 \ln x + 1$ se trouve en dilatant par 2 le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en décalant tout de +1:



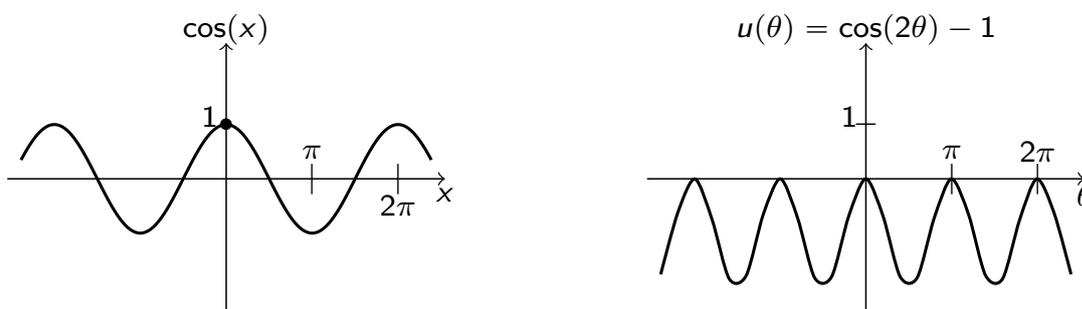
Le domaine de f est $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, \infty[$.

La fonction f est monotône croissante, ni paire ni impaire.

Exercice (suite)

- $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$

Réponse: Le graphe de $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$ se trouve en décalant de -1 le graphe de la fonction $f(x) = \cos x$ où $x = 2\theta$:



Le domaine de u est $D_u = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 2\theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

La fonction u n'est pas monotône, et elle est paire.

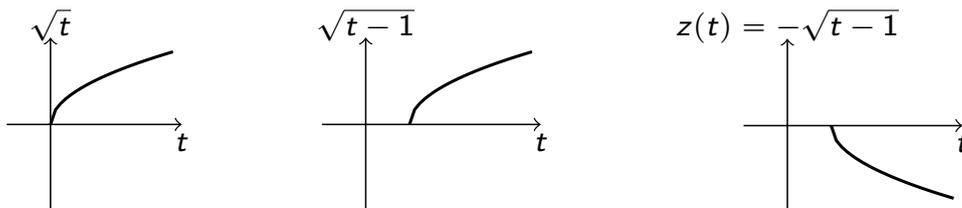
Elle est clairement périodique de période π :

$$\begin{aligned} u(\theta + \pi) &= \cos(2(\theta + \pi)) - 1 = \cos(2\theta + 2\pi) - 1 \\ &= \cos(2\theta) - 1 = u(\theta). \end{aligned}$$

Exercice (suite)

- $z(t) = -\sqrt{t-1}$

Réponse: Le graphe de $z(t) = -\sqrt{t-1}$ se trouve par étapes: on dessine la fonction \sqrt{t} , on décale la variable indépendante de t à $t-1$ en bougeant l'axe vertical de -1 en horizontal, enfin on prend son opposé $-\sqrt{t-1}$.



Le domaine de la fonction z est $D_z = \{t \in \mathbb{R} \mid t-1 \geq 0\} = [1, \infty[$.

La fonction z est monotone décroissante, elle n'est ni paire ni impaire.

4. Opérations entre fonctions

Définition: Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $t \in \mathbb{R}$.

- **addition:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ avec domaine

$$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } x \in D_g\} = D_f \cap D_g$$

- **zéro:** $0(x) = 0$ avec $D_0 = \mathbb{R}$

- **opposée:** $(-f)(x) = -f(x)$ avec $D_{-f} = D_f$

- **produit par un scalaire:** $(tf)(x) = tf(x)$ avec $D_{tf} = D_f$

- **multiplication:** $(fg)(x) = f(x)g(x)$ avec $D_{fg} = D_f \cap D_g$

- **unité:** $1(x) = 1$ avec $D_1 = \mathbb{R}$

- **inverse:** $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$ avec $D_{1/f} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$

Exemples:

$h(x) = x^2 + \sin x$ est la somme de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$

$k(x) = 10(x^2 + \sin x)$ est le produit de $h(x)$ par le scalaire 10

$H(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ est le produit de $f(x)$ par l'inverse de $g(x)$

Propriétés de la composition

Propriétés:

- La composition est associative: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
 mais elle n'est pas commutative: $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Exemple: Si $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$ et $h(z) = \ln z$, on a

$$(h \circ g)(y) = \ln(\sin y) \quad \text{donc} \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = \ln(\sin(x^2))$$

$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{donc} \quad (h \circ (g \circ f))(x) = \ln(\sin(x^2))$$

et

$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{mais} \quad (f \circ g)(y) = (\sin y)^2.$$

- La fonction **identité** $\text{id}(x) = x$, avec domaine $D_{\text{id}} = \mathbb{R}$, est une unité pour la composition: $f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f$.

Remarque: Pour une fonction f , l'inverse $\frac{1}{f}$ est définie à partir de la

multiplication et de l'unité 1 de telle sorte que $f \frac{1}{f} = 1$ et $\frac{1}{f} f = 1$.

L'analogie pour la composition et l'identité est une fonction f^{-1} telle que

$f^{-1} \circ f = \text{id}$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}$, c'est la réciproque de f .

5. Fonctions réciproques

Définition: La réciproque d'une fonction $x \mapsto f(x)$ est la fonction $y \mapsto f^{-1}(y)$ telle que

$$f^{-1} \circ f = \text{id} \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}$$

c'est-à-dire telle que

$$\begin{array}{l} f^{-1}(f(x)) = x \\ \text{pour tout } x \in D_f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} f(f^{-1}(y)) = y \\ \text{pour tout } y \in I_f \end{array}$$

ce qui peut être résumé en une seule assertion:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Ceci implique que $D_{f^{-1}} = I_f$ et $I_{f^{-1}} = D_f$.

En conclusion, on peut visualiser la réciproque comme ceci:

$$\begin{array}{ccc} D_f = I_{f^{-1}} & & I_f = D_{f^{-1}} \\ x = f^{-1}(y) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & y = f(x) \end{array}$$

Exemples de réciproques

Exemples:

- La réciproque de l'exponentiel $f(x) = e^x$ est le logarithme $f^{-1}(y) = \ln y$, car

$$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = e^{\ln y} = y,$$

c'est-à-dire $e^x = y \iff x = \ln y$.

- La réciproque de la fonction $g(x) = x^3 + 1$ se trouve en posant $x^3 + 1 = y$ et en calculant $x = g^{-1}(y)$ comme fonction de y :

$$y = x^3 + 1 \iff y - 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y - 1}$$

donc $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1}$.

- La réciproque de la fonction $h(x) = \frac{5}{x^3 + 1}$ se trouve en posant $\frac{5}{x^3 + 1} = y$ et en calculant $x = h^{-1}(y)$ comme fonction de y :

$$y = \frac{5}{x^3 + 1} \iff x^3 + 1 = \frac{5}{y} \iff x = \sqrt[3]{\frac{5}{y} - 1}$$

donc $h^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{5}{y} - 1}$.

Propriétés des réciproques

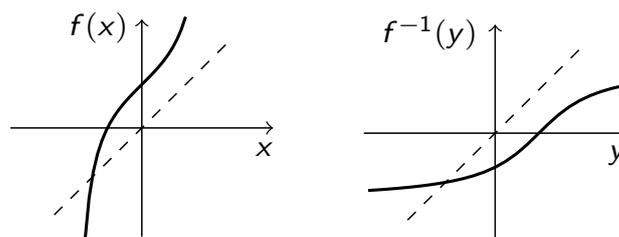
Théorème: La réciproque d'une fonction f existe si et seulement si f est strictement monotône.

Idée: En effet, si f n'est pas strictement monotône, il existe deux points distincts x_1 et x_2 qui donnent la même valeur $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Dans ce cas, comment va-t-on définir la réciproque f^{-1} au point y , $f^{-1}(y) = x_1$ ou bien $f^{-1}(y) = x_2$? Ce choix est impossible.

Propriétés:

- Si f est strictement monotône et on note Γ_f son graphe, la réciproque f^{-1} est aussi strictement monotône et son graphe est l'image miroir de Γ_f par rapport à la droite $y = x$.



- La réciproque de la réciproque de f est f : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Réciproque des fonctions non monotônes

Problème:

- Les polynômes x^n de puissance impaire et l'exponentiel e^x sont monotônes et admettent une réciproque, à savoir respectivement les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre impair et le logarithme $\ln x$:

$$x = \sqrt[n]{y} \iff x^n = y$$

$$x = \ln y \iff e^x = y$$

- Mais les polynômes x^n de puissance paire et les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ ne sont pas monotônes et n'admettent donc pas de réciproque! Que faire?

Astuce: Si une fonction f n'est pas monotône, on peut restreindre son domaine de définition à un ensemble $D \subset D_f$ tel que

- f soit monotône sur D ,
- $f(D) = I_f$.

Cette fonction "à domaine restreint" $f : D \subset D_f \rightarrow I_f$ admet bien une réciproque "à image restreinte":

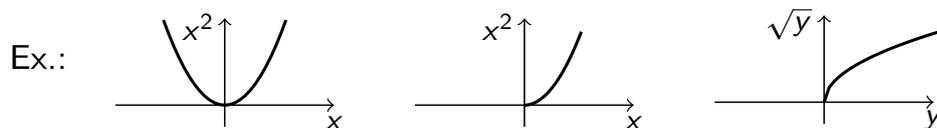
$$f^{-1} : I_f \rightarrow D \subset D_f$$

Exemples de réciproques "restreintes"

Exemples:

- Les polynômes x^n de puissance paire restreints à l'ensemble $[0, \infty[\subset \mathbb{R}$ ont comme réciproque les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre pair:

$$x = \sqrt[n]{y} \iff x^n = y \text{ et } x \geq 0$$

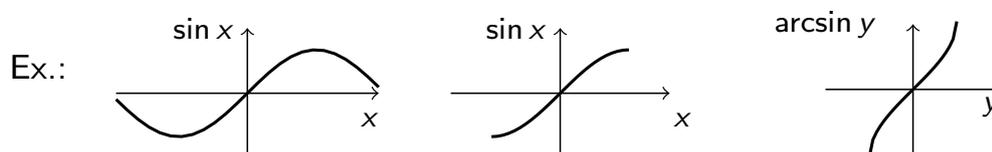


- Les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, opportunément restreintes, ont comme réciproque les fonctions arc $\arcsin x$, $\arccos x$ et $\arctan x$:

$$x = \arcsin y \iff \sin x = y \text{ et } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$x = \arccos y \iff \cos x = y \text{ et } x \in [0, \pi]$$

$$x = \arctan y \iff \tan x = y \text{ et } x \in]-\pi/2, \pi/2[$$



Exercice

Exercice: Calculer la réciproque des fonctions suivantes.

- $f(x) = 3x^2 - 5$, avec $x \geq 0$

Réponse:

$$y = 3x^2 - 5 \Leftrightarrow \frac{y + 5}{3} = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y + 5}{3}}$$

- $f(\theta) = \sqrt{\sin \theta + 3}$, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

Réponse:

$$x = \sqrt{\sin \theta + 3} \Leftrightarrow x^2 - 3 = \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin(x^2 - 3)$$

- $f(z) = 3 \arctan(e^z)$

Réponse:

$$t/3 = \arctan(e^z) \Leftrightarrow \tan(t/3) = e^z \Leftrightarrow z = \ln(\tan(t/3))$$

avec $-\pi/2 < t/3 < \pi/2$ et $\tan(t/3) > 0$, c'est-à-dire
 $0 < t/3 < \pi/2$, au final: $0 < t < 3\pi/2$.

TMB – Chapitre 3

Dérivées

Dans ce chapitre:

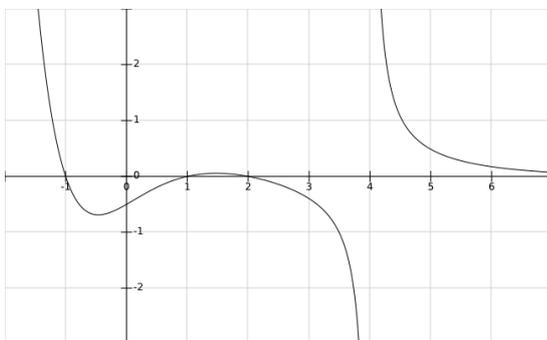
1. Idée des limites et des fonctions continues.
2. Dérivées. Dérivées des fonctions composées.
3. Dérivées d'ordre supérieur. Points critiques, extréma locaux et points d'inflexions.
4. Formule de Taylor et approximations.

1. Idée des limites

Définition – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la variable x .

La **limite de f pour x qui tend vers x_0** , notée $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, est la valeur à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de x_0 (sans le toucher). Cette limite peut être un nombre réel, ou $\pm\infty$, ou ne pas exister.

Exemple:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -0.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ n'existe pas}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Remarque: Pour que l'expression $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ait un sens, il suffit que $x_0 \in D_f$, ou bien que x_0 soit un point du **bord** de D_f , par exemple l'un des deux extrêmes a et b si $D_f =]a, b[$ est un intervalle ouvert, ou bien $x_0 = \pm\infty$ si $D_f = \mathbb{R}$.

Idée des fonctions continues

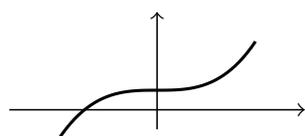
Définition – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la variable x .

On dit que

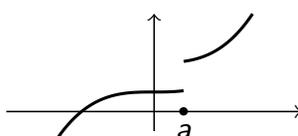
- f est continue en un point $a \in D_f$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

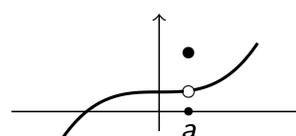
- f est continue si elle l'est en tout point $a \in D_f$.



continue



non continue en a
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas



non continue en a
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Proposition:

- Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
- La somme, le produit et la composée de fonctions continues est continue.

2. Dérivée

Définition – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la variable x .

- On appelle **dérivée de f en $a \in D_f$** la limite

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

si cette limite existe et c'est un nombre réel. Dans ce cas, on dit que f est **dérivable en a** .

- On dit que f est **dérivable sur $D \subset D_f$** si elle l'est en tout point $a \in D$. Si $D = D_f$, on le sous-entend.
- Si f est dérivable sur D , la **fonction dérivée** est la fonction

$$\frac{df}{dx} = f' : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x).$$

Exemple: Si $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$ car

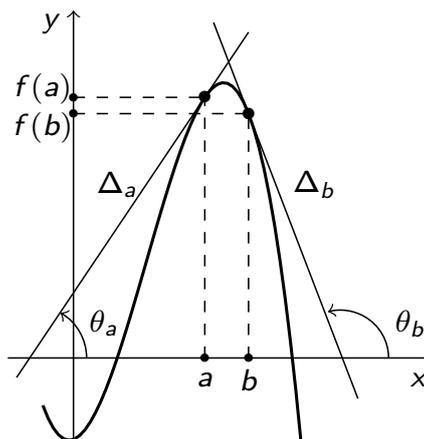
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Dérivée, droite tangente et croissance

Proposition: Si f est dérivable en a , alors son graphe Γ_f admet une droite tangente Δ_a au point $(a, f(a))$, d'équation

$$\Delta_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

et on a $f'(a) = \tan \theta_a$, où θ_a est l'angle formé par la droite tangente Δ_a à partir de l'axe Ox .



Par conséquent, la dérivée donne un critère pour établir la croissance d'une fonction dérivable.

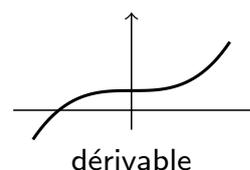
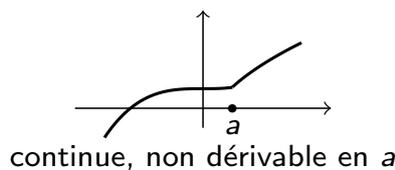
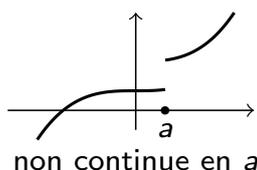
Proposition: Si f est une fonction dérivable en x , on a :

$$f \text{ est croissante en } x \Leftrightarrow 0 < \theta_x < \pi/2 \Leftrightarrow f'(x) = \tan \theta_x > 0$$

$$f \text{ est décroissante en } x \Leftrightarrow \pi/2 < \theta_x < \pi \Leftrightarrow f'(x) = \tan \theta_x < 0$$

Fonctions dérivables

Remarque: Une fonction dérivable est continue, le contraire est faux; en effet il y a des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.



Proposition:

- Les fonctions usuelles (ch. 4) sont dérivables, sauf les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre n pair, en $x = 0$.
- La somme, produit et composée de fonctions dérivables est dérivable.

Exemples:

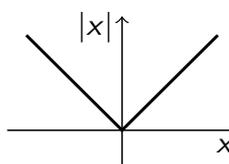
- $f(x) = 3x^2 + \sin(\sqrt{x^3 - 1}) + \ln(3x^2 + 1)$ est dérivable sur

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0, 3x^2 + 1 > 0\} =]1, \infty[.$$

- La valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en 0.



Dérivée des fonctions usuelles (par coeur !)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-n \frac{1}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Cas particuliers:

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Dérivée de la somme et du produit de fonctions

Proposition: Si f et g sont dérivables en $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\bullet \frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\bullet \frac{d}{dx} (t f(x)) = t f'(x)$$

$$\bullet \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

règle de Leibniz

$$\bullet \text{ si } f(x) \neq 0, \text{ on a } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$\bullet \text{ si } g(x) \neq 0, \text{ on a } \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Exemples:

$$\bullet f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad f'(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z}} = -\frac{1}{2z\sqrt{z}}$$

$$\bullet h(t) = \frac{te^t}{t+1} \quad h'(t) = \frac{(e^t + te^t)(t+1) - te^t}{(t+1)^2} = \frac{(t^2 + t + 1)e^t}{(t+1)^2}$$

Dérivée des fonctions composées

Proposition: Soit f une fonction dérivable en x , g une fonction dérivable en $y = f(x)$ et $g \circ f$ la composée. Alors:

- règle de la chaîne:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(y) \Big|_{y=f(x)} f'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

- si f admet la réciproque f^{-1} et $y = f(x) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemples:

- $f(z) = (\ln z)^2$ $f'(z) = 2 \ln z \frac{1}{z} = \frac{2 \ln z}{z}$
- $h(t) = \ln(t^2)$ $h'(t) = \frac{1}{t^2} 2t = \frac{2}{t}$

Exercice

Exercice: Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $y(u) = u^3 \sin^3(u^2)$

Réponse:
$$y'(u) = 3u^2 \sin^3(u^2) + u^3 3 \sin^2(u^2) \cos(u^2) 2u$$
$$= 3u^2 \sin^3(u^2) + 6u^4 \sin^2(u^2) \cos(u^2)$$

- $h(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Réponse:
$$h'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{x}$$

- $F(t) = t\sqrt{t^3 + 5t}$

Réponse:
$$F'(t) = \sqrt{t^3 + 5t} + t \frac{1}{2\sqrt{t^3 + 5t}} (3t^2 + 5)$$
$$= \frac{2(t^3 + 5t) + (3t^3 + 5t)}{2\sqrt{t^3 + 5t}} = \frac{5t^3 + 15t}{2\sqrt{t^3 + 5t}}$$

3. Points critiques

Rappel: Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in D_f$ est

- croissante en a si $f'(a) > 0$,
- décroissante en a si $f'(a) < 0$,

car la droite Δ_a tangente au graphe Γ_f au point $(a, f(a))$ a pour équation cartésienne $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$?

Définition: Soit f une fonction dérivable en $a \in D_f$. Le point a s'appelle **point critique** de f si $f'(a) = 0$.

Dans ce cas, la tangente Δ_a est la droite horizontale $y = f(a)$.

Exemple: Le graphe de la fonction

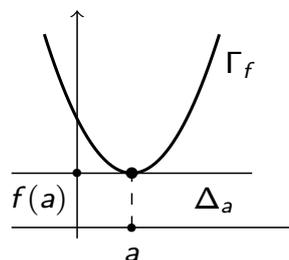
$$f(x) = (x - 1)^2 + 1$$

est une parabole. On a $f'(x) = 2(x - 1)$, donc $a = 1$ est un point critique de f .

La droite tangente Δ_a , qui a pour équation

$$y = 0(x - 1) + 1 = 1,$$

est bien horizontale.

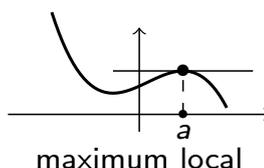
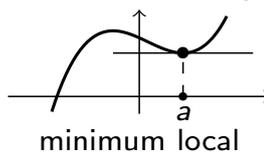


Extrema locaux et points d'inflexion

Les points critiques peuvent être de trois types:

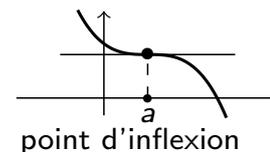
Définition: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$. On dit que

- f a un **minimum local** en a si $f(x) > f(a)$ pour tout x proche de a (f est convexe autour de a).
- f a un **maximum local** en a si $f(x) < f(a)$ pour tout x proche de a (f est concave autour de a).

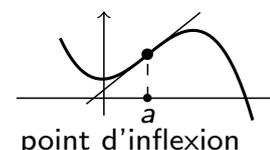


Les minima et maxima locaux s'appellent aussi **extrema locaux**.

- f a un **point d'inflexion** en a si, au point $(a, f(a))$, le graphe Γ_f traverse la droite tangente Δ_a .



Cela peut arriver aussi quand la droite tangente Δ_a n'est pas horizontale.



Pour distinguer ces trois types de points on a besoin des dérivées supérieures.

Dérivées d'ordre supérieur

Définition:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **dérivée d'ordre n** de f la fonction

$$x \mapsto f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\dots \frac{df}{dx}(x) \right) \right)$$

que l'on obtient en dérivant f successivement n fois.

- Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie sur $D \subset D_f$, on dit que f est **dérivable n fois sur D** . Si cela arrive pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est **lisse** ou **de classe C^∞** .

Exemples:

- La fonction $f(x) = x^3$ est lisse sur \mathbb{R} car toutes les dérivées sont définies:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } n \geq 4.$$

- La fonction $h(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $[0, \infty[$, car $h'(x) = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, \infty[$, mais h n'est pas dérivable deux fois en $x = 0$ car $h''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$ n'est pas définie en $x = 0$

Exercice

Exercice: Calculer les cinq premières dérivées de la fonction

$$f(t) = t^2 e^t$$

et déduire l'expression de $f^{(n)}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est-elle lisse?

Réponse: Les cinq premières dérivées sont:

$$f'(t) = 2te^t + t^2 e^t = (t^2 + 2t)e^t$$

$$f''(t) = (2t + 2)e^t + (t^2 + 2t)e^t = (t^2 + 4t + 2)e^t$$

$$f'''(t) = (2t + 4)e^t + (t^2 + 4t + 2)e^t = (t^2 + 6t + 6)e^t$$

$$f^{(4)}(t) = (2t + 6)e^t + (t^2 + 6t + 6)e^t = (t^2 + 8t + 12)e^t$$

$$f^{(5)}(t) = (2t + 8)e^t + (t^2 + 8t + 12)e^t = (t^2 + 10t + 20)e^t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$f^{(n)}(t) = (t^2 + 2nt + (n-1)n)e^t,$$

qui est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f est lisse.

Critère pour établir la nature d'un point critique

Théorème: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse sur D et soit $a \in D$ un point critique ($f'(a) = 0$). Alors:

- i) f est plate autour de a ssi toutes les dérivées de f s'annulent en a , c.-à-d. $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- ii) Sinon, soit n l'ordre de la première dérivée de f non nulle en a , c.-à-d. que $f^{(n)}(a) \neq 0$ et $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k < n$:
 - a est un minimum local ssi n est pair et $f^{(n)}(a) > 0$,
 - a est un maximum local ssi n est pair et $f^{(n)}(a) < 0$,
 - a est un point d'inflexion ssi n est impair.

En particulier, si a est un point critique ($f'(a) = 0$), on a:

- Si $f''(a) > 0$, alors a est un minimum local.
- Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local.
- Si $f''(a) = 0$ (a s'appelle **point plat**), pour connaître la nature de a il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur.

Exercice

Exercice: Trouver les points critiques de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2},$$

et déterminer s'ils sont des extréma locaux ou des points d'inflexion.

Réponse: Le domaine de la fonction f est $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

Cherchons les points critiques:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Par conséquent, il y a deux points critiques: $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice (suite)

Pour connaître la nature des points critiques, calculons la dérivée seconde.

Puisque $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x(x-3) + x^2)(x-1)^3 - x^2(x-3)3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(2x^2 - 6x + x^2)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - (3x^3 - 9x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Alors :

- En $x = 3$ on a $f''(3) = \frac{18}{24} = \frac{9}{8} > 0$, donc $x = 3$ est un minimum local.
- En $x = 0$ on a $f''(0) = 0$, donc on ne peut rien dire pour l'instant.

Exercice (suite)

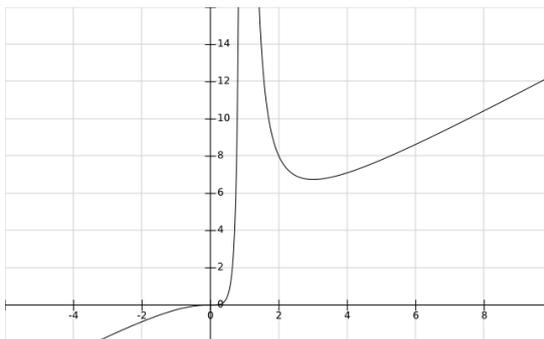
Calculons la troisième dérivée. Puisque $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$, on a :

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{6(x-1)^4 - 6x \cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} \\ &= \frac{6(x-1) - 24x}{(x-1)^5} \\ &= \frac{-18x - 6}{(x-1)^5} = -6 \frac{3x + 1}{(x-1)^5} \end{aligned}$$

On a alors $f'''(0) = -6 \frac{1}{(-1)^5} = 6 \neq 0$.

Puisque la première dérivée non nulle en $x = 0$ est d'ordre impair, on a que $x = 0$ est un point d'inflexion.

En effet, le graphe de f est :



4. Polynôme de Taylor et approximations

Théorème: Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois autour d'un point a peut être approximée en tout point x proche de a par un polynôme de degré n dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de f en a , qui s'appelle **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a** :

$$T_a^n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n .$$

Le niveau d'approximation est mesuré par le **reste**

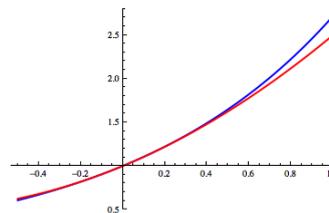
$$R_a^n f(x) = f(x) - T_a^n f(x) , \text{ qui tend vers } 0 \text{ pour } x \rightarrow a$$

Exemple: Voici les graphes de

$$f(x) = e^x \quad (\text{en bleu})$$

et de son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$

$$T_0^2 f(x) = 1 + x + x^2/2 \quad (\text{en rouge}).$$



Les restes en $x = 1$ et en $x = 0.1$ valent:

$$R_0^2 f(1) = e - (1 + 1 + 1/2) \simeq -0.83 \quad (\text{mauvaise approximation})$$

$$R_0^2 f(0.1) = e^{0.1} - (1 + 0.1 + 0.01/2) \simeq -0.0018 \quad (\text{bonne approximation})$$

Polynômes de Taylor importants (autour de 0)

$f(x)$	$T_0^n f(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n$
$\ln(1-x)$	$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n$

Exercice

Exercice: Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = \frac{4-x}{2+x} \text{ autour des points } a = 0 \text{ et } b = 1$$

Réponse: Il nous faut les premières deux dérivées de f :

$$f'(x) = \frac{-(2+x) - (4-x)}{(2+x)^2} = -\frac{6}{(2+x)^2}$$

$$f''(x) = (-6) \frac{-2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{12}{(2+x)^3}$$

- Autour de $a = 0$:

$$f(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad f'(0) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}, \quad f''(0) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\text{donc } T_0^2 \left(\frac{4-x}{2+x} \right) = 2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2.$$

- Autour de $b = 1$:

$$f(1) = \frac{3}{3} = 1, \quad f'(1) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}, \quad f''(1) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9},$$

$$\text{donc } T_1^2 \left(\frac{4-x}{2+x} \right) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2.$$

Estimation du reste

Rappel: Le théorème de Taylor garantit que si f est dérivable n fois autour de a , alors il existe un polynôme $T_a^n f(x)$ qui est une bonne approximation de f quand $x \rightarrow a$, c'est-à-dire tel que

$$f(x) = T_a^n f(x) + R_a^n f(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} R_a^n f(x) = 0.$$

Formule de Young: Le reste $R_a^n f(x)$ est négligeable par rapport au polynôme de Taylor:

$$\boxed{R_a^n f(x) = o((x-a)^n)},$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers 0 plus vite que h : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Formule de Lagrange: Si f est dérivable $n+1$ fois autour de a , alors pour tout x proche de a il existe une valeur c comprise entre a et x telle que

$$\boxed{R_a^n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}.$$

Exercice

Exercice:

- Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Réponse: Puisque $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1+x} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, on sait, par la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \geq 0$ il existe un c compris entre 0 et x tel que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(1+c)^{n+1}} x^n.$$

Puisque $0 \leq c \leq x$, on a $c+1 \geq 1$. Donc, pour $n=3$ on a $(-1)^3 \frac{1}{(1+c)^4} \geq -1$ et donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{1}{(1+c)^4} x^3 \geq 1 - x + x^2 - x^3.$$

Et pour $n=4$ on a $(-1)^4 \frac{1}{(1+c)^5} \leq 1$, donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{1}{(1+c)^5} x^4 \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Exercice (suite)

- Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $1 - x + x^2 - x^3$ est une approximation de $\frac{1}{1+x}$ à 10^{-4} près, c'est-à-dire telles que

$$\left| \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leq 10^{-4}?$$

Réponse: Des inégalités

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$$

on déduit que

$$0 \leq \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \leq x^4.$$

Il suit alors que

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leq 10^{-4}$$

si on prend $x \leq 10^{-1}$, car dans ce cas on a bien $x^4 \leq 10^{-4}$.

TMB – Chapitre 4

Intégrales

Dans ce chapitre:

1. Primitives
2. Intégrale de Riemann et aire
3. Relation entre primitives et intégrales
4. Techniques d'intégration: par parties et par changement de variable. Cas des fonctions circulaires et des fractions rationnelles.

1. Primitives

Définition: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une **primitive de f sur $[a, b]$** est une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On note $F(x) = \int f(x) dx$, mais attention ! (voir la suite)

Remarque: Toute autre primitive de f diffère de F par une constante.

Exemples: cf. le tableau des dérivées:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln x}$$

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x}$$

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x}$$

$$\boxed{\int e^x dx = e^x}$$

$$\boxed{\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x}$$

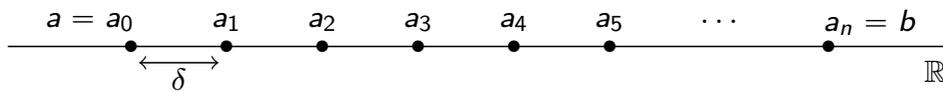
$$\boxed{\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x}$$

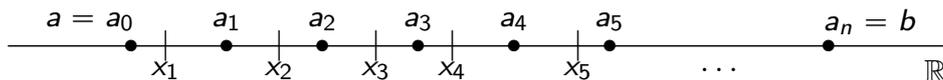
2. Somme de Riemann d'une fonction

Définition – Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Une **subdivision** \mathcal{S}_n de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, \dots, n$) de longueur $\delta = \frac{b-a}{n}$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.

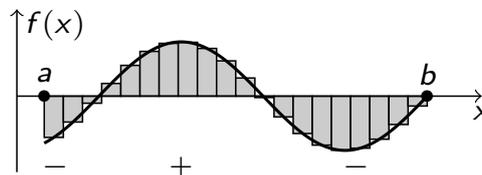


- Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$



on appelle **somme de Riemann de f** la somme

$$R_n(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta$$



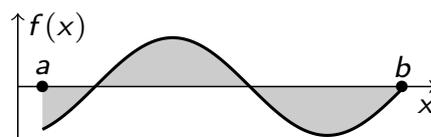
Chaque terme $f(x_i) \delta$ est l'**aire algébrique** ($= \pm$ aire) du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.

Intégrale de Riemann

Définition:

- Si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f; \{x_i\})$ existe, c'est un nombre réel et ne dépend pas du choix des x_i , on l'appelle **intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$** :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{tout } x_i}} R_n(f; \{x_i\})$$



et on dit que f est **intégrable selon Riemann sur $[a, b]$** .

- Toujours pour $a < b$, on pose aussi
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Note: Le symbol \int rappelle la somme, et dx représente la variation infinitésimale de x et s'appelle **différentielle de x** .

Exemples:

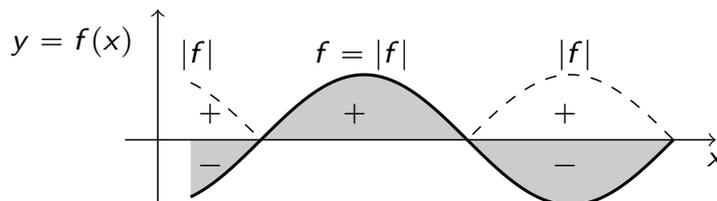
- Les fonctions continues et celles en forme d'escalier sont intégrables.
- La fonction de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est pas intégrable selon Riemann, car la limite de $R_n(f; \{x_i\})$ dépend du choix des points x_i .

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

Corollaire:

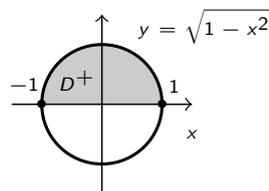
- $\int_a^b f(x) dx = \text{aire "algébrique" sous le graphe de } f$

- $\int_a^b |f(x)| dx = \text{aire sous le graphe de } f \quad (\text{positive})$



Exemple: L'aire du disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



se calcule comme une intégrale:

$$\text{Aire}(D) = 2 \text{Aire}(D^+) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

D'autres propriétés des intégrales

Propriétés:

- $\int_a^b 0 dx = 0$

- $\int_a^b dx = b - a = \text{longueur de } [a, b]$

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

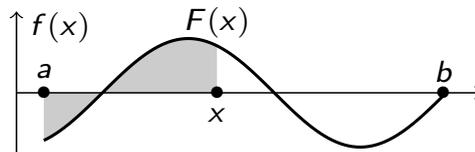
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

3. Relation entre intégrale et primitives

Théorème fondamental du calcul intégral:

Soit f une fonction intégrable selon Riemann sur $[a, b]$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie en tout $x \in [a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$



est une primitive de f (i.e. $F'(x) = f(x)$) telle que $F(a) = c$.

En mots: l'aire sous le graphe de f entre a et x donne une primitive $F(x)$.

Corollaire: On peut donc calculer l'intégrale de f si on connaît une primitive F de f , avec la formule

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Il ne reste plus qu'à apprendre les techniques d'intégration pour trouver la primitive.

4. Calcul de primitives et d'intégrales

Pour calculer les primitives et les intégrales, on part des cas connus et on modifie la fonction à intégrer en utilisant les théorèmes suivants.

1) Si l'intégrand est une somme de fonctions

Théorème:

- primitive:
$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx$$

- intégrale:
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \int (3 \cos x + 5 \sin x) dx &= 3 \int \cos x dx + 5 \int \sin x dx \\ &= 3 \sin x - 5 \cos x. \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (3 \cos x + 5 \sin x) dx &= [3 \sin x - 5 \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= (3 \sin(\pi/2) - 5 \cos(\pi/2)) - (3 \sin 0 - 5 \cos 0) \\ &= (3 - 0) - (0 - 5) = 8 \end{aligned}$$

Intégration par parties

2) Si l'intégrand est un produit de fonctions

Théorème (Intégration par parties):

• primitive:
$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

• intégrale:
$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int x \sin x dx$, on pose

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \sin x$$

et on calcule

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

On a alors:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Par conséquent:

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi = -\pi \cos \pi + \sin \pi + 0 - \sin 0 = \pi.$$

Exercice

Exercice: Calculer la primitive $\int \cos^2 x dx$ par parties.

Réponse: Posons $f(x) = \cos x$ et $g'(x) = \cos x$.

On a alors $f'(x) = -\sin x$ et $g(x) = \int \cos x dx = \sin x$, et donc

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx.$$

Puisque $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \end{aligned}$$

d'où suit

$$2 \int \cos^2 x dx = x + \sin x \cos x$$

et par conséquent

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$$

Changement de variable

3) Si l'intégrand contient une composée de fonctions

Définition: Un **changement de variable** de $x \in [a, b]$ en $t \in [\alpha, \beta]$ est l'expression de x comme fonction de t : $x = h(t)$

où $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est un **difféomorphisme**, c'est-à-dire une fonction dérivable (sauf en α et β) avec réciproque $h^{-1}: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ aussi dérivable (sauf en a et b), qui exprime t comme fonction de x :

$$t = h^{-1}(x).$$

On a alors: $dx = h'(t) dt$ et $dt = (h^{-1})'(x) dx$.

Exemples:

- $x = t^3$ est un changement de variable de $x \in [0, 8]$ en $t \in [0, 2]$, avec

$$t = \sqrt[3]{x}, \quad dx = 3t^2 dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

- $x = t^3$ n'est pas un changement de variable de $x \in [-1, 1]$ en $t \in [-1, 1]$, car la réciproque $t = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$ (cf. dt).

Intégration par changement de variable I

Théorème (Intégration par changement de variable I):

- primitive: $\int f(x) dx = \int f(h(t)) h'(t) dt \Big|_{t=h^{-1}(x)}$

- intégrale: $\int_a^b f(x) dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t)) h'(t) dt$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int \sqrt{x+1} dx$, on pose

$$t = \sqrt{x+1} = h^{-1}(x) \quad \text{donc} \quad x = t^2 - 1 = h(t).$$

On a alors $dx = 2t dt$ et par conséquent

$$\int \sqrt{x+1} dx = \int 2t^2 dt \Big|_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1}.$$

Pour l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$ on a alors

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_{\sqrt{0+1}}^{\sqrt{1+1}} 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Intégration par changement de variable II

Théorème (Intégration par changement de variable II):

• primitive:
$$\int f(h(x)) h'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=h(x)}$$

• intégrale:
$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(u) du$$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, on pose

$$u = \ln x = h(x) \quad \text{donc} \quad du = \frac{1}{x} dx.$$

On a alors

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int u^2 du \Big|_{u=\ln x} = \frac{1}{3} u^3 \Big|_{u=\ln x} = \frac{1}{3} \ln^3 x.$$

Pour l'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x} dx$, on a

$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2} u^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} \ln^3 2.$$

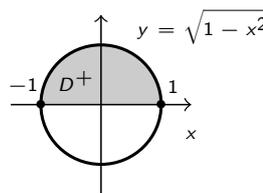
Exercice: aire d'un disque

Exercice: Calculer l'aire du disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Réponse: Comme on a déjà observé, l'aire du disque se trouve comme l'intégrale

$$\text{Aire}(D) = 2\text{Aire}(D^+) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$



Celui-ci se calcule par changement de variable: on pose

$$x = \sin t \quad \text{avec} \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

car $t = \arcsin x$ donne $\arcsin(-1) = -\pi/2$ et $\arcsin(1) = \pi/2$.

Alors $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ et $dx = \cos t dt$, donc

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \left[t + \sin t \cos t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= (\pi/2 + 0 + \pi/2 - 0) = \pi. \end{aligned}$$

Changement de variable pour fonctions circulaires

4) Si l'intégrand contient seulement des fonctions circulaires

Règle 1:

- $\int f(\sin x) \cos x \, dx = \int f(t) \, dt \Big|_{t=\sin x}$ avec $\begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{cases}$
- $\int f(\cos x) \sin x \, dx = - \int f(t) \, dt \Big|_{t=\cos x}$ avec $\begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{cases}$

Exemple:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = - \int \frac{1}{t^2} \, dt \Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{t} \Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Règle 2: Dans les autres cas, on pose $t = \tan(x/2)$, et on a:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \, dt \Big|_{t=\tan(x/2)} = \int \frac{1}{t} \, dt \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \ln(t) \Big|_{t=\tan(x/2)} = \ln(\tan(x/2)). \end{aligned}$$

Exercice

Exercice: Calculer les primitives suivantes:

- $\int \sin^3 x \, dx$

Réponse:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= -\cos x + \int t^2 \, dt \Big|_{t=\cos x} \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=\cos x} \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x. \end{aligned}$$

Exercice (suite)

$$\bullet \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx$$

Réponse: On pose $t = \tan(x/2)$, alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx &= \int \frac{\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) (1+t^2) \frac{2}{(1+t^2)} dt}{\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) 2t} \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \int \frac{(1+t^2 - 1 + t^2) 1}{(1+t^2 + 1 - t^2) t} dt \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \int t dt \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} t^2 \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} \tan^2(x/2). \end{aligned}$$

Changement de variable pour fractions rationnelles

5) Si l'intégrand contient seulement des fractions rationnelles

Définition: Une **fraction rationnelle** est le quotient $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, on se ramène aux quatre cas qu'on connaît:

a) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

b) si $n \geq 2$: $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

c) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

d) si $n \geq 2$: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$
(intégration par parties, à partir de $\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$).

1er cas: $\deg P < \deg Q$, primitives simples

Règle 1: Dans les cas suivants, qu'on appelle **primitives simples**, on pose $t = u(x)$ et $dt = u'(x) dx$:

a) $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)|$

Exemple: $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \ln |x^3 + 1|$

b) si $n \geq 2$: $\int \frac{u'(x)}{u(x)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)u(x)^{n-1}}$

Exemple: $\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c) $\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} dx = \arctan u(x)$

Exemple: $\int \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx = \arctan(x^3)$

d) si $n \geq 2$: $\int \frac{u'(x)}{(1 + u(x)^2)^n} dx = \dots$ trop long, on l'omet.

Décomposition en somme de primitives simples

Dans tout autre cas où $\deg P < \deg Q$, le dénominateur $Q(x)$ n'est pas irréductible, car les polynômes réels irréductibles sont:

- de degré 1 de la forme $ax + b = u(x)$ avec $u'(x) = a \Rightarrow$ cas a),
- de degré 2 de la forme $c((ax + b)^2 + 1) = c(u(x)^2 + 1) \Rightarrow$ cas b).

Règle 2: On factorise $Q(x)$ en polynômes irréductibles:

$$Q(x) = Q_1(x)^{n_1} Q_2(x)^{n_2} \dots Q_r(x)^{n_r}.$$

La primitive $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ s'écrit alors comme somme de primitives simples, de la forme a), b), c) ou d), qui ont au dénominateur les polynômes

$$Q_i(x), Q_i(x)^2, \dots, Q_i(x)^{n_i}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, r$$

avec $Q_i(x) = ax + b = u(x)$ ou bien $Q_i(x) = c(1 + u(x)^2)$, et au numérateur des polynômes de la forme

$$K u'(x), \quad \text{où } K \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Exemple

Exemple: $\int \frac{1}{x^4 + x^2} dx$

Le dénominateur $Q(x) = x^4 + x^2$ se factorise comme $x^2(x^2 + 1)$.

Par conséquent, il existe quatre constantes a , b , c et d telles que

$$(*) \quad \frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}, \text{ cherchons-les. On a:}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1} &= \frac{ax(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) + x^2(cx + d)}{x^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(a + c)x^3 + (b + c + d)x^2 + ax + b}{x^4 + x^2} \end{aligned}$$

donc (*) est vérifiée si et seulement si

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \int \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x.$$

2ème cas: $\deg P \geq \deg Q$

Règle 3: En utilisant l'algorithme de division euclidienne pour les polynômes, on divise $P(x)$ par $Q(x)$ et on trouve une solution de la division $S(x)$ et un reste $R(x)$ tel que $\deg R < \deg Q$. On peut donc écrire

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

et

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Par conséquent, on a

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx,$$

où

- $\int S(x) dx$ est facile à calculer car $S(x)$ est un polynôme.
- $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ est du 1er cas et se calcule avec les règles 1 ou 2.

Exemple

Exemple: $\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} dx$

On divise $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1$ par $Q(x) = 2x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 6x^2 + 0 \cdot x + 1 & 2x - 1 \\ \underline{4x^3 - 2x^2} & \\ 8x^2 + 0 \cdot x + 1 & \\ \underline{8x^2 - 4x} & \\ 4x + 1 & \\ \underline{4x - 2} & \\ 3 & \end{array}$$

Alors $S(x) = 2x^2 + 4x + 2$ et $R(x) = 3$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} dx &= \int (2x^2 + 4x + 2) dx + \int \frac{3}{2x - 1} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ln |2x - 1|. \end{aligned}$$

TMB – Chapitre 5

Équations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre:

1. Caractéristiques des équations différentielles ordinaires: ordre, équations linéaires, à coefficients constants, homogènes ou avec second membre.
2. Équations différentielles du 1er ordre linéaires, avec condition initiale.
3. Équations différentielles du 1er ordre non linéaires à variables séparées.
4. Équations différentielles du 2ème ordre, linéaires et à coefficients constants, avec conditions initiales.

1. Équations différentielles et ordre

Définition: Une **équation différentielle** (e.d.) est une équation dont l'inconnue est une fonction réelle $x : t \mapsto x(t)$, de variable t , de la forme

$$(E) \quad \boxed{F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0}$$

où F est une expression quelconque reliant la variable t , la fonction x et ses dérivées x' , x'' , etc (aussi inconnues), jusqu'à un ordre maximal de dérivation $n \geq 1$ qui s'appelle **ordre de l'e.d** (E).

Exemples:

- $\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ fonction x de variable t , ordre 1
- $t^2 u''(t) + u'(t) + t^3 u(t) = 0$ fonction u de variable t , ordre 2
- $y'(x) + 4(y(x))^2 + x^2 = 0$ fonction y de variable x , ordre 1
- $f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ fonction f de variable z , ordre 3
- $x''(\theta)(x'(\theta))^2 + \sin\theta x(\theta) + \cos\theta = 0$ fonction x de variable θ , ordre 2

But: résoudre l'e.d. (E), c'est-à-dire trouver la fonction inconnue x qui satisfait (E). La méthode dépend des caractéristiques de l'e.d.

Équations différentielles linéaires et coefficients

Définition:

- L'e.d. (E) est dite **polynômiale** (de degré d) si F est un polynôme (de degré d) dans les inconnues $x, x', \dots, x^{(n)}$.

En particulier, (E) est **linéaire** si F est un polynôme de degré 1.

Exemples:

$\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ n'est pas polynômiale

$t^2 u''(t) + u'(t) + t^3 u(t) = 0$ et $f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ sont linéaires

$y'(x) + 4(y(x))^2 + x^2 = 0$ est polynômiale de degré 2

$x''(\theta)(x'(\theta))^2 + \sin\theta x(\theta) + \cos\theta = 0$ est polynômiale de degré 3

- Si (E) est polynômiale, on appelle **coefficients de (E)** les facteurs des inconnues $x, x', \dots, x^{(n)}$. Ce sont des fonctions de la variable t , éventuellement constantes.

Exemples:

$t^2 u''(t) + u'(t) + t^3 u(t) = 0$ coefficients: $t^2, 1$ et t^3

$y'(x) + 4(y(x))^2 + x^2 = 0$ coefficients constants: 1 et 4

$x''(\theta)(x'(\theta))^2 + \sin\theta x(\theta) + \cos\theta = 0$ coefficients: 1 et $\sin\theta$

Équations différentielles homogènes

Définition:

- On appelle **second membre de (E)** le terme (sommant) qui ne contient aucune inconnue $x, x', \dots, x^{(n)}$. C'est une fonction de t , qui peut être constante et même nulle. Si le second membre est nul l'e.d. (E) est dite **homogène**.

Exemples:

$\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ second membre: $-\sin t$

$t^2 u''(t) + u'(t) + t^3 u(t) = 0$ e.d. homogène

$y'(x) + 4(y(x))^2 + x^2 = 0$ second membre: x^2

$f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ e.d. homogène

$x''(\theta)(x'(\theta))^2 + \sin\theta x(\theta) + \cos\theta = 0$ second membre: $\cos\theta$

- On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation (E_0) obtenue en supprimant le second membre.
Si (E) est homogène, on a $(E_0) = (E)$.

Exemples:

$(E) \quad \sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0 \Rightarrow (E_0) \quad \sin(x'(t)) + x(t) = 0$

$(E) \quad y'(x) + 4(y(x))^2 + x^2 = 0 \Rightarrow (E_0) \quad y'(x) + 4(y(x))^2 = 0$

Exercice

Exercice: Pour les équations différentielles (E) suivantes, dire quel est l'ordre, si elles sont linéaires, quels sont les coefficients, si elles sont homogènes ou quel est l'équation homogène associée (E_0).

• (E) $(t + 1)x'(t) + t^2x(t) + t^3 = 0$

Réponse: 1er ordre, linéaire, à coefficients non constants (les coefficients sont $t + 1$ et t^2), non homogène (le second membre est t^3) et

$$(E_0) \quad (t + 1)x'(t) + t^2x(t) = 0.$$

• (E) $u''(t) - 2u'(t) + u(t) - \sin t = 0$

Réponse: 2ème ordre, linéaire, à coefficients constants, non homogène et

$$(E_0) \quad u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0$$

• (E) $y'(t)y'''(t) - \frac{1}{1+t}y(t) = 0$

Réponse: 3ème ordre, non linéaire (polynômiale de degré 2), à coefficients non constants (à cause de $\frac{1}{1+t}$) et homogène, (E_0) = (E).

2. Équations différentielles du 1er ordre linéaires

But: résoudre l'e.d. du 1er ordre linéaire

$$(E) \quad \boxed{x'(t) = a(t)x(t) + b(t)}$$

où a et b sont des fonctions continues sur $D = D_a \cap D_b \subset \mathbb{R}$.

Théorème 1: Les solutions $x(t)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)} \quad \text{définies pour } t \in D,$$

où $x_0(t)$ est une solution de l'e.d. homogène (E_0),
et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Note: Une solution **de l'équation homogène** dépend d'un paramètre réel λ qui détermine toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ donne une solution. Cette solution représente alors une famille de solutions.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

Solution de l'équation homogène

Théorème 2: La solution de (E_0) $x'(t) = a(t)x(t)$ est la fonction

$$x_0(t) = \lambda e^{A(t)} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

où $A(t) = \int a(t) dt$ est une primitive de $a(t)$.

Preuve: On écrit (E_0) comme

$$(*) \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = a(t)$$

et on intègre en t pour calculer les primitives à gauche et à droite.

À gauche, en utilisant le changement de variable $u = x(t)$, avec $du = x'(t) dt$, on obtient:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \ln x(t) + c_1.$$

À droite, on a:

$$\int a(t) dt = A(t) + c_2.$$

De l'égalité $(*)$ suit alors

$$\ln x(t) = A(t) + c \quad \text{et donc} \quad x(t) = e^{A(t)+c} = e^c e^{A(t)} = \lambda e^{A(t)}.$$

Exemple de solution homogène

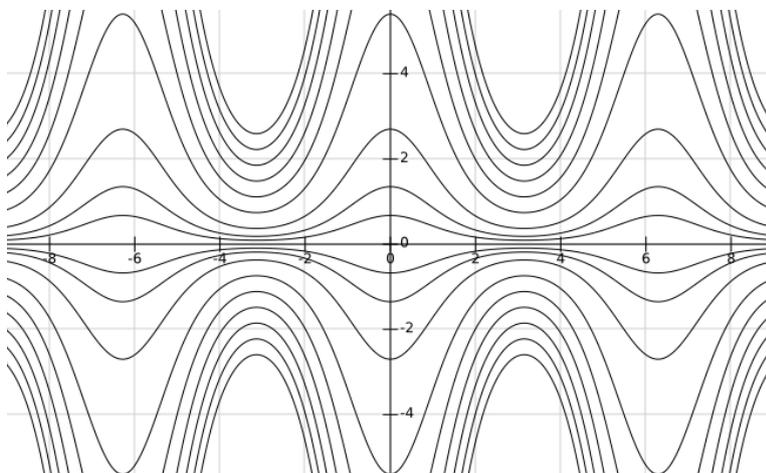
Exemple: L'équation homogène $x'(t) + \sin t x(t) = 0$ s'écrit comme

$$(E_0) \quad x'(t) = -\sin t x(t)$$

et a donc comme solution les fonctions

$$x_0(t) = \lambda e^{-\int \sin t dt} = \lambda e^{\cos t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Voici le graphe de x_0 pour plusieurs valeurs de λ positives et négatives:



Solution particulière de l'équation complète

Théorème 3: L'e.d. (E) $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ a une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = \lambda(t) e^{A(t)} \quad (\text{variation de la constante}),$$

où $A(t) = \int a(t) dt$ et $\lambda(t) = \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}} dt$.

Preuve: Cherchons $\lambda(t)$ telle que $x_p(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$ soit solution de (E) . Dans (E) , on remplace $x_p(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$ et

$$x_p'(t) = \lambda'(t) e^{A(t)} + \lambda(t) A'(t) e^{A(t)}$$

où $A'(t) = a(t)$. On trouve:

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \lambda'(t) e^{A(t)} + \lambda(t) a(t) e^{A(t)} = a(t) \lambda(t) e^{A(t)} + b(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) e^{A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{b(t)}{e^{A(t)}} \Leftrightarrow \lambda(t) = \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}} dt. \end{aligned}$$

Conclusion: $x(t) = x_0(t) + x_p(t) = \left(\lambda + \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}} dt \right) e^{A(t)} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Exemple de solution particulière

Exemple: L'e.d. $x'(t) + \sin t x(t) = \sin t$ s'écrit comme

$$(E) \quad x'(t) = -\sin t x(t) + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) $x'(t) = -\sin t x(t)$ sont

$$x_0(t) = \lambda e^{\cos t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

et on cherche une solution particulière de sous la forme $x_p(t) = \lambda(t) e^{\cos t}$.

La fonction $\lambda(t)$ est la primitive

$$\lambda(t) = \int \frac{\sin t}{e^{\cos t}} dt = \int \sin t e^{-\cos t} dt$$

qui se calcule avec le changement de variable $u = -\cos t$ car on a $du = \sin t dt$ et

$$\lambda(t) = \int \sin t e^{-\cos t} dt = \int e^u du \Big|_{u=-\cos t} = e^{-\cos t}.$$

Par conséquent

$$x_p(t) = e^{-\cos t} e^{\cos t} = 1.$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = \lambda e^{\cos t} + 1, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Condition initiale

But: résoudre une e.d. du 1er ordre linéaire avec une condition initiale

$$(EC) \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_*) = x_* \end{cases}$$

Théorème 4: Le système (EC) a une solution unique

$$x(t) = \left(\lambda_* + \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}} dt \right) e^{A(t)}$$

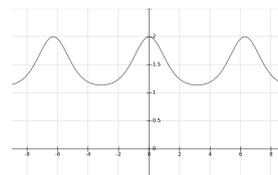
où λ_* est la valeur de λ que l'on obtient en imposant la condition (C) $x(t_*) = x_*$ aux solutions $x(t)$ de (E) dépendent de λ .

Exemple: L'e.d. avec condition initiale (EC) $\begin{cases} x'(t) + \sin t x(t) = \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$

a solution $x(t) = \lambda e^{\cos t} + 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x(0) = \lambda e + 1 = 2 &\Leftrightarrow \lambda e = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1/e. \end{aligned}$$

La solution de (EC) est donc $x(t) = \frac{1}{e} e^{\cos t} + 1$.



3. Équa. diff. du 1er ordre non linéaires

Remarque: Pour une e.d. du 1er ordre non linéaire de la forme générale

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

une méthode de résolution n'existe pas toujours.

On considère un cas résoluble qui couvre plusieurs exemples en physique.

But: résoudre une e.d. du 1er ordre à **variables séparées**

$$(E) \quad x'(t) = a(x(t)) b(t)$$

où a est une fonction continue.

Théorème: Soit A une primitive de la fonction $1/a$ et A^{-1} sa réciproque. Alors une solution $x(t)$ de (E) est

$$x(t) = A^{-1} \left(\int b(t) dt + \lambda \right) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve: On écrit (E) comme $\frac{x'(t)}{a(x(t))} = b(t)$ et on intègre en t avec le changement de variable $u = x(t)$:

$$\int \frac{x'(t)}{a(x(t))} dt = A(x(t)) = \int b(t) dt + \lambda,$$

d'où suit le résultat.

Exemples

Exemples:

- L'e.d. (E) $x'(t) = 2t x(t)^2$ s'écrit comme $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 2t$.

On intègre en t avec le changement de variable $u = x(t)$:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2} dt = \int \frac{1}{u^2} du \Big|_{u=x(t)} = -\frac{1}{x(t)} = \int 2t dt = t^2 + \lambda$$

d'où suit

$$x(t) = -\frac{1}{t^2 + \lambda}, \quad t^2 + \lambda \neq 0.$$

- L'e.d. (E) $x'(t) = \frac{1}{\cos x(t)}$ s'écrit comme $\cos x(t) x'(t) = 1$.

On intègre en t avec le changement de variable $u = x(t)$:

$$\int \cos x(t) x'(t) dt = \int \cos u du \Big|_{u=x(t)} = \sin x(t) = \int dt = t + \lambda$$

d'où suit

$$x(t) = \arcsin(t + \lambda), \quad -1 \leq t + \lambda \leq 1.$$

4. Équations différentielles du 2ème ordre linéaires

But: résoudre l'e.d. du 2ème ordre linéaire

$$(E) \quad \boxed{x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b(t)}$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ sont constantes et b est une fonction continue sur D .

Théorème 1: Les solutions générales $x(t)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)} \quad \text{définies pour } t \in D,$$

où $x_0(t)$ est une solution de l'e.d. homogène (E_0),
et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Note: Une solution **homogène** dépend de deux paramètres réels λ et μ qui déterminent toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ et μ donne une solution.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

Solution de l'équation homogène

Théorème 2: La solution de l'équation homogène

$$(E_0) \quad \boxed{x'' + a_1 x' + a_0 x = 0}$$

dépend des racines du **polynôme caractéristique**

$$P(X) = X^2 + a_1 X + a_0,$$

c'est-à-dire les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0$:

- Si $P(X)$ a deux racines réelles distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{x_0(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a une racine réelle double $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{x_0(t) = (\lambda + \mu t) e^{rt}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a deux racines complexes, elles sont forcément conjuguées, c'est-à-dire de la forme $r \pm i s \in \mathbb{C}$ (cf. ch.1), alors

$$\boxed{x_0(t) = (\lambda \cos(st) + \mu \sin(st)) e^{rt}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemples de solution homogène

Exemples:

- $(E_0) \quad x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 0$

Les racines de $P(X) = X^2 - 3X - 10$ sont

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}.$$

On a deux racines réelles distinctes $r_1 = 5$ et $r_2 = -2$, donc

$$x_0(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ s'écrit $(E_0) \quad y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0$

Les racines de $P(X) = X^2 + X + 1/4$ sont

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1/4}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

On a une racine réelle double $r = -1/2$, donc

$$y_0(t) = (\lambda + \mu t) e^{-t/2} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemples de solution homogène (suite)

- $(E_0) \quad u''(\theta) - 6u'(\theta) + 13u(\theta) = 0$

Les racines de $P(X) = X^2 - 6X + 13$ sont

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

On a deux racines complexes conjuguées, avec partie réelle $r = 3$ et partie imaginaire $s = 2$:

$$u_0(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta)) e^{3\theta} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Second membre simple

Remarque: Pour trouver une solution particulière de l'e.d. (E) , avec second membre, il existe la méthode de la variation des constantes λ et μ dans la solution générale x_0 de (E_0) , mais pour les e.d. du 2ème ordre cette méthode est compliquée, nous traitons des cas particuliers.

But: Trouver une solution particulière de l'e.d.

$$(E) \quad \boxed{x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_1(t) + \dots + b_k(t)}$$

quand le second membre est la somme de termes de la forme

$$\boxed{b_i(t) = P(t) e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))},$$

où $P(t)$ est un polynôme et α , β , K_1 et K_2 sont des constantes.

Exemple: Le second membre $b(t) = 4t^3 - te^{3t} + 5e^t \cos(2t)$ est la somme des trois termes suivants:

$$b_1(t) = 4t^3, \text{ avec } P(t) = 4t^3, \alpha = \beta = 0 \text{ et } K_1 = 1 \text{ et } K_2 \text{ quelconque}$$

$$b_2(t) = -te^{3t}, \text{ avec } P(t) = -t, \alpha = 3, \beta = 0 \text{ et } K_1 = 1 \text{ et } K_2 \text{ quelconque}$$

$$b_3(t) = 5e^t \cos(2t), \text{ avec } P(t) = 5, \alpha = 1, K_1 = 1, K_2 = 0 \text{ et } \beta = 2$$

Solution particulière avec second membre simple

Théorème 3: La solution particulière de (E) est la somme

$$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_k(t)$$

de fonctions correspondantes à chaque $b_i(t)$, de la forme suivante (où Q est un polynôme à trouver, avec $\deg Q = \deg P$):

- Si $b_i(t) = P(t)$, alors

$$x_i(t) = \begin{cases} Q(t) & \text{si } a_0 \neq 0 \\ t Q(t) & \text{si } a_0 = 0 \text{ et } a_1 \neq 0 \\ t^2 Q(t) & \text{si } a_0 = a_1 = 0 \end{cases}$$

- Si $b_i(t) = P(t) e^{\alpha t}$, alors

$$x_i(t) = \begin{cases} Q(t) e^{\alpha t} & \text{si } \alpha \neq r_1, r_2 \\ t Q(t) e^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r_1 \text{ ou } \alpha = r_2 \\ t^2 Q(t) e^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r \end{cases}$$

- Si $b_i(t) = P(t) e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$, alors

$$x_i(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)) & \text{si } \alpha \pm i\beta \neq r \pm is \\ t e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)) & \text{si } \alpha \pm i\beta = r \pm is \end{cases}$$

Exemples de solution particulière

Exemples:

- $(E) \quad x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = (72t^2 - 1) e^t \quad (P(t) = 72t^2 - 1 \text{ et } \alpha = 1)$

L'équation (E_0) a solution $x_0(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t}$ et on a $\alpha \neq r_1, r_2$.

On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c) e^t.$$

On calcule

$$x_p'(t) = (at^2 + (2a + b)t + (b + c)) e^t$$

$$x_p''(t) = (at^2 + (4a + b)t + (2a + 2b + c)) e^t$$

et on remplace dans (E) . On obtient:

$$(E) \iff (-12at^2 + (-2a - 12b)t + (2a - b - 12c)) e^t = (72t^2 - 1) e^t$$

$$\iff \begin{cases} -12a = 72 \\ -a - 6b = 0 \\ 2a - b - 12c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\iff x_p(t) = (-6t^2 + t - 1) e^t$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$x(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t} + (-6t^2 + t - 1) e^t.$$

Exemples de solution particulière (suite)

- $(E) \quad 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 16 e^{-t/2} \quad (P(t) = 16 \text{ et } \alpha = -1/2)$

L'équation (E_0) a solution $y_0(t) = (\lambda + \mu t) e^{-t/2}$ et on a $\alpha = r$.

On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p(t) = at^2 e^{-t/2}.$$

On calcule

$$y_p'(t) = \left(-\frac{1}{2}at^2 + 2at \right) e^{-t/2}$$

$$y_p''(t) = \left(\frac{1}{4}at^2 - 2at + 2a \right) e^{-t/2}$$

et on remplace dans (E) . On obtient:

$$(E) \iff 4 \left(-\frac{1}{2}at^2 + 2at \right) e^{-t/2} + 4 \left(\frac{1}{4}at^2 - 2at + 2a \right) e^{-t/2} + at^2 e^{-t/2} = 16 e^{-t/2}$$

$$\iff 8a = 16 \iff a = 2$$

$$\iff y_p(t) = 2t^2 e^{-t/2}.$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$x(t) = (\lambda + \mu t + 2t^2) e^{-t/2}.$$

Exemples de solution particulière (suite)

- $(E_0) \quad u''(\theta) - 6u'(\theta) + 13u(\theta) = 75 \cos(2\theta) \quad (\alpha = 0 \text{ et } \beta = 2)$

L'équation (E_0) a solution $u_0(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta)) e^{3\theta}$
et on a $\alpha \pm i\beta \neq r \pm is$.

On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme

$$u_p(\theta) = a \cos(2\theta) + b \sin(2\theta).$$

On calcule

$$u_p'(\theta) = -2a \sin(2\theta) + 2b \cos(2\theta)$$

$$u_p''(\theta) = -4a \cos(2\theta) - 4b \sin(2\theta)$$

et on remplace dans (E) . On obtient:

$$(E) \iff (9a - 12b) \cos(2\theta) + (12a + 9b) \sin(2\theta) = 75 \cos(2\theta)$$

$$\iff \begin{cases} 9a - 12b = 75 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\iff u_p(\theta) = 3 \cos(2\theta) - 4 \sin(2\theta).$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$u(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta)) e^{3\theta} + 3 \cos(2\theta) - 4 \sin(2\theta).$$

Conditions initiales

But: résoudre une e.d. du 2ème ordre linéaire avec deux conditions initiales

$$(EC) \quad \boxed{\begin{cases} x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b(t) \\ x(t_*) = x_* \quad \text{et} \quad x'(t_*) = x'_* \end{cases}}$$

Théorème 4: Le système (EC) a une solution unique $x(t)$ (donnée au théorème 3) déterminée par la valeur λ_* et μ_* des constantes λ et μ que l'on obtient en imposant les conditions (C).

Exemple: L'e.d. (EC) $\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = (72t^2 - 1) e^t \\ x(0) = 2 \quad \text{et} \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

a pour solution $x(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t} - (6t^2 - t + 1) e^t$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$x'(t) = 5\lambda e^{5t} - 2\mu e^{-2t} - (6t^2 - t + 1 + 12t - 1) e^t,$$

donc

$$\begin{cases} x(0) = \lambda + \mu - 1 = 2 \\ x'(0) = 5\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 5\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

La solution de (EC) est donc $x(t) = e^{5t} + 2e^{-2t} - (6t^2 - t + 1) e^t$.

TMB – Chapitre 6

Espaces vectoriels et vecteurs

Idée: En physique, il y a des *grandeurs* de deux types:

masse, charge, température = nombre \longrightarrow **scalaire**
(à part l'unité de mesure)

force, vitesse, accélération = point d'application
+ direction (et sens)
+ longueur
= flèche \longrightarrow **vecteur**

Dans ce chapitre:

1. Espaces vectoriels (produit *par scalaire*). Combinaisons linéaires, base, dimension. Exemples: \mathbb{R}^n , vecteurs du plan et de l'espace.
2. Produit scalaire et norme.
3. Produit vectoriel et produit mixte.

1. Espaces vectoriels (produit par scalaire)

Définition : Un **espace vectoriel (sur \mathbb{R})** est un ensemble V muni

- d'une **addition** $\vec{u} + \vec{v}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$,
et d'un **zéro** $\vec{0}$, qu'on appelle aussi élément neutre, tel que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
- d'un **produit par scalaire** $t\vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$ et $t \in \mathbb{R}$,
tel que $t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v}$.

On appelle **vecteurs** les éléments \vec{v} de V et **scalaires** les réels t .

Propriétés élémentaires :

- $\vec{0} \in V$
- pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$, on a $\vec{u} + \vec{v} \in V$
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in V$, on a $t\vec{v} \in V$
- pour tout $\vec{v} \in V$, on a $0\vec{v} = \vec{0}$
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t\vec{0} = \vec{0}$
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in V$, on a $(-t)\vec{v} = -(t\vec{v}) = t(-\vec{v})$
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in V$, on a $t\vec{v} = \vec{0} \iff (t = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0})$

Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels:

- L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ avec les opérations
 - addition:** $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
 - avec **zéro:** $\vec{0} = (0, \dots, 0)$
 - produit par scalaire:** $t(x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ avec les opérations
 - addition:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 - avec **zéro:** fonction nulle $0(x) = 0$
 - produit par scalaire:** $(tf)(x) = tf(x), \quad t \in \mathbb{R}$

Vecteurs du plan et de l'espace

Définition: Rappelons qu'un **vecteur** du plan ou de l'espace est une flèche

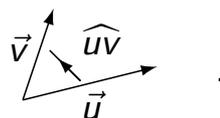
$P \xrightarrow{\vec{v}} Q$, notée $\vec{v} \equiv \overrightarrow{PQ}$, caractérisée par

- le **point d'application** P ;
- la **direction** et le **sens**, donnés par la flèche;
- la **longueur** $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \text{dist}(P, Q) \in \mathbb{R}$.

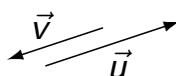
Souvent on identifie les vecteurs qu'on obtient par **translation**, ainsi P change mais on dit que le vecteur \vec{v} ne change pas.

Définition: Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

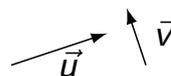
- l'**angle** \widehat{uv} est l'angle orienté de \vec{u} vers \vec{v} .



- \vec{u} et \vec{v} sont **parallèles**, ou **colinéaires**, et on note $\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v}}$, si $\boxed{\sin(\widehat{uv}) = 0}$.



- \vec{u} et \vec{v} sont **perpendiculaires**, ou **orthogonaux**, et on note $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$, si $\boxed{\cos(\widehat{uv}) = 0}$.

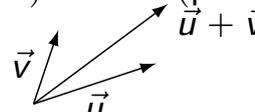


Exemples: Vect(plan) et Vect(espace)

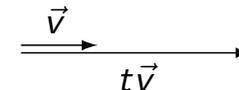
Notation: L'ensemble des vecteurs appliqués en un point fixé O est noté

- Vect(espace) pour les vecteurs de l'espace,
- Vect(plan) pour les vecteurs du plan.

Proposition: Vect(espace) et Vect(plan) sont des espaces vectoriels, avec

- **addition:** $\vec{u} + \vec{v} =$ 

zéro: $\vec{0}$ = vecteur de longueur nulle appliqué en O

- **produit par scalaire:** $t\vec{v} =$ 

Attention: l'ensemble des vecteurs appliqués en tous les points n'est pas un espace vectoriel car il manque le zéro (on l'appelle **espace affine**).

Propriété: Le produit par scalaire caractérise les vecteurs parallèles:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = t\vec{v} \text{ pour un } t \neq 0$$

Combinaisons linéaires

Définition: Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ des vecteurs d'un espace vectoriel V .

- Une **combinaison linéaire** de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ est un vecteur \vec{A} de la forme

$$\vec{A} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \dots,$$

où $r, s, t, \dots \in \mathbb{R}$ s'appellent les **coefficients scalaires**.

Exemple: Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $(5, 4, 9)$ est une combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et $(1, -1, 0)$, car $3(1, 2, 3) + 2(1, -1, 0) = (5, 4, 9)$.

- L'espace vectoriel **engendré** par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles:

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots) = \left\{ r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \dots \mid r, s, t, \dots \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple: Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 0)$ engendrent le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, car les combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} sont

$$r(1, 0, 0) + s(0, 1, 0) = (r, 0, 0) + (0, s, 0) = (r, s, 0)$$

c'est-à-dire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ quand $r, s \in \mathbb{R}$ varient.

Vecteurs liés et vecteurs libres

Définition: Des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots \in V$ sont dits:

- **liés**, ou **linéairement dépendants**, si chacun d'eux est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle ($r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \dots = 0$) avec des coefficients non tous nuls.
- **libres**, ou **linéairement indépendants**, si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs implique que les coefficients sont forcément tous nuls. Autrement dit: $r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \dots = 0 \Rightarrow r = s = t = \dots = 0$.

Exemples:

- $(1, 2)$ et $(3, 6)$ sont liées car $(3, 6) = 3(1, 2)$.
- $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont libres car $a(1, 2) + b(2, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow a, b = 0$.
- Trois vecteurs dans \mathbb{R}^2 sont toujours liées.
- $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$ sont liées car $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$.
- $(1, 2, 3)$ et $(2, 1, 3)$ sont libres car $a(1, 2, 3) + b(2, 1, 3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a, b = 0$.
- $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ et $(4, 5, 9)$ sont liées car $(4, 5, 9) = 2(1, 2, 3) + (2, 1, 3)$.
- Quatre vecteurs dans \mathbb{R}^3 sont toujours liées.

Base et dimension d'un espace vectoriel

Définitions:

- Un ensemble de vecteurs $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\}$ **engendre** un espace vectoriel V si tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$:

$$\vec{v} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + \dots, \quad \text{avec } t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}.$$

- Une **base** de V est un ensemble de vecteurs $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\}$ qui sont libres et engendrent V .
- La base n'est pas unique, mais toutes les bases ont le même nombre d'éléments, qui s'appelle **dimension** de V et est notée $\boxed{\dim V}$. La dimension peut être finie (un nombre) ou infinie.

Exemples:

- Les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^2 , qui s'appelle **base canonique**. Par conséquent, $\boxed{\dim \mathbb{R}^2 = 2}$.
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 , qui s'appelle **base canonique**. Donc $\boxed{\dim \mathbb{R}^3 = 3}$.

Base et dimension de Vect(plan)

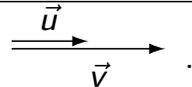
Exemples:

- Un vecteur \vec{v} engendre une droite.
- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non parallèles engendrent un plan.

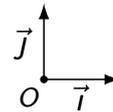
$$\Delta = \{t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\pi = \{s\vec{u} + t\vec{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

- Attention: deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} parallèles n'engendrent pas un plan mais une droite.



- Les deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} de la figure, de longueur 1, forment une base qu'on appelle le **repère cartésien** (ou la base canonique), et qu'on note (O, \vec{i}, \vec{j}) .



Donc $\dim \text{Vect}(\text{plan}) = 2$.

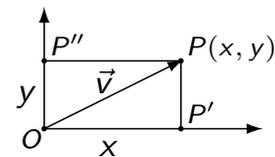
Définition:

- On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un vecteur \vec{v} le couple

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et on note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Si $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, on obtient ainsi les **coordonnées cartésiennes de P**, et on note $P(x, y)$:

$$\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$$

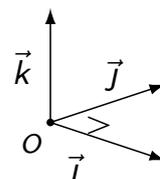


Base et dimension de Vect(espace)

Exemples:

- Trois vecteurs dans l'espace peuvent engendrer une droite (s'ils sont parallèles), un plan (si l'un est combinaison linéaire des autres deux) ou tout l'espace (si aucun n'est combinaison linéaire des autres).

- Les trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de la figure, orthogonaux et de longueur 1, forment une base qu'on appelle le **repère cartésien**, et qu'on note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Donc $\dim \text{Vect}(\text{espace}) = 3$.

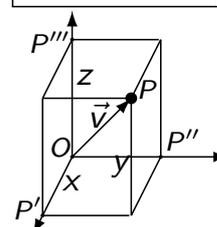
Définition:

- On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un vecteur \vec{v} le triplet

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, et on note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Si $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, on obtient ainsi les **coordonnées cartésiennes de P**, et on note $P(x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$$



Exercice

Exercice: Les vecteurs $\vec{A} = (3, 11, -1)$ et $\vec{B} = (1, 4, 0)$ de \mathbb{R}^3 sont-ils des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (0, 1, -2)$?

Réponse: Un vecteur \vec{E} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} s'il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{E} = x\vec{u} + y\vec{v}$ (*). Cherchons si de tels nombres existent en résolvant cette équation quand $\vec{E} = \vec{A}$ et $\vec{E} = \vec{B}$.

- Pour $\vec{E} = \vec{A} = (3, 11, -1)$, l'équation (*) est:

$$\begin{aligned}(3, 11, -1) &= x(1, 2, 3) + y(0, 1, -2) \\ &= (x, 2x + y, 3x - 2y),\end{aligned}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 11 - 2x = 11 - 6 = 5 \\ 2y = 3x + 1 = 9 + 1 = 10 \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution $x = 3$ et $y = 5$, donc \vec{A} est bien une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} , car $\vec{A} = 3\vec{u} + 5\vec{v}$.

Exercice (suite)

- Pour $\vec{E} = \vec{B} = (1, 4, 0)$, l'équation (*) est:

$$\begin{aligned}(1, 4, 0) &= x(1, 2, 3) + y(0, 1, -2) \\ &= (x, 2x + y, 3x - 2y),\end{aligned}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - 2x = 4 - 2 = 2 \\ 2y = 3x = 3 \end{cases}$$

Celui-ci n'admet pas de solution, car y ne peut pas valoir 2 et $3/2$ au même temps.

Donc \vec{B} n'est pas une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

Exercice

Exercice: Les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, 1)$ forment-ils une base de \mathbb{R}^2 ?

Réponse: Puisque l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 a dimension 2, on sait qu'il faut exactement deux vecteurs pour former une base.

Alors, les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} forment une base si tout vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} , c'est-à-dire si, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}(a, b) &= x(1, 2) + y(-2, 1) \\ &= (x - 2y, 2x + y).\end{aligned}$$

Cette équation donne le système

$$\begin{cases} a = x - 2y \\ b = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2y \\ 2a + 4y + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \frac{2b-4a}{5} = \frac{a+2b}{5} \\ y = \frac{b-2a}{5} \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution $x = \frac{a+2b}{5}$ et $y = \frac{b-2a}{5}$, pour tout choix de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donc \vec{u} et \vec{v} forment bien une base de \mathbb{R}^2 .

2. Produit scalaire

Définition: Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel V est toute opération

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$$

ayant les propriétés suivantes:

- **défini positif:** $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- **bilinéaire:**
 $(t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (t\vec{v})$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- **symétrique:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Autres notations: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv (\vec{v}, \vec{u}) \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \equiv \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$

En méca. quantique: $\langle | = \mathbf{bra}$ et $| \rangle = \mathbf{ket} \Rightarrow \langle | \rangle = \mathbf{bracket}$ (crochet).

Attention: ne pas confondre produit scalaire et produit par un scalaire, qui est une application $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V : (t, \vec{v}) \mapsto t\vec{v}$.

Attention: les espaces vectoriels n'ont pas tous un produit scalaire.

Produit scalaire dans \mathbb{R}^n , $\mathcal{F}([a, b])$ et Vect(espace)

Proposition: Les formules suivantes donnent des produits scalaires:

- Dans \mathbb{R}^3 (et tout \mathbb{R}^n), on a le **produit scalaire euclidien**:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = x x' + y y' + z z'$$

Exemple: $(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6$
 $= 4 - 10 + 18 = 12$

- Dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{F}([a, b])$, on a le **produit scalaire de Hilbert**:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

- Dans Vect(plan) et Vect(espace), on a:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{v}\vec{u})$$

Produit scalaire dans Vect(espace)

Propriétés du produit scalaire dans Vect(espace):

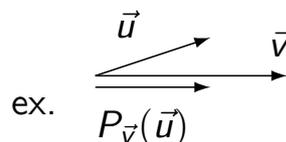
- il caractérise les vecteurs orthogonaux: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

- il donne l'aire:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}^\perp| = \text{aire du parallélogramme de cotés } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

- il donne la projection orthogonale de \vec{u} sur la droite de direction \vec{v} :

$$\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$



- il donne la projection orthogonale de \vec{u} sur le plan engendré par \vec{v} et \vec{w} :

$$\text{Pr}_{\vec{v}, \vec{w}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$$

Exercice

Exercice: Les vecteurs de l'espace $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils parallèles ou orthogonaux?

Réponse: Ils sont parallèles s'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = t \vec{v}$, et ils sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\vec{u} = t \vec{v}$ si:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = 1 \\ 2t = -1 \\ t = 3 \end{cases},$$

ce qui est impossible. Donc \vec{u} et \vec{v} ne sont pas parallèles.

Par contre, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 - 2 + 3 = 0,$$

dont \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Exercice

Exercice: Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la direction de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Réponse: La projection orthogonale de \vec{u} dans la direction de \vec{v} est le vecteur (parallèle à \vec{v}) donné par la formule $\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

Calculons les ingrédients nécessaires:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 5 = -5,$$

et aussi

$$\|\vec{v}\|^2 = 4 + 1 + 1 = 6,$$

donc

$$\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{-5}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}.$$

Norme

Définition: Une **norme** sur un espace vectoriel V est toute application

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

ayant les propriétés suivantes:

- **définie positive:** $\|\vec{v}\| \geq 0$ et $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- **multiplicative:** $\|t\vec{v}\| = |t| \|\vec{v}\|$, où $|t| =$ valeur absolue
- **inegalité triangulaire:** $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Propriété: Tout produit scalaire définit une norme, par la formule

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Attention, le contraire est faux: il existe des normes qui ne viennent pas de produits scalaires.

Normes dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F}([a, b])$ et Vect(espace)

Proposition: Les formules suivantes donnent des normes:

- Dans \mathbb{R}^3 (et dans tout \mathbb{R}^n):

norme euclidienne: $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

norme L^1 : $\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$

norme L^p : $\|(x, y, z)\|_p = \left(|x|^p + |y|^p + |z|^p\right)^{1/p}$, avec $p \in \mathbb{N}$

norme L^∞ : $\|(x, y, z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$

- Dans des sous-ensembles opportuns de $\mathcal{F}([a, b])$:

norme L^2 : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

norme L^1 : $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

norme L^p : $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, avec $p \in \mathbb{N}$

norme L^∞ : $\|f\|_\infty = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$.

- Dans Vect(plan) et Vect(espace): norme = longueur.

Exercice

Exercice: Calculer la distance du point $P(3, -1, 2)$ au point origine O , puis celle du point P au point $Q(1, 0, 3)$.

Réponse: La distance entre $P(x, y, z)$ et O est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire sa norme $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On a donc:

$$\text{dist}(O, P) = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

La distance entre $P(x, y, z)$ et $Q(a, b, c)$ est égale à la longueur du vecteur

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix}.$$

On a donc:

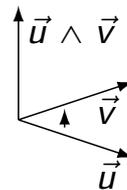
$$\text{dist}(Q, P) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

4. Produit vectoriel dans Vect(espace)

Dans les espaces vectoriels \mathbb{R}^3 et Vect(espace), qui ont pour dimension 3, on peut définir deux autres produits qui n'existent pas dans \mathbb{R}^2 et Vect(plan).

Définition: Le **produit vectoriel** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec:

- direction **orthogonale directe**
- longueur $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{uv})$



Propriétés du produit vectoriel:

- **bilinéaire:**

$$(t\vec{u}) \wedge \vec{v} = t(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (t\vec{v}),$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}, \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

- **anti-symétrique:** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

- il caractérise les vecteurs parallèles: (i.e. $\vec{u} = t\vec{v}$ avec $t \neq 0$).

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

Propriété: En exprimant le produit vectoriel en coordonnées cartésiennes, on obtient une expression valable aussi dans \mathbb{R}^3 :

$$(x, y, z) \wedge (u, v, w) = (yw - zv, -xw + zu, xv - yu).$$

Exemple:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) \wedge (4, -5, 7) &= (2 \cdot 7 - 3 \cdot (-5), -1 \cdot 7 + 3 \cdot 4, 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-5)) \\ &= (14 + 15, -7 + 12, 4 + 10) \\ &= (29, 5, 14)\end{aligned}$$

Produit mixte

Définition: Le **produit mixte** de trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} est le scalaire

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Propriétés du produit mixte:

• **trilinéaire:**

$$\begin{aligned}[t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}] = t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \\ [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}], \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

• **symétrie mixte:**

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \\ &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]\end{aligned}$$

• il donne le volume:

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \text{volume du parallélépipède de cotés } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$

TMB – Chapitre 7

Transformations linéaires et matrices

Dans ce chapitre:

1. Applications linéaires. Structure d'espace vectoriel. Exemples sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , rotations, réflexions, translations, projections.
2. Isomorphismes et isométries. Composées et réciproques. Exemple: vecteurs et coordonnées cartésiennes.
3. Matrices. Structure d'espace vectoriel. Produit, déterminant, matrice inverse.
4. Relation entre applications linéaires et matrices.
5. Symétries (= isométries) et matrices orthogonales. Déplacements, antidéplacements et asymétrie chirale.
6. Résolution matricielle de systèmes d'équations linéaires.

1. Applications linéaires

Soient V et V' deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} .

Définition: Une **application linéaire de V à V'** , appelée aussi **transformation linéaire**, est une application

$$L : V \longrightarrow V', \vec{v} \mapsto \vec{v}' = L(\vec{v})$$

qui respecte les opérations sur V et sur V' , c'est-à-dire qu'on a

- $L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$
- $L(t \vec{v}) = t L(\vec{v})$

pour tout $\vec{v}, \vec{u} \in V$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Propriété: Cela implique que $L(\vec{0}) = L(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot L(\vec{v}) = \vec{0}$.

Déf. équivalente: Une application $L : V \longrightarrow V'$ est **linéaire** si

$$L(s \vec{u} + t \vec{v}) = s L(\vec{u}) + t L(\vec{v})$$

pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Exemples sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

Proposition: Une application de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^m est linéaire si et seulement si ses m composantes sont des polynômes de degré 1 dans les n variables x_1, \dots, x_n , sans termes constants non nuls.

Exemples d'applications linéaires:

- $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (3x + y, -y, y - 2x)$
- $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (z, x - y + z)$
- $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (0, 0, z)$

Exemples d'applications NON linéaires:

- $L(x, y, z) = (x + 1, yz)$: le terme $x + 1$ contient une constante, le terme yz est un polynôme de degré 2.
- $L(x, y) = (x^3 + \sin y, xy^2)$: les termes x^3 et xy^2 sont des polynômes de degré 3, le terme $\sin y$ n'est pas un polynôme.

Exemples sur les fonctions dérivables $C^\infty(\mathbb{R})$

Exemples d'applications linéaires:

- La **dérivation**: $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto (\frac{d}{dx} f) = f'$ est linéaire:

$$\frac{d}{dx}(3f + 2g) = 3 \frac{d}{dx} f + 2 \frac{d}{dx} g.$$

- La **multiplication par x** : $M_x : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto M_x(f)$ définie par $M_x(f)(x) = x f(x)$ est linéaire:

$$\begin{aligned} M_x(3f + 2g)(x) &= x (3f(x) + 2g(x)) = 3(x f(x)) + 2(x g(x)) \\ &= (3M_x(f) + 2M_x(g))(x). \end{aligned}$$

Exemples d'applications NON linéaires:

- La **puissance carrée**: $p : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto p(f)$ définie par $p(f)(x) = f(x)^2$ n'est pas linéaire:

$$\begin{aligned} p(3f + 2g)(x) &= (3f(x) + 2g(x))^2 \\ &= 9f(x)^2 + 12f(x)g(x) + 4g(x)^2, \end{aligned}$$

alors que $(3p(f) + 2p(g))(x) = 3f(x)^2 + 2g(x)^2$.

Exemples sur Vect(plan)

Exemples d'applications linéaires $\text{Vect}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{R}^2)$:

- **Rotation** d'angle θ : $\text{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$

- **Reflexion** autour d'un axe d'angle θ avec Ox :

$$\text{Ref}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta) \\ x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

- **Projections** en direction \vec{i} et \vec{j} : $P_{\vec{i}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ | $P_{\vec{j}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

Exemples d'applications **NON** linéaires:

- **Translation** par un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $T_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

- **Application affine** = application linéaire plus translation. Exemple:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 1 \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espace vectoriel des applications linéaires

Proposition: L'ensemble des applications linéaires $L : V \rightarrow V'$, noté

$\text{Lin}(V, V')$, est un espace vectoriel avec les opérations:

- **addition:** $(L + L')(\vec{v}) = L(\vec{v}) + L'(\vec{v})$,

zéro = application nulle $0(\vec{v}) = \vec{0}$,

- **produit par scalaire:** $(t L)(\vec{v}) = t L(\vec{v})$.

Exemple: Si $L, L' : \text{Vect}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{R}^2)$ sont données par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ x + z \end{pmatrix},$$

alors

$$(L + L') \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ x - y + z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (3 L) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 3z \\ -3y \end{pmatrix}.$$

2. Isomorphismes

Composition d'applications linéaires

Définition: La **composée** de deux applications linéaires $L : U \rightarrow V$ et $L' : V \rightarrow W$ est l'application $L' \circ L : U \rightarrow W$ définie par

$$(L' \circ L)(\vec{u}) = L'(L(\vec{u})).$$

Remarque: L'espace d'arrivé de L doit correspondre à l'espace de départ de L' .

Exemple: Si $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $L' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont données par

$$L(x, y, z) = (3x + z, 2z - y) \quad \text{et} \quad L'(u, v) = (u + 2v, 3v - u),$$

alors on peut calculer la composée $L' \circ L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(L' \circ L)(x, y, z) &= L'(L(x, y, z)) \\ &= L'(3x + z, 2z - y) \\ &= ((3x + z) + 2(2z - y), 3(2z - y) - (3x + z)) \\ &= (3x + z + 4z - 2y, 6z - 3y - 3x - z) \\ &= (3x - 2y + 5z, -3x - 3y + 5z).\end{aligned}$$

Inverse d'une application linéaire

Définition: L'**inverse**, ou **réciroque**, de l'application linéaire $L : U \rightarrow V$ est l'application $L^{-1} : V \rightarrow U$ si elle existe, telle que

$$(L^{-1} \circ L)(\vec{u}) = \vec{u} \quad \text{et} \quad (L \circ L^{-1})(\vec{v}) = \vec{v},$$

pour tout $\vec{u} \in U$ et pour tout $\vec{v} \in V$. Autrement dit, si:

$$L(\vec{u}) = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = L^{-1}(\vec{v})$$

Exemple: Si $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $L(x, y) = (3x + y, -y)$, alors

$$L^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{3}, -v \right),$$

car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}L(x, y) = (3x + y, -y) = (u, v) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = u \\ -y = v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = u - y = u - (-v) = u + v \\ y = -v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{u+v}{3}, -v \right) = L^{-1}(u, v).\end{aligned}$$

Isomorphismes et isométries

Définition: Un **isomorphisme** entre deux espaces vect. V et V' est une application linéaire $L : V \rightarrow V'$ qui admet l'inverse $L^{-1} : V' \rightarrow V$.

On dit alors que V et V' sont **isomorphes**, et on note $V \cong V'$.

Exemples:

- L'application $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $L(x, y) = (3x + y, -y)$ est un isomorphisme, car elle est linéaire et a l'inverse $L^{-1}(u, v) = (\frac{u+v}{3}, -v)$.
- La projection $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $P(x, y, z) = (x, y)$ est linéaire mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'a pas d'inverse. Pourquoi?
- L'application $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $L(x) = x^3$ a l'inverse $L^{-1}(u) = \sqrt[3]{u}$ mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'est pas linéaire.

Propriété: Un isomorphisme $L : V \rightarrow V'$ transforme une base de V en une base de V' . Donc, si $V \cong V'$, on a $\dim V = \dim V'$.

Définition: Si V et V' ont un produit scalaire, un isomorphisme $L : V \rightarrow V'$ est une **isométrie** s'il conserve les produits scalaires:

$$L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dans ce cas il conserve aussi les longueurs (norme) et les angles.

Exemple: vecteurs et coordonnées cartésiennes

Dans le plan: On fixe un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) dans le plan. On peut alors définir l'application

$$L : \text{Vect}(\text{plan}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui associe à tout vecteur \vec{v} ses coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, telles que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

- Cette application est linéaire, car si $L(\vec{v}) = (x, y)$ et $L(\vec{v}') = (x', y')$, alors pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} tL(\vec{v}) + t'L(\vec{v}') &= t(x, y) + t'(x', y') \\ &= (tx + t'x', ty + t'y') = L(t\vec{v} + t'\vec{v}'). \end{aligned}$$

- Aussi, elle a une réciproque $L^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Vect}(\text{plan})$ qui détermine un unique vecteur à partir de coordonnées données.
- On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels: $\text{Vect}(\text{plan}) \cong \mathbb{R}^2$.
- De plus, L préserve les produits scalaires (euclidiens): c'est une isométrie.

Dans l'espace: Même chose, fixer un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ revient à dire que $\text{Vect}(\text{espace}) \cong \mathbb{R}^3$, et cet isomorphisme est une isométrie.

2. Matrices

On veut répondre à la question: *Pourquoi la projection $P(x, y, z) = (x, y)$ n'a-t-elle pas d'inverse?*

Définition: Une **matrice** $m \times n$ à coefficients réels est un tableau

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.

Exemples: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$ matrice 2×3 $\begin{pmatrix} \ln(5) & -2 \\ \pi & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ matrice 3×2

- Une **matrice carrée** est une matrice $n \times n$. **Ex.** $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- Une **matrice colonne** est une matrice $n \times 1$, c'est-à-dire un vecteur à n composantes. **Ex.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- Une **matrice ligne** est une matrice $1 \times n$. **Ex.** $(3 \quad 1 \quad \sqrt{2})$

Espace vectoriel des matrices

Proposition: L'ensemble $\mathcal{M}_{mn} \equiv \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ des matrices $m \times n$ à coefficients réels est un espace vectoriel, avec les opérations

- **addition:** $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$,
et **zéro** = matrice nulle.
- **produit par scalaire:** $t(a_{ij}) = (t a_{ij}) = \begin{pmatrix} t a_{11} & \cdots & t a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t a_{m1} & \cdots & t a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices

Définition: Le **produit** des matrices $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$ et $(b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}$ est la matrice $(c_{ik}) \in \mathcal{M}_{mp}$ avec coefficients

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \text{r\`egle "lignes} \times \text{colonnes".}$$

Le produit est donc une op\eration $\mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{np} \rightarrow \mathcal{M}_{mp}$.

Parmi les produits de matrices plus communs on a:

- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \rightarrow \mathcal{M}_{22}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{31} \rightarrow \mathcal{M}_{21}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \end{pmatrix}$$

Exemples de produits entre matrices

Exemples:

- $\mathcal{M}_{13} \times \mathcal{M}_{32} \rightarrow \mathcal{M}_{12}$: $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (4 \ 5)$

- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{32} \rightarrow \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{31} \rightarrow \mathcal{M}_{21}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{M}_{32} \times \mathcal{M}_{23} \rightarrow \mathcal{M}_{33}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \rightarrow \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \text{ matrice unit\`e ou identit\`e dans } \mathcal{M}_{22}}$

- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \rightarrow \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices carrées inversibles

Définition: Considérons un espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de matrices carrées.

- La matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle **unité** car, pour toute A , on a

$$\boxed{A \mathbb{1} = \mathbb{1} A = A}$$

- L'**inverse** d'une matrice A est la matrice A^{-1} telle que

$$\boxed{A A^{-1} = A^{-1} A = \mathbb{1}}$$

- Une matrice A est **inversible** si la matrice inverse A^{-1} existe.

Remarque: La matrice inverse n'existe pas toujours. En particulier, A^{-1} n'existe pas si A n'est pas carrée, car dans ce cas on ne peut pas calculer l'un des deux produits AA^{-1} ou $A^{-1}A$.

Exemples:

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (Vérifier!)
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Pourquoi?

Déterminant des matrices carrées

Définition: Le **déterminant** d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}$ est le nombre réel, noté $\det A$ ou $|a_{ij}|$, défini comme suit:

- pour $n = 2$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

- pour $n = 3$, avec un développement à signes alternés sur une ligne ou une colonne (ici, la première ligne):

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemples: $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$, $\det \mathbb{1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

Propriétés: Il en résulte une application $\det : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

- \det n'est pas une application linéaire, car $\det(tA) \neq t \det(A)$ et $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

- Par contre, si A est de taille n , on a: $\det(tA) = t^n \det(A)$.

- De plus: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Calcul de la matrice inverse

Proposition:

Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

- En particulier,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det A = ad - bc \neq 0.$$

- Dans ce cas, sa matrice inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemples:

- Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\det A = 2$, donc A est inversible. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pour $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ on a $\det B = 0$, donc B n'est pas inversible.

Exercice

Exercice: Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse: D'abord on vérifie que A est inversible:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - (-1) \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) + 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) \\ &= 0 + (2 + 3) + 0 = 5. \end{aligned}$$

On cherche alors la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ telle que $AA^{-1} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a & y - b & z - c \\ 2x + 3u & 2y + 3v & 2z + 3w \\ -x + u & -y + v & -z + w \end{pmatrix},$$

ceci donne un système de 9 équations et 9 inconnues

$$\begin{cases} x - a = 1 & y - b = 0 & z - c = 0 \\ 2x + 3u = 0 & 2y + 3v = 1 & 2z + 3w = 0 \\ -x + u = 0 & -y + v = 0 & -z + w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & y = 1/5 & z = -3/5 \\ a = -1 & b = 1/5 & c = -3/5 \\ u = 0 & v = 1/5 & w = 2/5 \end{cases}$$

et détermine la matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -3/5 \\ -1 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Lien entre applications linéaires et matrices

Proposition: Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de taille $m \times n$, soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par

$$L(\vec{x}) = A \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ceci donne une application

$$\Phi : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad A \mapsto \Phi(A) = L.$$

- Φ est linéaire: $\Phi(tA + t'A') = t\Phi(A) + t'\Phi(A') = tL + t'L'$.
- Φ a la réciproque: $\Phi^{-1} : \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \quad L \mapsto \Phi^{-1}(L) = A$.
- Φ est donc un isomorphisme d'esp. vect.: $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \cong \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Exercice: lien entre applications linéaires et matrices

Exercice: Pour les matrices A suivantes, trouver l'application linéaire L correspondante.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, donc $L \in \text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4z \\ -x + 3y - 2z \end{pmatrix}.$$

On a donc $L(x, y, z) = (5x + 4z, -x + 3y - 2z)$.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, donc $L \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - y \\ 3y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}.$$

On a donc $L(x, y) = (5x - y, 3y, 4x - 2y)$.

Exercice: lien entre applications linéaires et matrices

Exercice: Pour les applications linéaires L suivantes, trouver la matrice A correspondante.

- $L(x, y, z) = (x - z, 3y + z - 2x)$

Réponse: On a $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donc on s'attend $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$: on écrit

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -2x + 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donc la matrice associée à L est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\text{Rot}_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ (**rotation d'angle θ**)

Réponse: On a $\text{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donc on s'attend $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$: on écrit

$$\text{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donc la matrice de rotation d'angle θ est $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Propriétés de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \cong \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Considérons encore l'isomorphisme $\Phi : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Propriétés:

- Φ transforme le produit de matrices en composée d'applications lin.:

$$\boxed{\Phi(A' A) = L' \circ L}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \boxed{(A' A) \vec{x} = L'(L(\vec{x}))}.$$

- Φ transforme la matrice inverse en l'application lin. réciproque:

$$\boxed{\Phi(A^{-1}) = L^{-1}}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \boxed{A^{-1} \vec{y} = L^{-1}(\vec{y})}.$$

- Par conséquent, si $\Phi(A) = L$ alors:

$$\boxed{L \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}}$$

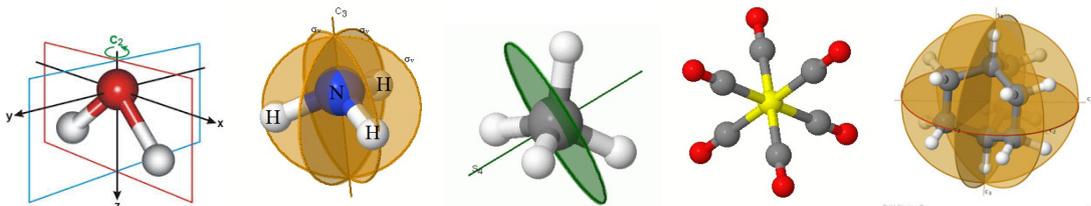
Exemple: La projection $P(x, y, z) = (x, y)$ n'est donc pas inversible car sa matrice associée ne l'est pas, puisqu'elle n'est pas carrée.

Par conséquent, P n'est pas un isomorphisme.

5. Symétries

Définition: Un objet est **symétrique** s'il ne change pas de forme quand il est soumis à une transformation du plan ou de l'espace, qui s'appelle alors **symétrie** de l'objet.

Exemples: objets symétriques par des symétries centrales (rotations), axiales (réflexions) et mixtes.



- La *forme* d'un objet est caractérisée par les *droites parallèles*, l'*ampleur des angles* et les *longueurs*, données par le produit scalaire.
- Une **symétrie** (au sens physique) est donc une transformation qui préserve ces caractéristiques: c'est une isométrie du plan ou de l'espace !

Matrices orthogonales

Définition: La **transposée** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Exemples:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi \\ 3\pi \end{pmatrix}^T = (\pi \quad 3\pi), \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propriété: Si A est une matrice carrée, on a $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$.

Définition: Une matrice carrée A est **orthogonale** si $\boxed{A^{-1} = A^T}$.

Exemples:

- les rotations: $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- les réflexions: $\text{Ref}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriétés: Si A est orthogonale, on a $\boxed{\det(A) = \pm 1}$, car

$$(\det(A))^2 = \det(A) \det(A^T) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

(Anti)déplacements et asymétrie chirale

Proposition:

Une transformation du plan ou de l'espace est une isométrie (symétrie) si et seulement si sa matrice associée est orthogonale.

Définition: On distingue donc les

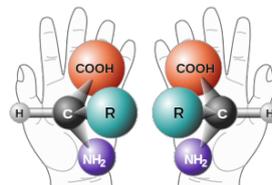
- **isométries directes**, données par des matrices orthogonales A avec $\det(A) = +1$, qui préservent l'orientation des angles (rotations),
- **isométries inverses**, données par des matrices orthogonales A avec $\det(A) = -1$, qui inversent l'orientation des angles (reflexions).

Attention: en math on appelle "symétrie" seulement les isométries directes.

Définition:

- Un **déplacement** est une isométrie directe plus une translation.
- Un **antidéplacement** est une isométrie inverse plus une translation.

Définition: Un objet est **chiral** si aucun déplacement ne peut l'identifier à son image miroir (reflexe), comme nos mains. C'est donc un objet asymétrique.



Exercice

Exercice: Les transformations données par les matrices suivantes, sont-elles des symétries (directes ou inverses) ou des projections?

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse: On a

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1,$$

donc A est inversible (un isomorphisme), car $\det(A) \neq 0$. Après calculs, on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T,$$

donc A est une matrice orthogonale, donc une isométrie (= symétrie). Puisque $\det(A) = 1$, on a une symétrie directe. Effectivement, on a

$$A = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & -\sin(3\pi/2) & 0 \\ \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rot}_{3\pi/2}^{Oz},$$

donc cette matrice représente la rotation d'angle $3\pi/2$ autour de l'axe Oz .

Exercice (suite)

- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc B est inversible. Après calculs, on trouve $B^{-1} = B^T (= B)$, donc B est une matrice orthogonale. Puisque $\det(B) = -1$, on a une symétrie inverse. Effectivement, on a

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \text{Ref}_{\pi/4}^{xOz},$$

qui représente la reflexion par rapport à un plan contenant l'axe Oy et qui intersecte le plan xOz en une droite penchée de $\pi/4$ sur Ox .

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse: Puisque $\det(C) = 0$, la matrice n'est pas inversible, donc elle ne représente pas une symétrie. C'est une projection sur le plan xOy , mais ce n'est pas une projection orthogonale (ou isométrique), car $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right) = 10$ implique que la matrice C dilate les longueurs.

6. Systèmes d'équations linéaires

Définition: Un **système d'équations linéaires** en n variables (x_1, \dots, x_n) est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Un tel système peut avoir une solution, plusieurs solutions ou aucune solution, selon la dépendance mutuelle des équations.

Exemples:

- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ admet une solution $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$ admet infinité de solutions: tous les points de la droite d'équation $y = 2x - 4$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ n'admet aucune solution, car si $2x - y = 4$ alors $6x - 3y = 3(2x - y)$ ne peut pas s'annuler.

Pour connaître les solutions il faut parfois faire de longs calculs (surtout si $n \geq 3$), qui se prêtent à de nombreux erreurs.

Voici une méthode de résolution qui réduit les calculs à l'essentiel.

Équation matricielle

Proposition:

- En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

le système précédent est équivalent à l'équation matricielle

$$\boxed{AX = B}.$$

- Cette équation admet une solution unique si et seulement si

$\boxed{\det(A) \neq 0}$, et dans ce cas la solution est donnée par le produit de matrices

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Exemples

Exemples:

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle comme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = 6 - (-6) = 12$, il admet bien une solution unique $X = A^{-1}B$.
On la calcule:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/12 & 1/12 \\ -6/12 & 2/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

donc on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/4 + 0 \\ -4/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle comme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = -6 - (-6) = 0$, ce système n'admet pas de solution unique.

TMB – Chapitre 8

Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

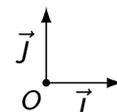
Dans ce chapitre:

1. Coordonnées cartésiennes du plan. Vecteurs. Droites, coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).
2. Coordonnées cartésiennes de l'espace. Vecteurs. Plans, droites, quadriques (sphère, cylindre, cône, parabolide, hyperboloïde).

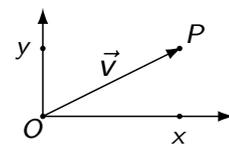
1. Géométrie cartésienne dans le plan

Rappel sur les coordonnées cartésiennes

On fixe un **repère cartésien** (O, \vec{i}, \vec{j}) , où O est un point et (\vec{i}, \vec{j}) est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\text{Vect}(\text{plan})$, i.e. telle que $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. On a alors:



- Tout **vecteur** \vec{v} **appliqué en** O s'écrit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$:
les scalaires $x, y \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartésiennes** de \vec{v} et représentent les **projections orthogonales** de \vec{v} dans les directions \vec{i} et \vec{j} . On note: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



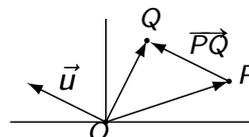
- On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un **point** P le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $P(x, y)$.

- Pour résumer: $\text{plan} + \text{repère cartésien} \equiv \text{Vect}(\text{plan}) \cong \mathbb{R}^2$.

- Tout **vecteur affine** \overrightarrow{PQ} s'écrit comme

$$\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}$$

où $\vec{u} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j}$.



Calcul vectoriel en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors:

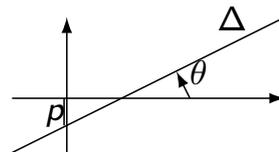
- **addition:** $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **produit par scalaire:** $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$ ex. $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **produit scalaire:** $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$ ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 6 = -4$
- **longueur:** $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$
- **vecteurs orthogonaux:** $\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **vecteurs parallèles:** $\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **projection orthogonale:** $\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \frac{x'x + y'y}{x^2 + y^2} \vec{v}$ ex. $\text{Pr}_{\vec{r}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{1^2 + 0^2} \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Droites

Droite (affine): $\Delta = \left\{ P(x, y) \mid ax + by + c = 0 \right\}$ ($a, b \neq (0, 0)$).

Si $b \neq 0$ alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + p$

où $m = \tan \theta$



Si $a \neq 0$ alors $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par O , i.e. $c = 0$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à $\Delta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- **Vecteur directeur** de $\Delta = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple: $x - 5y = 0$ est une droite vectorielle,

avec vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et vecteur directeur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

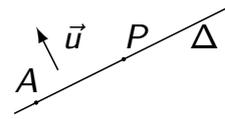
$x + 3 = 5y$ est une droite affine de mêmes vecteurs normal et directeur.

Droites particulières

- Droite passant par $A = (a_1, a_2)$ et $\perp \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

équation: $(x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 = 0$

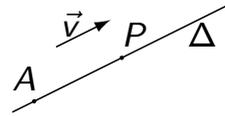


- Droite passant par $A = (a_1, a_2)$ et $\parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$

éq. paramétrique: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

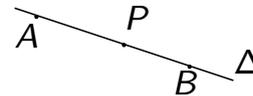
éq. cartésienne: $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$



- Droite passant par $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$:

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$

équation: $\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$

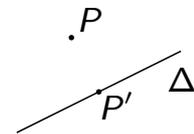


Distance et aire d'un parallélogramme

Distance:

- d'un point $P(x, y)$ à un point $P'(x', y')$:

$$\text{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$



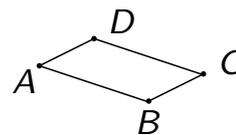
- d'un point $P(x_0, y_0)$ à une droite Δ d'éq. $ax + by + c = 0$: on appelle P' la projection orthogonale de P sur la droite Δ , alors

$$\text{dist}(P, \Delta) = \text{dist}(P, P') = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Aire du parallélogramme de sommets

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$:

$$\text{Aire} = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^\perp| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$



Puisque $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AD}^\perp = \begin{pmatrix} y_D - y_A \\ -(x_D - x_A) \end{pmatrix}$, donc

$$\text{Aire} = |(x_B - x_A)(y_D - y_A) - (y_B - y_A)(x_D - x_A)|$$

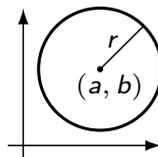
Coniques: cercle, ellipse

Définition: Une conique est une courbe plane obtenue en prenant l'intersection entre un cône de révolution et un plan. Analytiquement, on définit une conique comme l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

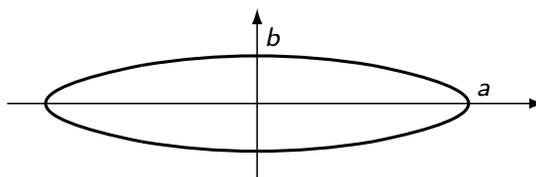
• **Cercle:** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

centre (a, b) , rayon r



• **Ellipse:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

centre $(0, 0)$, axes \vec{i} et \vec{j} .



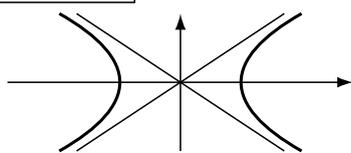
Coniques: hyperbole, parabole

• **Hyperbole:**

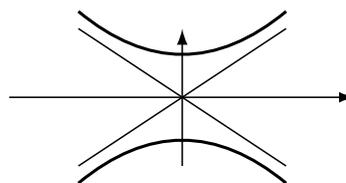
centre $(0, 0)$, axes \vec{i} et \vec{j} , asymptotes $y = \pm \frac{b}{a}x$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

cas +1:

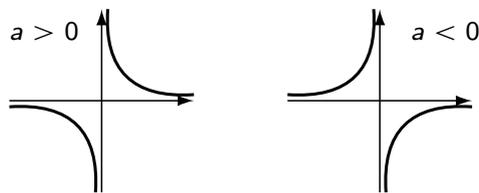


cas -1:



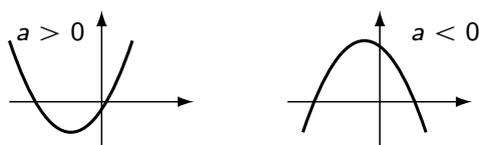
ou bien: $y = \frac{a}{x}$

centre $(0, 0)$, asymptotes \vec{i} et \vec{j}



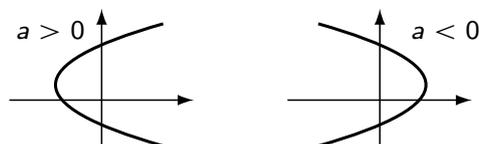
• **Parabole:** $y = ax^2 + bx + c$

axe parallèle à \vec{j}



ou bien: $x = ay^2 + by + c$

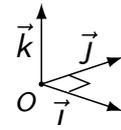
axe parallèle à \vec{i}



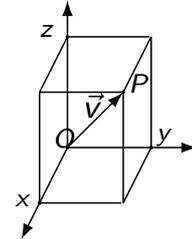
2. Géométrie cartésienne dans l'espace

Rappel sur les coordonnées cartésiennes

On fixe un **repère cartésien** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\text{Vect}(\text{espace})$. On a alors:



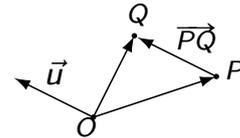
- Tout **vecteur** \vec{v} **appliqué en** O s'écrit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: les scalaires $x, y, z \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartésiennes** de \vec{v} et représentent les **projections orthogonales** de \vec{v} dans les directions \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} . On note: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.



- On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un **point** P le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $P(x, y, z)$.

- Pour résumer: $\text{espace} + \text{repère cartésien} \equiv \text{Vect}(\text{espace}) \cong \mathbb{R}^3$.

- Un **vecteur affine** est $\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}$ où $\vec{u} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$.



Calcul vectoriel en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

- **addition:** $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

- **produit par un scalaire:** $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$ ex. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- **produit scalaire:** $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$

ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 + 4 = 8$

- **longueur:** $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Calcul vectoriel (suite)

• **produit vectoriel:**
$$\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

ex.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 8 \\ -(2 + 4) \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

• **produit mixte:**

$$[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''] = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$$

ex.
$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = (2 - 3) - 2(-3 - 1) + 3(2 - 2) = -1 + 8 = 7$$

Autre formule pour le **produit mixte**

$$[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''] = (\vec{v} \wedge \vec{v}') \cdot \vec{v}''$$

• **vecteurs orthogonaux:**
$$\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

ex.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• **vecteurs parallèles:**

$$\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v}' = t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \\ z' = tz \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

alternative:
$$\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

ex.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

• **projection orthogonale:**
$$\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \frac{x'x + y'y + z'z}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{v} = \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

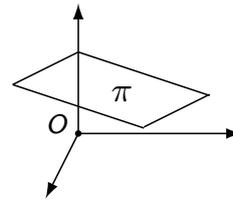
ex.
$$\text{Pr}_{5\vec{j}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1 \times 0 + 2 \times 5 + 3 \times 0}{0^2 + 5^2 + 0^2} 5\vec{j} = 2\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plans

Plan (affine):

$$\pi = \left\{ P(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$



Attention: un plan est un espace vectoriel de dimension 2 si et seulement si il passe par O , i.e. $d = 0$.

- **Vecteur orthogonal ou normal** à $\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple:

$$x - 5y - 2z = 0 \text{ est un plan vectoriel, de vecteur normal } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$x + 3 = 5y + 2z \text{ est un plan affine de vecteur normal } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Plans particuliers

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\perp \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:

$$\text{condition: } \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{équation: } u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0$$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** \parallel à $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$:

$$\text{condition: } [\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v} + t'\vec{v}'$$

$$\text{équation paramétrique: } \begin{cases} x - a_1 = tv_1 + t'v'_1 \\ y - a_2 = tv_2 + t'v'_2 \\ z - a_3 = tv_3 + t'v'_3 \end{cases}$$

équation cartésienne:

$$(x - a_1)(v_2v'_3 - v_3v'_2) - (y - a_2)(v_1v'_3 - v_3v'_1) + (z - a_3)(v_1v'_2 - v_2v'_1) = 0$$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ **et** $C = (c_1, c_2, c_3)$:

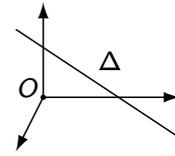
$$\text{condition: } [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$

équations: comme le cas précédent.

Droites

Droite (affine): $\Delta = \pi \cap \pi'$

$$\Delta = \left\{ P(x, y, z) \mid \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right\}$$



avec $(0, 0, 0) \neq (a, b, c) \nparallel (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par O , i.e. $d = 0$ et $d' = 0$.

Exemple:

La droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ est l'axe Oz (vectoriel).

La droite d'équations $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ est parallèle à l'axe Oz (affine).

Droites particulières

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** \parallel à $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

équation paramétrique: $\begin{cases} x - a_1 = tv_1 \\ y - a_2 = tv_2 \\ z - a_3 = tv_3 \end{cases}$

équation cartésienne: $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $B = (b_1, b_2, b_3)$:

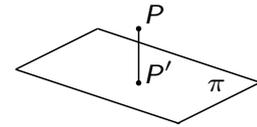
condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

équation: comme le cas précédent.

Distance et volume

Distance:

- d'un point $P(x, y, z)$ à un point $P'(x', y', z')$:



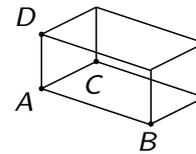
$$\text{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

- d'un point $P(x, y, z)$ à un plan π d'éq. $ax + by + cz + d = 0$: on appelle P' la projection orthogonale de P sur le plan π , alors

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P') = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Volume du parallélépipède de sommets A, B, C, D , etc:

$$\text{Vol} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|.$$



Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors

$$\text{Vol} = |x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')|.$$

Surfaces Quadriques

Les surfaces quadriques sont des surfaces de l'espace euclidien de dimension 3 qui sont définies comme suit:

Quadrique: $\mathcal{Q} = \left\{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0 \right\}$,

où $f(x, y, z)$ est un polynôme de degré 2.

Les quadriques plus connues:

- Cylindre:** $x^2 + y^2 = r^2$

- Cône:** $x^2 + y^2 = z^2$

- Sphère:** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

- Ellipsoïde:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- Hyperboloïde à une nappe:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Hyperboloïde à deux nappes:**

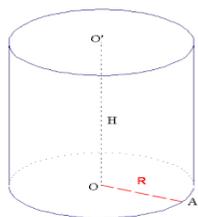
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Paraboloïde:** $z = xy$

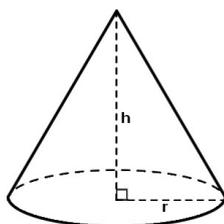
ou bien: $z = x^2 + y^2$

Quelques images de surfaces quadriques

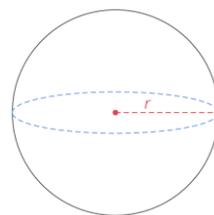
Cylindre



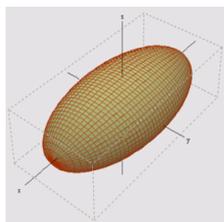
Cône



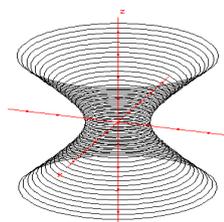
Sphère



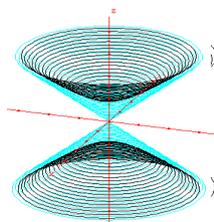
Ellipsoïde



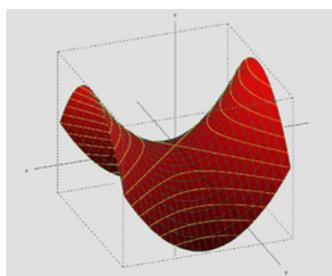
Hyper 1



Hyper 2



Paraboloïde hyp.



Paraboloïde ellip.

