Cohomologie rationelle des groupes de Lie classiques

Alessandra Frabetti

Note d'exposé au groupe de travail de Topologie Algébrique
sur *Cohomologie rationelle et modulo p des groupes de Lie compacts*,
Université de Lausanne, A.A. 2000-2001

14 novembre 2000

Abstract

Dans ces notes on rappelle la liste des groupes de Lie classiques, avec tores maximaux et groupes de Weyl, et on montre comment calculer leur cohomologie singuliere.

Référence: **M. Mimura, T. Toda**, *Topology of Lie Groups, I and II*, Transl. of Math. Monographs Vol. 91, AMS 1991.

1 Groupes de Lie classiques

Soit $\mathbb{F}$ l'un des trois corps des nombres réels $\mathbb{R}$, complexes $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ ou quaternioniques $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ avec la topologie respectivement de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. On remarque que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont commutatifs, alors que $\mathbb{H}$ ne l'est pas.

On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}$, consideré comme un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et un anneau avec le produit de matrices "ligne par colonne". On dénote par I_n l'unité de ce produit, i.e. la matrice diagonale où tous les coefficients diagonaux sont 1.

Par *groupes classiques* on indique les groupes suivants de matrices à coefficients dans $\mathbb{F}$:

- **Groupe général linéaire.** L'ensemble

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) &= \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \det A \neq 0\} \qquad \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) &= \left\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \exists\ A^{-1} : AA^{-1} = \mathrm{I}_n\right\} \end{aligned}$$

  est un groupe dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, ouvert dans $\mathbb{F}^{n^2}$, non connexe si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et connexe si $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

- **Groupe spécial linéaire.** Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \det A = 1\}$$

  est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ fermé, localement compact et connexe. Exemple :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1 \right\}.$$

- **Groupe orthogonal.** Soit A^t la matrice transposée de A, i.e. $(a_{ij})^t = (a_{ji})$. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AA^t = I_n\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ compact et non connexe. Puisqu'il est fermé, pour montrer qu'il est compact il suffit de montrer qu'il est borné:

$$(a_{ij}) \in \mathrm{O}(n) \Longrightarrow (a_{ij})(a_{ji}) = I_n \Longrightarrow |a_{ij}|^2 = a_{ij}a_{ij} \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = 1.$$

Il n'est pas connexe, parce que l'application $\det : \mathrm{O}(n) \longrightarrow \{1, -1\}$ est continue et surjective. Example : $\mathrm{O}(1) = \{1, -1\}$.

- **Groupe spécial orthogonal.** L'ensemble

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n) \quad = \quad \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ compact et connexe. De plus, on a

$$\mathrm{O}(n) \quad = \quad \mathrm{SO}(n) \cup \mathrm{SO}^-(n),$$

où $\mathrm{SO}^-(n) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \det A = -1\}$. Exemples : $\mathrm{SO}(1)) = \{1\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathrm{SO}(3) &= \left\{ \text{rotations dans } \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

- **Groupe unitaire.** Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, soit A^* la matrice des conjugués complexes de la transposée de A, i.e. $(a_{ij})^* = (\bar{a}_{ji})$. L'ensemble

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{U}(n) \quad = \quad \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), AA^* = I_n\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ compact et connexe. (Pour montrer qu'il est compact, même méthode que pour $\mathrm{O}(n)$.) Exemple : $\mathrm{U}(1)) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \cong \mathbb{S}^1$.

- **Groupe spécial unitaire.** Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, l'ensemble

$$\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n) \quad = \quad \{A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}), \det A = 1\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ compact et connexe. Exemples : $\mathrm{SU}(1)) = \{1\}$,

$$\mathrm{SU}(2) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}.$$

- **Groupe symplectique.** Pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, l'ensemble des matrices unitaires

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{H}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}), AA^* = I_n\}$$

est plus souvent identifié avec le groupe suivant de matrices complexes (à l'aide de l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$),

$$\mathrm{Sp}(n) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(2n) \right\},$$

qui est compact et connexe. Exemple : $\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2)$.

2 Tores maximaux

Le *tore maximal* d'un groupe G est le sous-groupe abélien maximal T de G (unique à conjugaison près). Un tore T est toujours de la forme $\mathbb{T}^k = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (k fois), où k est la dimension de $\mathbb{T}^k$ comme groupe de Lie. C'est appelé le *rang* de G.

On ne considère pas $\mathrm{O}(n)$ car il n'est pas connexe.

- **Groupe unitaire.** Pour $n = 1$, le groupe $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ est abélien, donc il est un tore. Pour $n \geq 2$, le tore maximale de $\mathrm{U}(n)$ est

$$T(\mathrm{U}(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{S}^1 \right\} \cong \mathbb{T}^n,$$

  donc $\operatorname{rang} \mathrm{U}(n) = n$.

- **Groupe spécial unitaire.** Pour $n = 1$, le groupe $\mathrm{SU}(1) \cong \{1\}$ est trivial. Pour $n \geq 2$, le tore maximale de $\mathrm{SU}(n)$ est

$$\begin{aligned} T(\mathrm{SU}(n)) &= T(\mathrm{U}(n)) \cap \mathrm{SU}(n) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{S}^1, \Pi_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\} \cong \mathbb{T}^{n-1}, \end{aligned}$$

  donc $\operatorname{rang} \mathrm{SU}(n) = n - 1$.

- **Groupe spécial orthogonal.** Pour $n = 1$, le groupe $\mathrm{SO}(1) \cong \{1\}$ est trivial. Pour $n \geq 2$, on a deux descriptiones différentes selon la parité de n. Si $n = 2m$ est pair,

$$\begin{aligned} T(\mathrm{SO}(2m)) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & ... & & \\ & & & \alpha_m & -\beta_m \\ 0 & & & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}, \alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1, k = 1, ..., m \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 & & 0 \\ & ... & \\ & & \alpha_m + i\beta_m \end{pmatrix}, \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{S}^1, k = 1, ..., m \right\} \cong \mathbb{T}^m, \end{aligned}$$

  et donc $\operatorname{rang} \mathrm{SO}(2m) = m$. Si $n = 2m + 1$ est impair,

$$\begin{aligned} T(\mathrm{SO}(2m+1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & & & & \\ & & ... & & & \\ & & & \alpha_m & -\beta_m & \\ 0 & & & \beta_m & \alpha_m & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1, k = 1, ..., m \right\} \\ &\cong \mathbb{T}^m \times 1, \end{aligned}$$

  et donc $\operatorname{rang} \mathrm{SO}(2m + 1) = m$.

- **Groupe symplectique.** Pour tout $n \geq 1$ on a

$$T(\mathrm{Sp}(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}, |\lambda_k| = 1, k = 1, ..., n \right\} \cong \mathbb{T}^n,$$

donc $\operatorname{rang} \mathrm{Sp}(n) = n$.

3 Groupes de Weyl

Le *groupe de Weyl* d'un groupe G, avec tore maximal T, est le groupe

$$W(G) = N(T)/T,$$

où $N(T) = \{g \in G, gT = Tg\}$ est le normalisateur de T dans G. Le groupe de Weyl $W(G)$ agit sur le tore T par conjugaison, et l'action est effective, i.e. $W(G)$ est un sous-groupe de transformations de T (les conjugaisons par éléments de G). De plus, $W(G)$ ne dépend pas du choix de T, est fini, et peut être réalisé comme groupe de reflections.

- **Groupe unitaire.** Pour tout $n \geq 1$, on a un isomorphism

$$W(\mathrm{U}(n)) \cong \Sigma_n,$$

entre le groupe de Weyl de $\mathrm{U}(n)$ et le groupe de permutations sur n éléments. Une permutation $\sigma \in \Sigma_n$ agit sur un élément $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$ du tore $T(\mathrm{U}(n)) \cong \mathbb{T}^n$ comme

$$\sigma(\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n) = \lambda_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus \lambda_{\sigma(n)}.$$

- **Groupe spécial unitaire.** Pour tout $n \geq 2$, on a un isomorphism

$$W(\mathrm{SU}(n)) \cong \Sigma_n.$$

Un élément du tore $T(\mathrm{SU}(n)) \cong \mathbb{T}^{n-1}$ est en fait de la forme $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$ avec $\lambda_n = 1/\Pi_{k=1}^{n-1}\lambda_k$, et donc Σ_n agit sur $T(\mathrm{SU}(n))$ comme pour le groupe $\mathrm{U}(n)$.

- **Groupe spécial orthogonal.** Pour $n \geq 2$, on a deux descriptions différentes de $W(\mathrm{SO}(n)$ selon la parité de n. Si $n = 2m$ est pair, le groupe de Weyl

$$W(\mathrm{SO}(2m)) \cong \Sigma_m \ltimes \mathrm{Sign}_m^+$$

est isomorphe à la composition d'une permutation et d'un nombre pair de changements de signe $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_m) \in \mathrm{Sign}_m^+$, où $\epsilon_k = \pm 1$ et $\Pi_{k=1}^m \epsilon_k = 1$. L'action sur un élément $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m$ du tore $T(\mathrm{SO}(2m)) \cong \mathbb{T}^m$ est

$$\sigma \circ \epsilon(\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n) = \lambda_{\sigma(1)}^{\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_{\sigma(n)}^{\epsilon_m}.$$

Si $n = 2m+1$ est impair, le groupe de Weyl

$$W(\mathrm{SO}(2m+1)) \cong \Sigma_m \ltimes \mathrm{Sign}_m$$

est isomorphe à la composition d'une permutation et d'un nombre quelconque de changements de signe $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_m) \in \mathrm{Sign}_m$, avec $\epsilon_k = \pm 1$. L'action sur un élément $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m$ du tore $T(\mathrm{SO}(2m+1)) \cong \mathbb{T}^m$ est comme dans le cas précédent.

- **Groupe symplectique.** Pour tout $n \geq 1$, on a

$$W(\mathrm{Sp}(n)) \cong \Sigma_n \circ \mathrm{Sign}_n,$$

avec la même action sur $T(\mathrm{Sp}(n)) \cong \mathbb{T}^n$ que pour le groupe spécial orthogonal.

4 Cohomologie singulière

Soit R un corps commutatif. La *cohomologie singulière* d'un espace topologique X à valeurs dans R est la cohomologie du complexe dual du complex d'homologie simpliciale, ayent pour k-chaînes l'ensemble des applications continues du simplex standard de dimension k vers X.

On dénote par $\Delta_R(e_1, ..., e_r)$ l'algèbre commutative graduée sur R avec base $\{e_{k_1} \cdot \ldots \cdot e_{k_s},\ 1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_s \leq r\}$. Alors, le quotient $\Delta_R(e_1, ..., e_r)/\langle e_k^2 \rangle \cong \Lambda_R(e_1, ..., e_r)$ est l'algèbre extérieure. En particulier, si la caractéristique de R est $\neq 2$ et le degré de chaque e_k est impair, alors dans $\Delta_R(e_1, ..., e_r)$ on a $e_k^2 = 0$.

Dès maintenant, on dénote par e_k des éléments en degré k.

Théorème 4.1 *La cohomologie des groupes classiques compacts est la suivante:*

- **Groupe unitaire.**
$$H^*(\mathrm{U}(n); R) \quad \cong \quad \Lambda_R(e_1, e_3, ..., e_{2n-1}). \tag{1}$$

- **Groupe spécial unitaire.**
$$H^*(\mathrm{SU}(n); R) \quad \cong \quad \Lambda_R(e_3, e_5, ..., e_{2n-1}). \tag{2}$$

- **Groupe symplectique.**
$$H^*(\mathrm{Sp}(n); R) \quad \cong \quad \Lambda_R(e_3, e_7, ..., e_{4n-1}). \tag{3}$$

- **Groupe spécial orthogonal.** *Si la caractéristique de R est 2, alors*
$$H^*(\mathrm{SO}(n); R) \quad \cong \quad \Delta_R(e_1, e_2, ..., e_{n-1}). \tag{4}$$

  Sinon
$$H^*(\mathrm{SO}(n); R) \quad \cong \quad \begin{cases} \Lambda_R(e_3, e_7, ..., e_{2n-3}), & n \textit{ impair} \\ \Lambda_R(e_3, e_7, ..., e_{2n-5}, e_{n-1}), & n \textit{ pair.} \end{cases} \tag{5}$$

- **Groupe orthogonal.**
$$H^*(\mathrm{O}(n); R) \quad \cong \quad H^*(\mathrm{SO}(n); R) \otimes H^*(\mathrm{SO}^-(n); R). \tag{6}$$

Preuve. On obtient ces résultats comme corollaire du calcul de la cohomologie des variétés de Stiefel $V_{n+m,n}(\mathbb{F}) = \frac{\mathrm{U}(n+m,\mathbb{F})}{\mathrm{U}(m,\mathbb{F})}$, comme suit :

- pour (1), $\mathrm{U}(n) = \frac{\mathrm{U}(n+m)}{\mathrm{U}(m)}$ pour $m = 0$ (on pose $\mathrm{U}(0) = \{1\}$);
- pour (2), $\mathrm{SU}(n) = \frac{\mathrm{SU}(n+m)}{\mathrm{SU}(m)}$ pour $m = 1$ (car $\mathrm{SU}(0) = \{1\}$);
- pour (3), $\mathrm{Sp}(n) = \frac{\mathrm{Sp}(n+m)}{\mathrm{Sp}(m)}$ pour $m = 0$ (on pose $\mathrm{Sp}(0) = \{1\}$);
- pour (4) et (5), $\mathrm{SO}(n) = \frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m)}$ pour $m = 1$ (car $\mathrm{SO}(0) = \{1\}$).

Pour le groupe orthogonal, le résultat suit de la décomposition de $\mathrm{O}(n)$ en union disjointe de $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}^-(n)$, qui est homéomorphe à $\mathrm{SO}(n)$. $\square$

Lemme 4.2 *La cohomologie des variétés de Stiefel est la suivante:*

$$
\begin{aligned}
H^*\left(\frac{\mathrm{U}(n+m)}{\mathrm{U}(m)};R\right) &\cong \Lambda_R(e_{2m+1},e_{2m+3},...,e_{2m+2n-1}), &(7)\\
H^*\left(\frac{\mathrm{SU}(n+m)}{\mathrm{SU}(m)};R\right) &\cong \Lambda_R(e_{2m+1},e_{2m+3},...,e_{2m+2n-1}), &(8)\\
H^*\left(\frac{\mathrm{Sp}(n+m)}{\mathrm{Sp}(m)};R\right) &\cong \Lambda_R(e_{4m+3},e_{4m+7},...,e_{4m+4n-1}). &(9)
\end{aligned}
$$

Si la caractéristique de R est 2, alors

$$
H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m)};R\right) \cong \Delta_R(e_m,e_{m+1},...,e_{m+n-1}). \tag{10}
$$

Sinon

$$
H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m)};R\right) \cong \begin{cases} \Lambda_R(e_{2m+1},e_{2m+5},...,e_{2m+2n-3}), & m \textit{ impair, } n \textit{ pair}\\ \Lambda_R(e_{2m+1},e_{2m+5},...,e_{2m+2n-5},e_{m+n-1}), & m,n \textit{ impair}\\ \Lambda_R(e_m,e_{2m+3},e_{2m+7},...,e_{2m+2n-3}), & m,n \textit{ pair}\\ \Lambda_R(e_m,e_{2m+3},e_{2m+7},...,e_{2m+2n-5},e_{m+n-1}), & m \textit{ pair, } n \textit{ impair.}\end{cases} \tag{11}
$$

Preuve. Pour calculer la cohomologie des variétés de Stiefel $V_{n+m,n}(\mathbb{F})$, on procède par récurrence sur n, et on utilise le fait qu'il y a une projection naturelle

$$
V_{n+m,n}(\mathbb{F}) = \frac{\mathrm{U}(n+m,\mathbb{F})}{\mathrm{U}(m,\mathbb{F})} \xrightarrow{p} V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}) = \frac{\mathrm{U}(n+m,\mathbb{F})}{\mathrm{U}(m+1,\mathbb{F})}
$$

dont le noyau $\frac{\mathrm{U}(m+1,\mathbb{F})}{\mathrm{U}(m,\mathbb{F})}$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^d$ de dimension $d = m, 2m+1, 4m+3$ respectivement quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

À partir de l'ensemble de fibrés en sphères

$$
\mathbb{S}^d \xrightarrow{i} V_{n+m,n}(\mathbb{F}) \xrightarrow{p} V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}), \tag{12}
$$

on peut calculer par récurrence sur n la cohomologie de $V_{n+m,n}(\mathbb{F})$, par étapes.

1. D'abord, on construit un fibré relatif à l'aide des cylindres sur l'application constante et sur la projection p respectivement,

$$
(\widehat{\mathbb{S}^d}, \mathbb{S}^d) \xrightarrow{i} (\widehat{V_{n+m,n}(\mathbb{F})}, V_{n+m,n}(\mathbb{F})) \xrightarrow{p} V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}),
$$

où on a les isomorphismes en cohomologie:

$$
\begin{aligned}
&H^*(\widehat{\mathbb{S}^d}, \mathbb{S}^d; R) \cong H^{*-1}(\mathbb{S}^d, \mathrm{point}; R) = R \quad \text{pour } * = 1, d+1, &(13)\\
&H^*(\widehat{V_{n+m,n}(\mathbb{F})}, V_{n+m,n}(\mathbb{F}); R) \cong H^*(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}); R), &(14)
\end{aligned}
$$

parce que $\widehat{\mathbb{S}^d}$ est contractile et $V_{n+m,n-1}(\mathbb{F})$ est un rétract par déformation de $\widehat{V_{n+m,n}(\mathbb{F})}$.

2. Ensuite on applique la suite exacte de Gysin, qu'on écrit

$$
\begin{aligned}
... \longrightarrow H^{i+d}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}); R) \xrightarrow{p*} H^{i+d}(V_{n+m,n}(\mathbb{F}); R) \xrightarrow{\lambda} H^i(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}); R)\\
\xrightarrow{\chi\cdot} H^{i+d+1}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F}); R) \xrightarrow{p*} H^{i+d+1}(V_{n+m,n}(\mathbb{F}); R) \longrightarrow ...
\end{aligned}
$$

en utilisant l'isomorphisme (14).

Ici, l'application $\chi\cdot$ dénote la multiplication par la *classe d'Euler* $\chi \in H^{d+1}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F});R)$ du fibré, induite par la classe non triviale de cohomologie de la sphère, qu'on dénote par $e_d \in H^d(\mathbb{S}^d;R)$ (vue comme classe de $H^{d+1}(\widehat{\mathbb{S}^d},\mathbb{S}^d;R)$ à cause de (13)), et ensuite transformée dans la *classe de Thom* $U \in H^{d+1}(\widehat{V_{n+m,n}(\mathbb{F})},V_{n+m,n}(\mathbb{F});R)$, telle que $i^*(U)=e_d$ et finalement vue comme classe dans $H^{d+1}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F});R)$ à cause de (14).

Aussi, l'application λ est telle que $\lambda((p^*x)\cdot y)=x\cdot\lambda(y)$.

3. On analyse en détail la suite de Gysin : le point crucial est que si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}=\mathbb{H}$ (pour R quelconque), où $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et R est de caractéristique 2, alors la classe d'Euler est nulle et on obtient des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^{i+d}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F});R) \xrightarrow{p*} H^{i+d}(V_{n+m,n}(\mathbb{F});R) \xrightarrow{\lambda} H^i(V_{n+m,n-1}(\mathbb{F});R) \longrightarrow 0.$$

Le calcul se fait alors par récurrence sur n. On le décrit explicitement pour $V_{n+m,m}(\mathbb{C})=\frac{\mathrm{U}(n+m)}{\mathrm{U}(m)}$. Dans ce cas, la dimension de la sphère $\mathbb{S}^d$ est $d=2m+1$.

Le résultat (7) est vrai pour $n=1$. Supposons qu'il soit vrai jusqu'à $n-1$, et considérons la variété $\frac{\mathrm{U}(n+m)}{\mathrm{U}(m)}=V_{n+m,m}$. La classe d'Euler χ appartient au groupe de cohomologie $H^{2m+2}(\frac{\mathrm{U}(n+m)}{\mathrm{U}(m+1)};R)$ qui est nul par le résultat (7) pour $V_{(n-1)+(m+1),m+1}$, donc on a effectivement la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^{i+2m+1}(V_{n+m,n-1}(\mathbb{C});R) \xrightarrow{p*} H^{i+2m+1}(V_{n+m,n}(\mathbb{C});R) \xrightarrow{\lambda} H^i(V_{n+m,n-1}(\mathbb{C});R) \longrightarrow 0.$$

En particulier, puisque p^* est injective, toutes les classes de dimension $i+2m+1$ de $V_{n+m,n-1}(\mathbb{C})$ survivent dans la cohomologie de $V_{n+m,n}(\mathbb{C})$: on a une classe pour toute valeur de $i+2m+1$ égal à $2(m+1)+1=2m+3$, $2(m+1)+3=2m+5$, ..., $2(m+1)+2(n-1)-1=2m+2n-1$, (c'est à dire pour i égal à $2,4,...,2(n+1)$). Il ne reste qu'une nouvelle classe dans $H^*(V_{n+m,n}(\mathbb{C});R)$, qu'on obtient pour $i=0$ de la classe $1\in H^0(V_{n+m,n-1}(\mathbb{C});R)=R$, en prenant un rélèvement $e_{2m+1}\in H^{2m+1}(V_{n+m,n}(\mathbb{C});R)$, tel que $\lambda(e_{2m+1})=1$. Finalement, ce sont tous les générateurs de $H^*(V_{n+m,n}(\mathbb{C});R)$, parce qu'un élément $x\in H^*(V_{n+m,n}(\mathbb{C});R)$ s'écrit de façon unique comme somme $x=p^*(y)+p^*(z)\cdot e_{2m+1}$, où $y,z\in H^*(V_{n+m,n-1}(\mathbb{C});R)$ (en fait, on a que $\lambda(p^*(x)\cdot e_{2m+1})=p^*(x)\cdot 1$, donc $\lambda(x-p^*(x)\cdot e_{2m+1})=0$ et $x-p^*(x)\cdot e_{2m+1}=p^*(y)$).

On remarque que pour $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, l'élément e_{2m+1} est de carré nul, alors que pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (avec R de caractéristique 2), le carré n'est pas nul. Cela donne l'algèbre Δ_R au lieu de l'algèbre extérieure dans la formule (10).

4. Si par contre $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et la caractéristique de R est $\neq 2$, alors la classe d'Euler du fibré peut être non nulle. Par exemple, pour le premier fibré (12) non trivial (pour $n=2$),

$$\mathbb{S}^m \xrightarrow{i} V_{m+2,2}(\mathbb{R}) \cong \frac{\mathrm{SO}(m+2)}{\mathrm{SO}(m)} \xrightarrow{p} V_{m+2,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^{m+1},$$

on peut montrer que la classe d'Euler est $\chi=(1+(-1)^{m+1})s_{m+1}$, où s_{m+1} est un générateur de $H^{m+1}(\mathbb{S}^{m+1};R)\cong R$.

En général, si m est pair, alors la classe d'Euler du fibré (12) est trivial, et on peut montrer le résultat (11) comme dans le cas $\mathbb{F}=\mathbb{C},\mathbb{H}$.

Si m est impair, par récurrence (pour $n>1$), on voit que la classe d'Euler χ du fibré

$$\mathbb{S}^m \xrightarrow{i} \frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m)} \xrightarrow{p} \frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+1)}$$

est dans $H^{m+1}\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+1)};R\right)\cong R\{e_{m+1}\}$. Donc, la multiplication par χ donne un isomorphisme

$$H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+1)};R\right)\cong \Lambda_R(e_{m+1})\otimes H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+2)};R\right),$$

avec

$$\begin{aligned}\ker(\chi\cdot) &\cong \Lambda_R(e_{m+1}) \otimes H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+2)};R\right)\\ \operatorname{coker}(\chi\cdot) &\cong H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+2)};R\right).\end{aligned}$$

À partir de la suite exacte de Gysin, alors, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+2)};R\right) \xrightarrow{p^*} H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m)};R\right) \xrightarrow{\lambda} R\{e_{m+1}\}\otimes H^*\left(\frac{\mathrm{SO}(n+m)}{\mathrm{SO}(m+2)};R\right) \longrightarrow 0,$$

et donc on peut procéder par récurrence comme pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, avec un décalage pair de n. $\square$