

# Gravité Quantique et relation KPZ

Christophe Garban

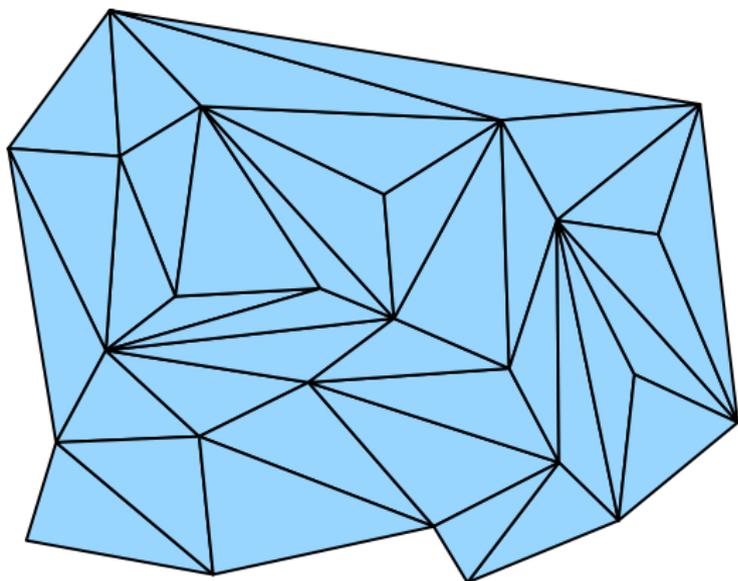
ENS Lyon et CNRS

D'après B. Duplantier et S. Sheffield

Séminaire Bourbaki, 24 Mars 2012

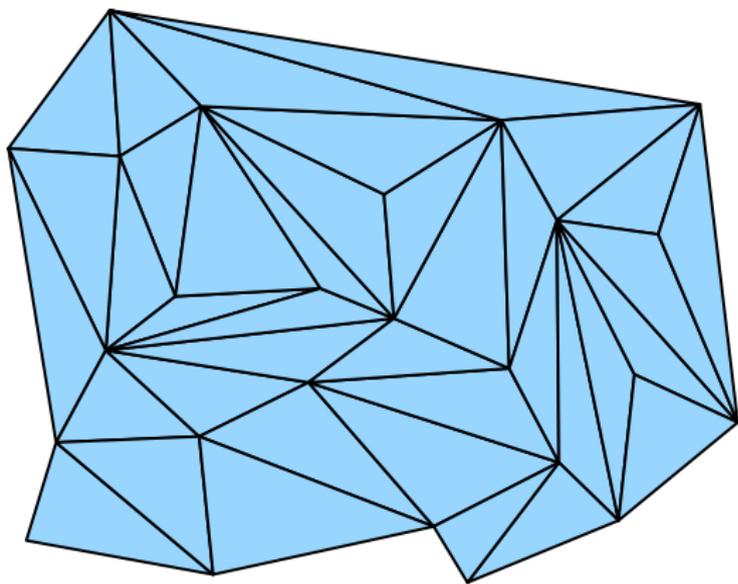
# Préambule

Soit  $\mathbf{m}_n$  une triangulation  
aléatoire à  $n$  faces :



## Préambule

Soit  $\mathbf{m}_n$  une triangulation  
aléatoire à  $n$  faces :

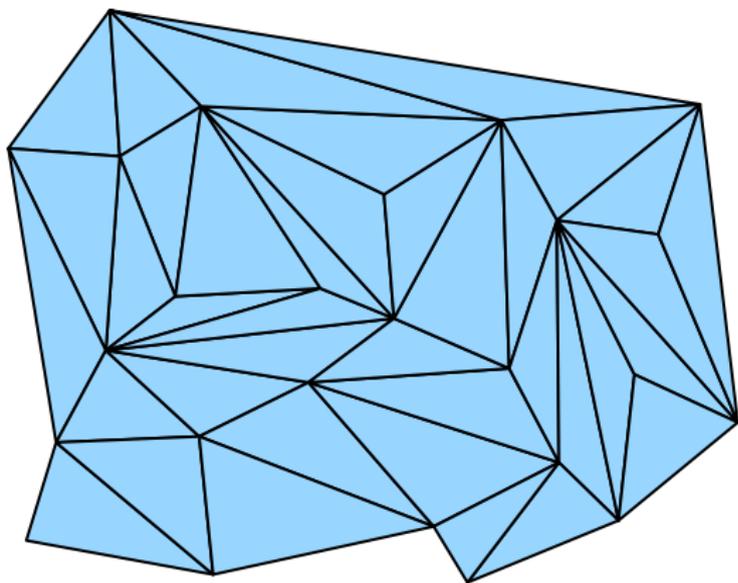


### Question

*A quoi ressemble cette  
triangulation aléatoire une fois  
"plongée" dans le plan ?*

## Préambule

Soit  $\mathbf{m}_n$  une triangulation aléatoire à  $n$  faces :



### Question

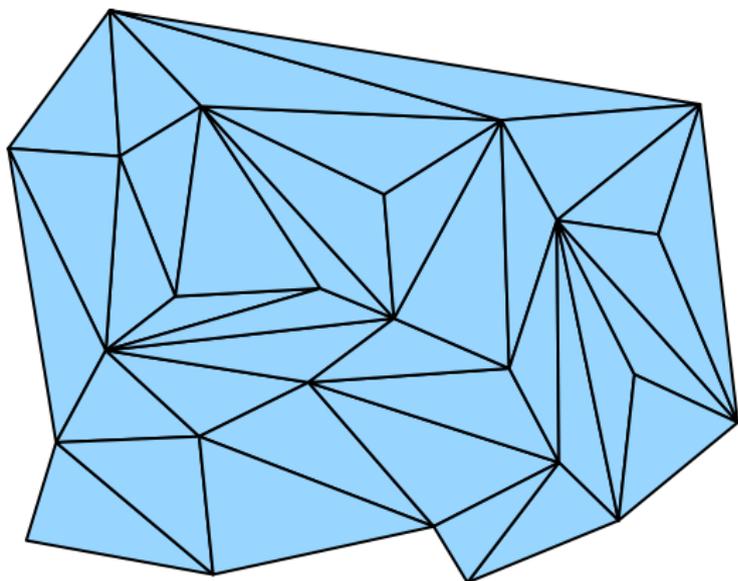
*A quoi ressemble cette triangulation aléatoire une fois "plongée" dans le plan ?*

Deux façons naturelle de plonger :

1. Voir  $\mathbf{m}_n$  comme une **surface de Riemann**  $\simeq \mathbb{C}$

## Préambule

Soit  $\mathbf{m}_n$  une triangulation aléatoire à  $n$  faces :



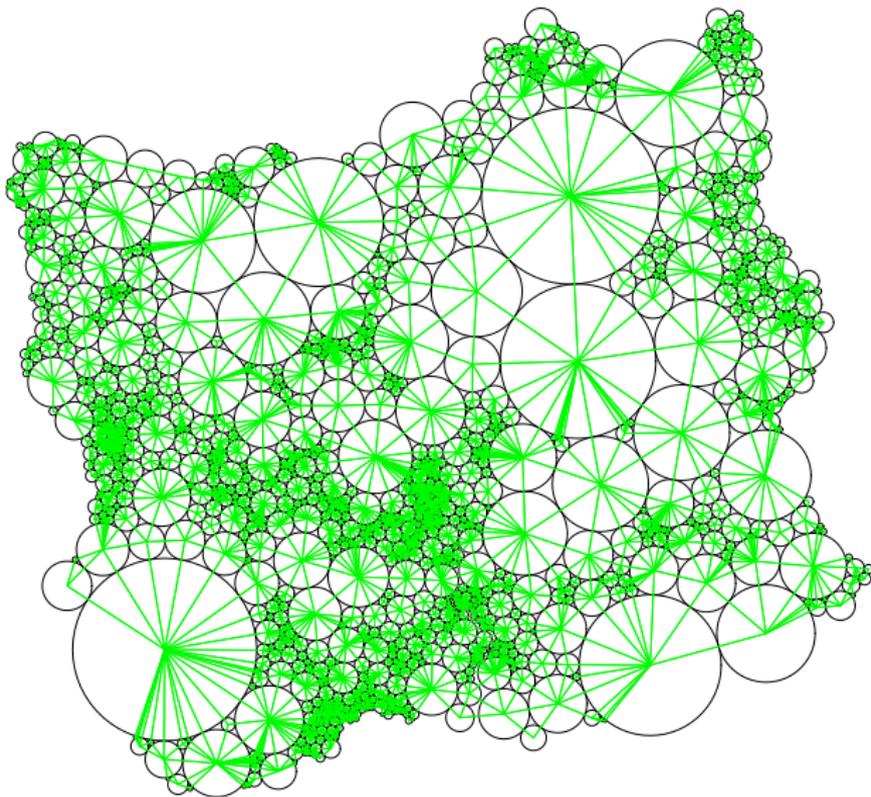
### Question

*A quoi ressemble cette triangulation aléatoire une fois "plongée" dans le plan ?*

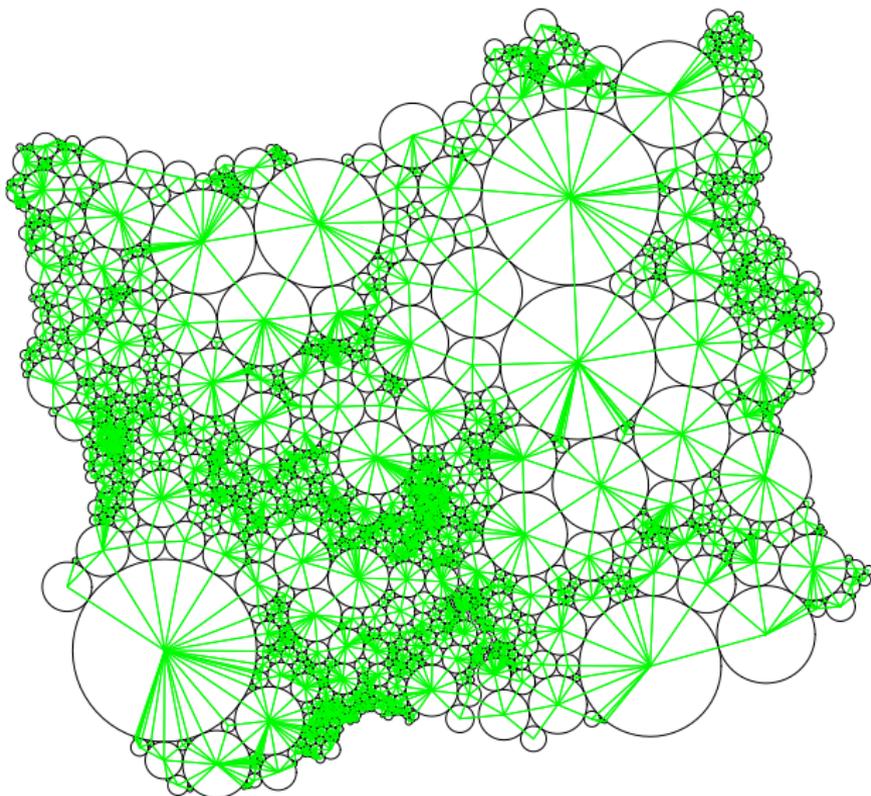
Deux façons naturelle de plonger :

1. Voir  $\mathbf{m}_n$  comme une **surface de Riemann**  $\simeq \mathbb{C}$
2. En utilisant un **empilement de cercles** (Théorème de Köbe).

# Plongement d'une grande triangulation uniforme



# Plongement d'une grande triangulation uniforme



Nous verrons que cet objet est relié à  $\mu := \exp[\sqrt{8/3}h]$  où  $h$  est un champ libre **Gaussien**

# Plan de l'exposé

1. "Gravité quantique" et formule de KPZ
  - (i) Qu'est ce que la gravité quantique ?
  - (ii) *Exposants critiques* Euclidiens v.s. quantiques
  - (iii) Formule de KPZ
2. Présentation du Théorème de Duplantier-Sheffield
3. Le Champ libre Gaussien
4. Les **mesures de Liouville**  $\mu_\gamma := e^{\gamma h}$
5. Idée de la preuve du Théorème de Duplantier-Sheffield

# Gravité quantique ?

## Question (très naïve)

*A quoi ressemble une métrique aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  distribuée de "façon uniforme" ?*

## Gravité quantique ?

### Question (très naïve)

*A quoi ressemble une métrique aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  distribuée de "façon uniforme" ?*

### Question (moins naïve)

*Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , à quoi ressemble un chemin aléatoire  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  distribué de "façon uniforme" parmi les chemins allant de  $a$  vers  $b$  ?*

## Gravité quantique ?

### Question (très naïve)

*A quoi ressemble une métrique aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  distribuée de "façon uniforme" ?*

### Question (moins naïve)

*Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , à quoi ressemble un chemin aléatoire  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  distribué de "façon uniforme" parmi les chemins allant de  $a$  vers  $b$  ?*

→ **Mouvement Brownien** & "intégrales de chemin" de Feynman

## Gravité quantique ?

### Question (très naïve)

*A quoi ressemble une métrique aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  distribuée de "façon uniforme" ?*

### Question (moins naïve)

*Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , à quoi ressemble un chemin aléatoire  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  distribué de "façon uniforme" parmi les chemins allant de  $a$  vers  $b$  ?*

→ **Mouvement Brownien** & "intégrales de chemin" de Feynman

→ En quelque sorte, le but de la **gravité quantique** est d'étendre les intégrales de chemin de Feynman à des *intégrales de Feynman* sur des surfaces.

## Gravité quantique ?

### Question (très naïve)

A quoi ressemble une métrique aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  distribuée de "façon uniforme" ?

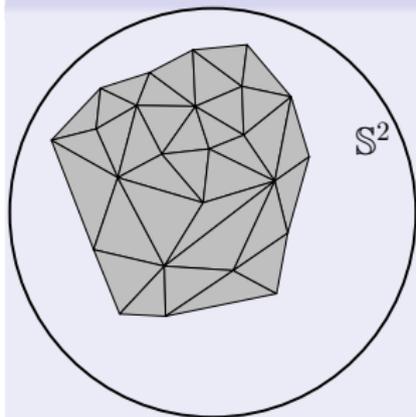
### Question (moins naïve)

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , à quoi ressemble un chemin aléatoire  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  distribué de "façon uniforme" parmi les chemins allant de  $a$  vers  $b$  ?

- **Mouvement Brownien** & "intégrales de chemin" de Feynman
- En quelque sorte, le but de la **gravité quantique** est d'étendre les intégrales de chemin de Feynman à des *intégrales de Feynman* sur des surfaces.
- Lien avec le problème de la "quantification de la gravitation" (par l'approche dite de la *gravitation quantique à boucles*).

# Discrétisation de la question naïve

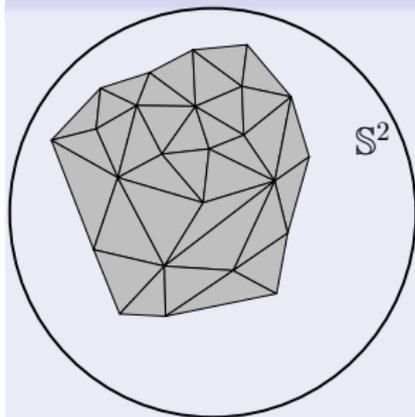
## Définition



Soit  $\mathbf{M}_n^3$  l'ensemble des *triangulations* à  $n$  faces de la sphère considérées à homéomorphisme direct près.

# Discrétisation de la question naïve

## Définition

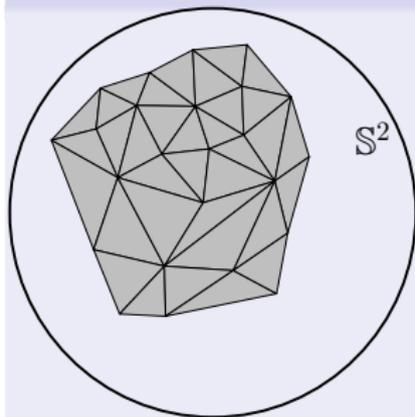


Soit  $\mathbf{M}_n^3$  l'ensemble des *triangulations* à  $n$  faces de la sphère considérées à homéomorphisme direct près.

Ainsi,  $\mathbf{M}_n^3$  est un ensemble fini : on peut donc considérer la triangulation aléatoire  $\mathbf{m}_n$  de loi uniforme sur  $\mathbf{M}_n^3$ .

# Discrétisation de la question naïve

## Définition

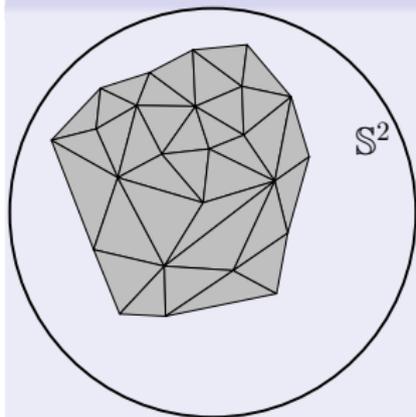


Soit  $\mathbf{M}_n^3$  l'ensemble des *triangulations* à  $n$  faces de la sphère considérées à homéomorphisme direct près.

Ainsi,  $\mathbf{M}_n^3$  est un ensemble fini : on peut donc considérer la triangulation aléatoire  $\mathbf{m}_n$  de loi uniforme sur  $\mathbf{M}_n^3$ .

# Discrétisation de la question naïve

## Définition



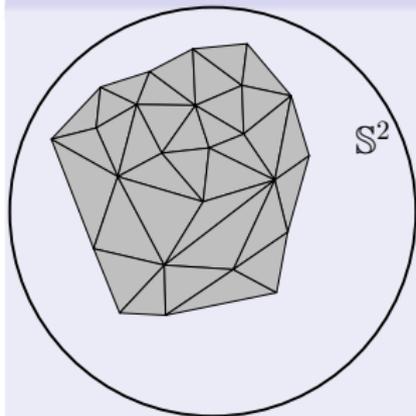
Soit  $\mathbf{M}_n^3$  l'ensemble des *triangulations* à  $n$  faces de la sphère considérées à homéomorphisme direct près.

Ainsi,  $\mathbf{M}_n^3$  est un ensemble fini : on peut donc considérer la triangulation aléatoire  $\mathbf{m}_n$  de loi uniforme sur  $\mathbf{M}_n^3$ .

Typiquement  $\mathbf{m}_n$  a un diamètre d'ordre  $n^{1/4}$

# Discrétisation de la question naïve

## Définition



Soit  $\mathbf{M}_n^3$  l'ensemble des *triangulations* à  $n$  faces de la sphère considérées à homéomorphisme direct près.

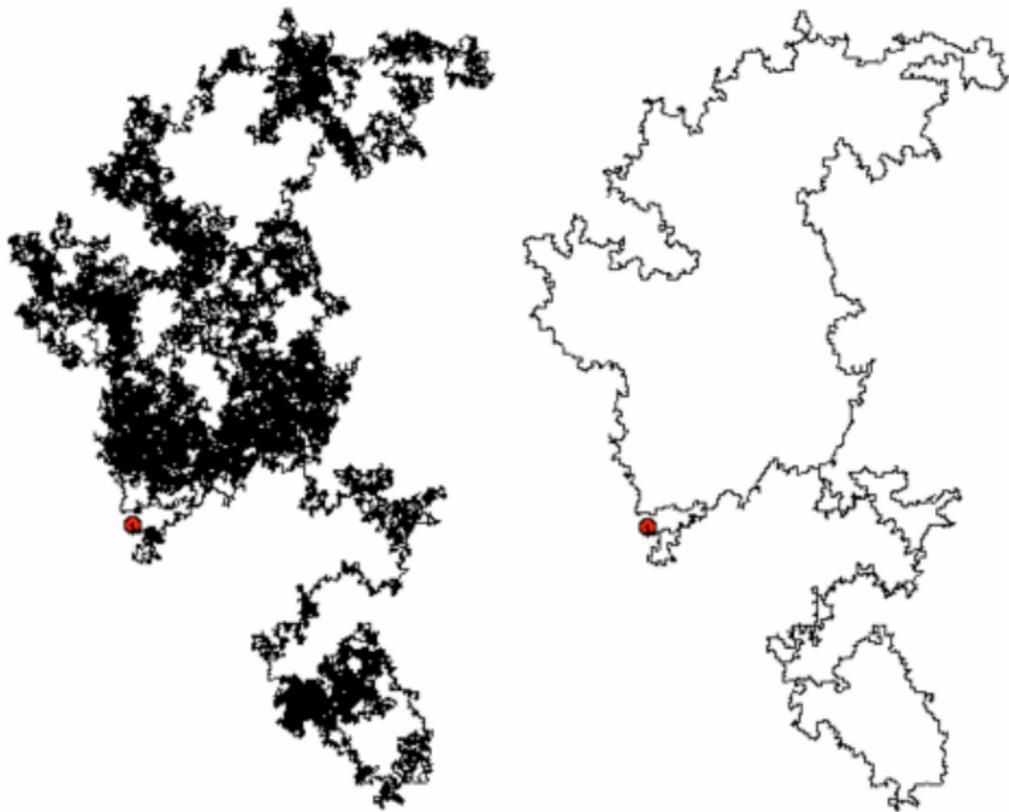
Ainsi,  $\mathbf{M}_n^3$  est un ensemble fini : on peut donc considérer la triangulation aléatoire  $\mathbf{m}_n$  de loi uniforme sur  $\mathbf{M}_n^3$ .

Typiquement  $\mathbf{m}_n$  a un diamètre d'ordre  $n^{1/4}$

## Théorème (Le Gall, Miermont, 2011)

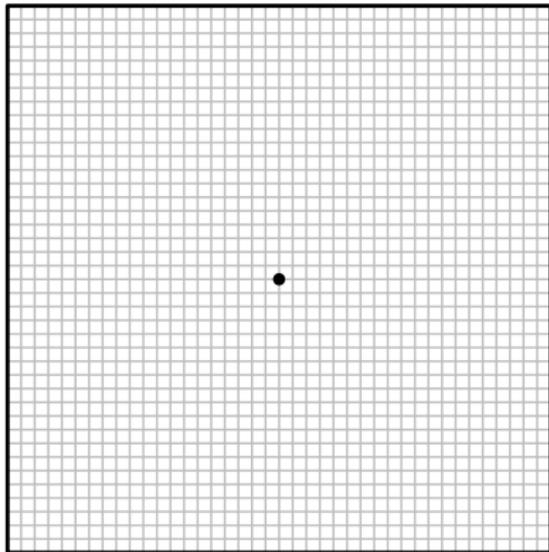
Vu comme un espace métrique compact,  $n^{-1/4}\mathbf{m}_n$  converge en loi lorsque  $n = |\mathbf{m}_n| \rightarrow \infty$  vers un espace métrique compact aléatoire connu sous le nom de “**carte Brownienne**”.

## Exposants critiques



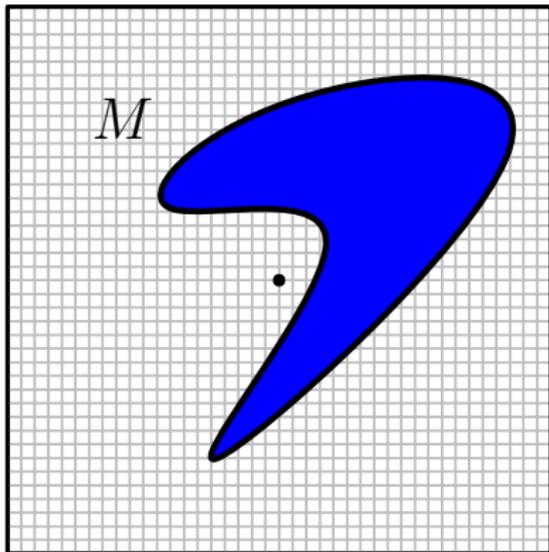
## Exposants critiques et gravité quantique

Considérons un certain modèle de physique statistique “ $M$ ” défini sur un réseau Euclidien du plan (par exemple  $\mathbb{Z}^2$ )



## Exposants critiques et gravité quantique

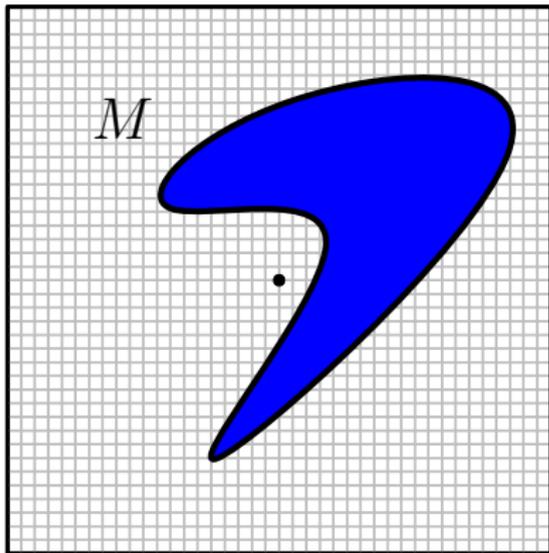
Considérons un certain modèle de physique statistique " $M$ " défini sur un réseau Euclidien du plan (par exemple  $\mathbb{Z}^2$ )



## Exposants critiques et gravité quantique

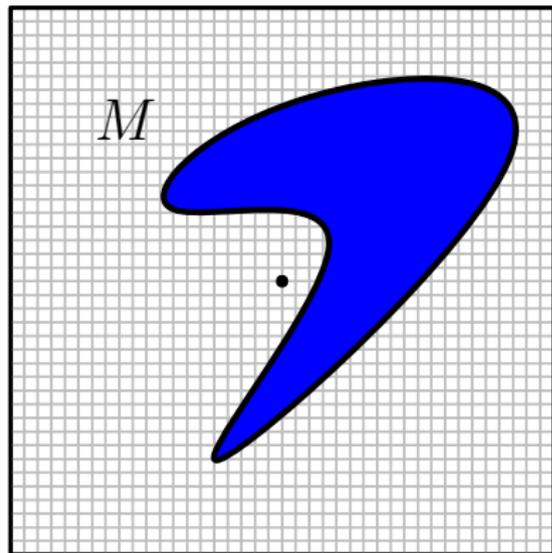
Considérons un certain modèle de physique statistique " $M$ " défini sur un réseau Euclidien du plan (par exemple  $\mathbb{Z}^2$ )

L'idée de la correspondance KPZ (Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov 1988) est que les *exposants critiques* de  $M$  sont liés aux exposants critiques du même modèle défini sur un **réseau aléatoire** (dont la loi dépend du modèle considéré)

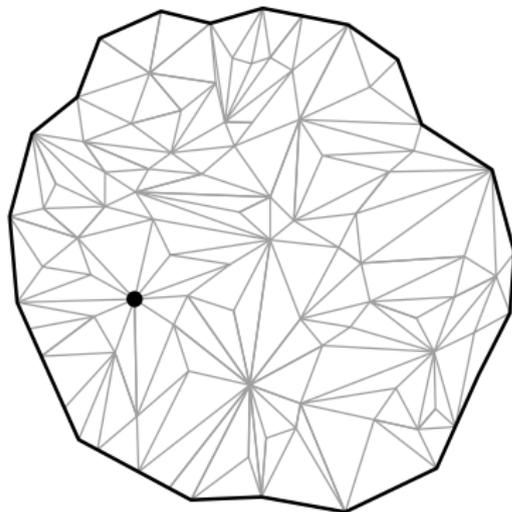


## Exposants critiques et gravité quantique

Considérons un certain modèle de physique statistique " $M$ " défini sur un réseau Euclidien du plan (par exemple  $\mathbb{Z}^2$ )

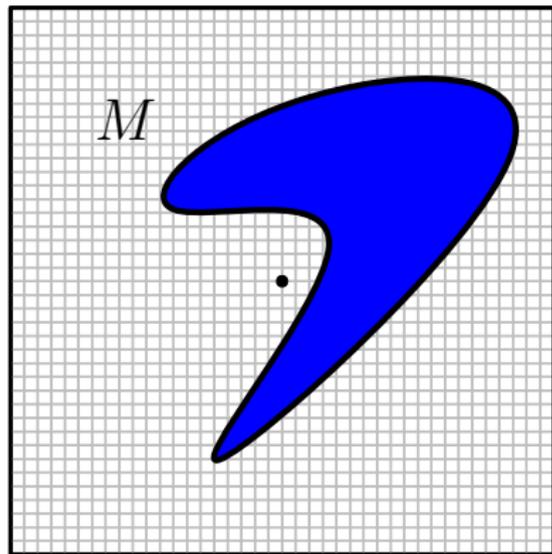


L'idée de la correspondance KPZ (Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov 1988) est que les *exposants critiques* de  $M$  sont liés aux exposants critiques du même modèle défini sur un **réseau aléatoire** (dont la loi dépend du modèle considéré)

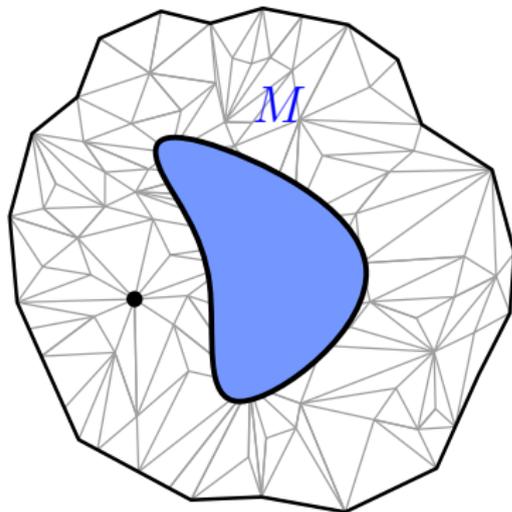


## Exposants critiques et gravité quantique

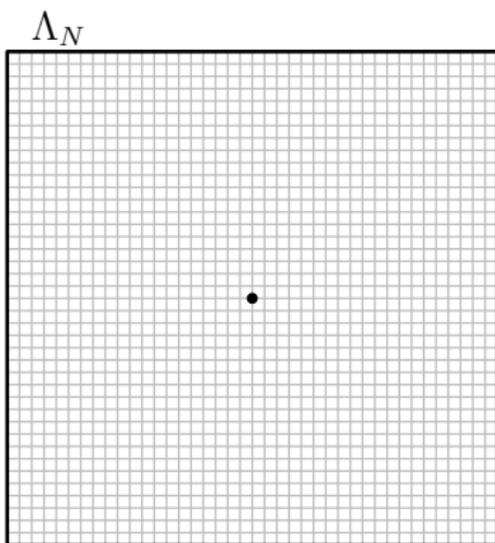
Considérons un certain modèle de physique statistique " $M$ " défini sur un réseau Euclidien du plan (par exemple  $\mathbb{Z}^2$ )



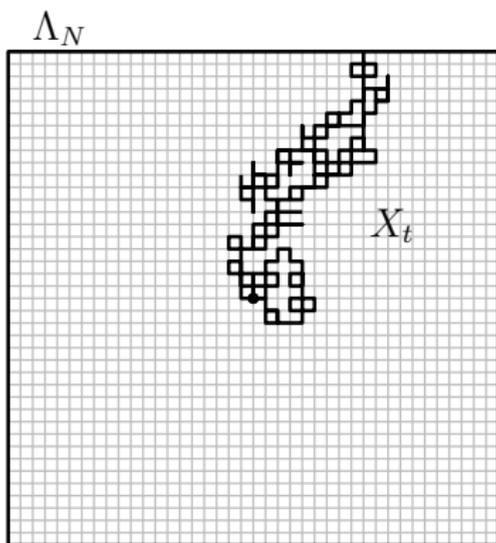
L'idée de la correspondance KPZ (Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov 1988) est que les *exposants critiques* de  $M$  sont liés aux exposants critiques du même modèle défini sur un **réseau aléatoire** (dont la loi dépend du modèle considéré)



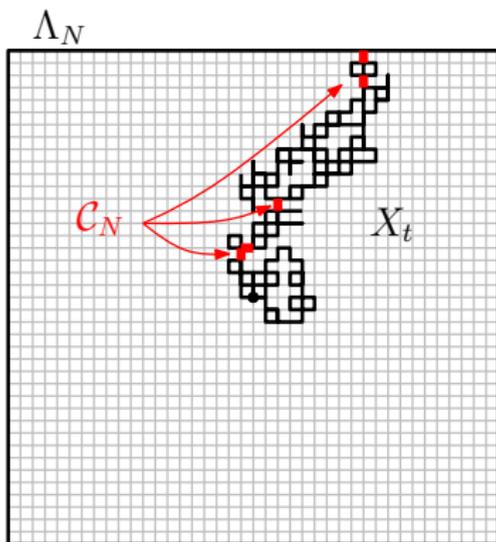
## Les “points de coupure” de la marche aléatoire



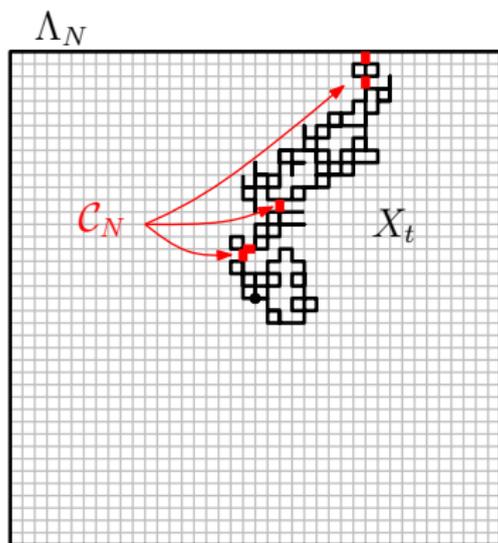
# Les "points de coupure" de la marche aléatoire



# Les "points de coupure" de la marche aléatoire

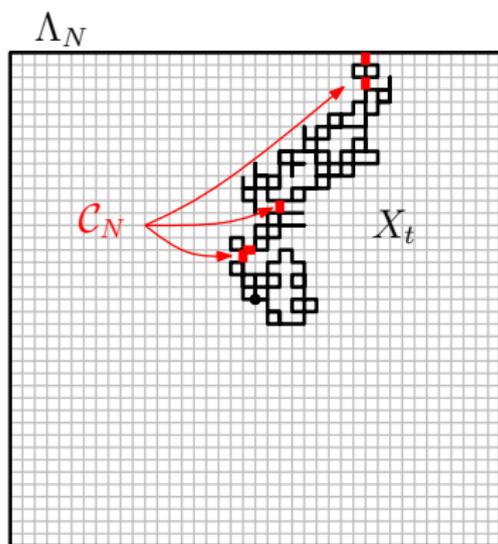


# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



$$\mathbb{E}[|C_N|] \approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x}$$

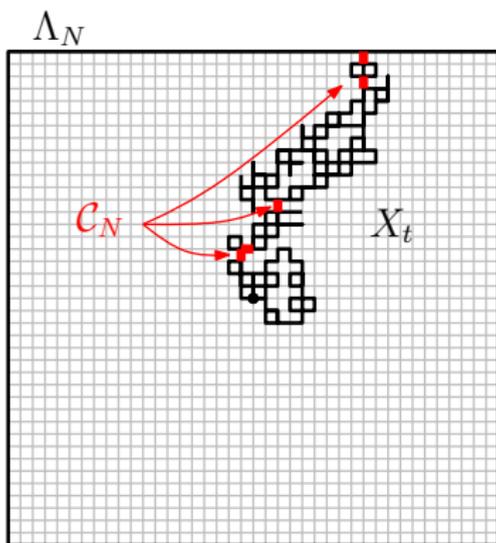
# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{3/4}\end{aligned}$$

$$x(C) = 5/8$$

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire

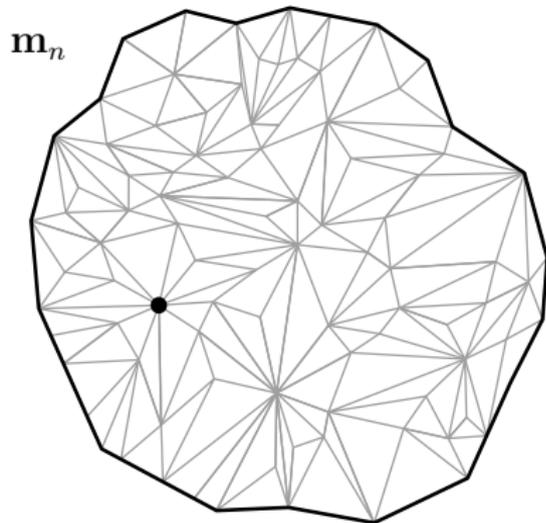
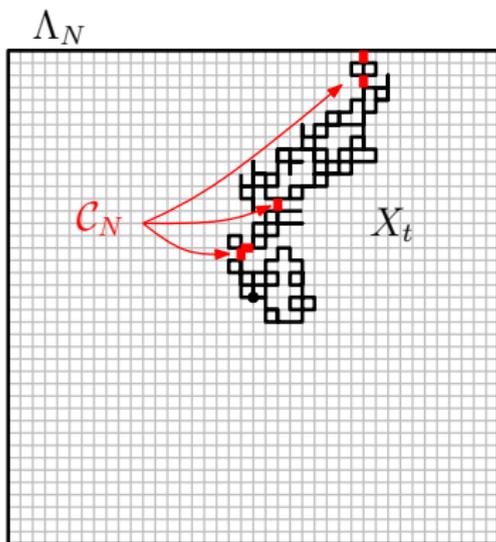


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{3/4}\end{aligned}$$

$$x(C) = 5/8$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire

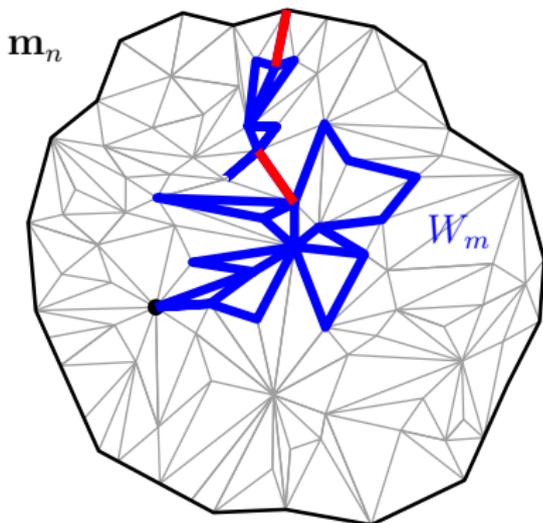
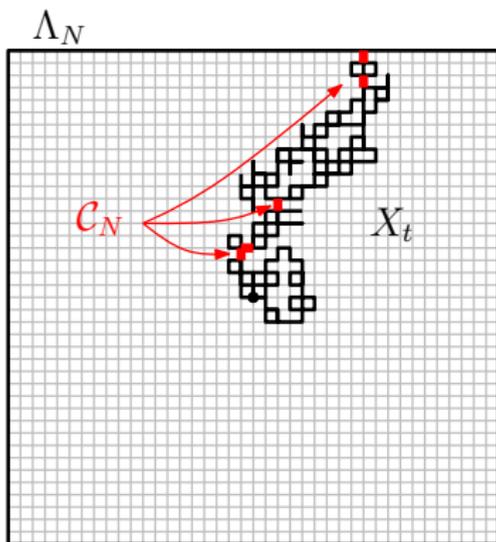


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\mathcal{C}_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{3/4}\end{aligned}$$

$$x(\mathcal{C}) = 5/8$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire

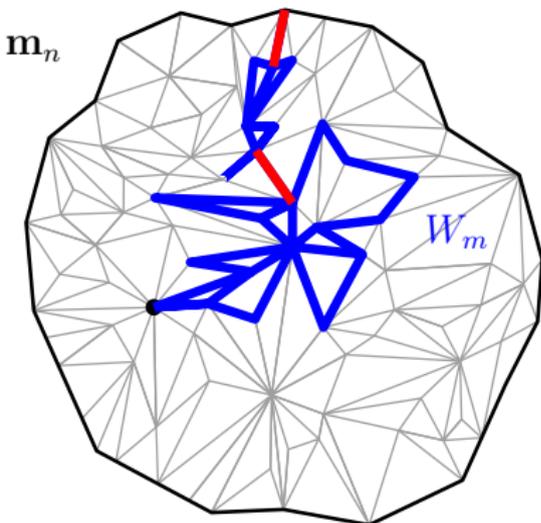
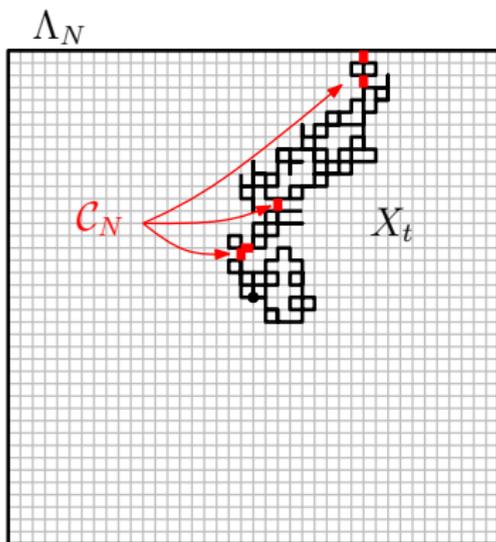


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{3/4}\end{aligned}$$

$$x(C) = 5/8$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



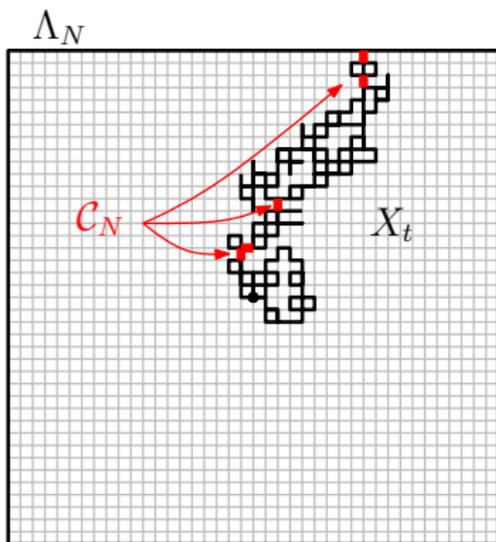
$$\mathbb{E}[|C_N|] \approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ \approx N^{3/4}$$

$$x(C) = 5/8$$

$$\mathbb{E}[|C_n|] \approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta}$$

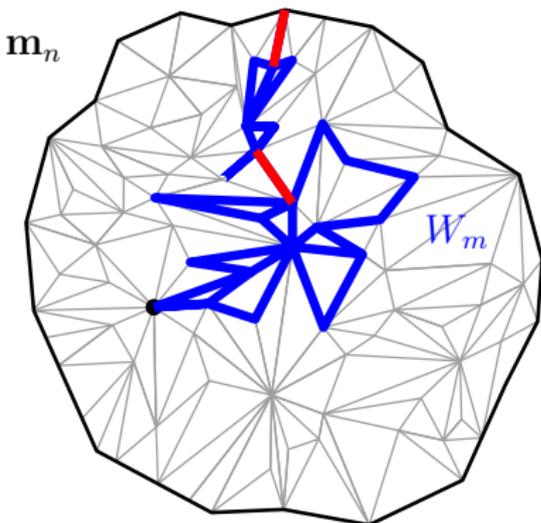
Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{3/4}\end{aligned}$$

$$x(\mathcal{C}) = 5/8$$

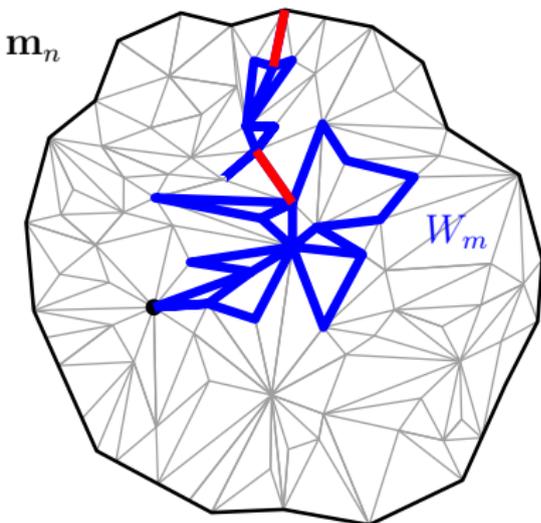
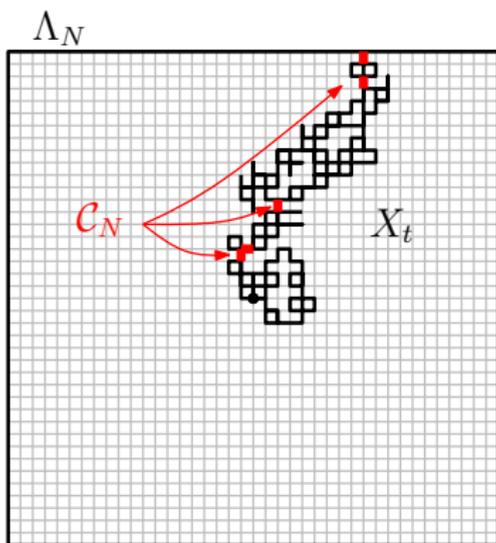


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_n|] &\approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta} \\ &\approx n^{1/4}\end{aligned}$$

$$\Delta(\mathcal{C}) = 3/4$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



$$\mathbb{E}[|C_N|] \approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x}$$

$$\approx N^{3/4}$$

$$x(\mathcal{C}) = 5/8$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

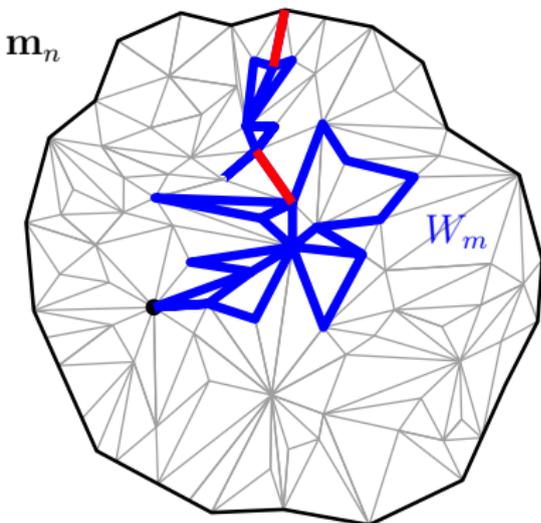
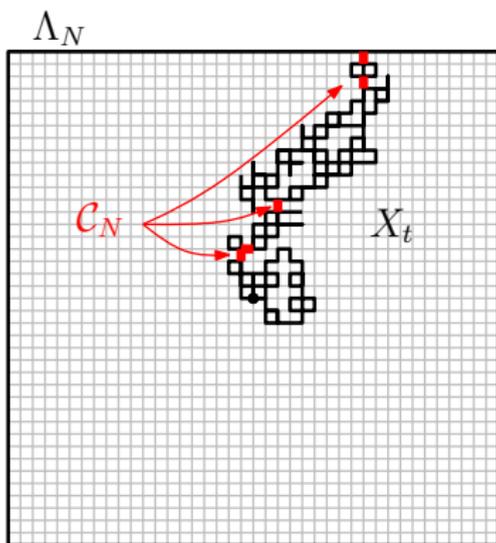
$$\mathbb{E}[|C_n|] \approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta}$$

$$\approx n^{1/4}$$

$$\Delta(\mathcal{C}) = 3/4$$

Duplantier (1998)

# Les “points de coupure” de la marche aléatoire



$$\mathbb{E}[|C_N|] \approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x}$$

$$\approx N^{3/4}$$

$$x(\mathcal{C}) = 5/8$$

Théorème de Lawler-Schramm-Werner (2002)

“KPZ”  
←

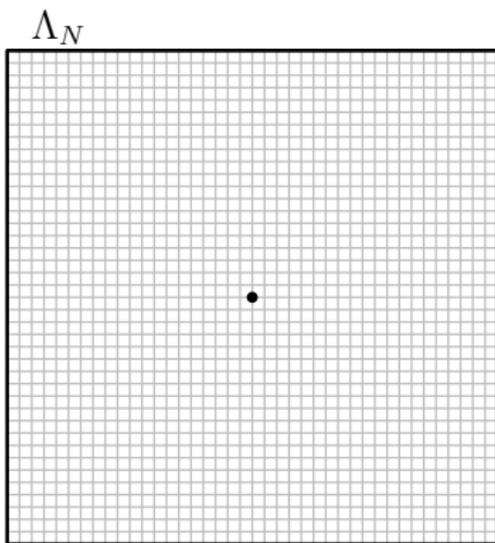
$$\mathbb{E}[|C_n|] \approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta}$$

$$\approx n^{1/4}$$

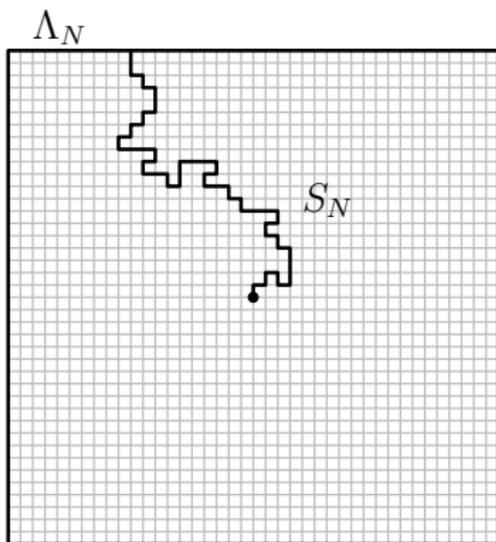
$$\Delta(\mathcal{C}) = 3/4$$

Duplantier (1998)

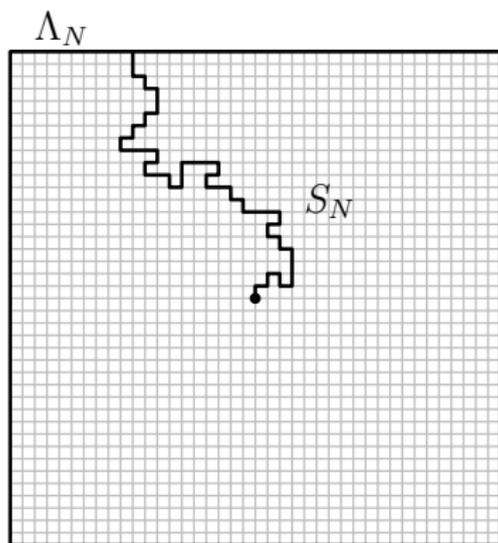
## Exposants critiques (marche auto-évitante)



## Exposants critiques (marche auto-évitante)

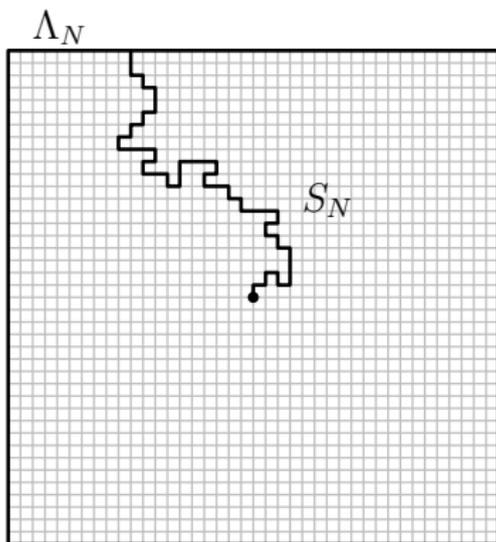


## Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\mathbb{E}[|S_N|] \approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x}$$

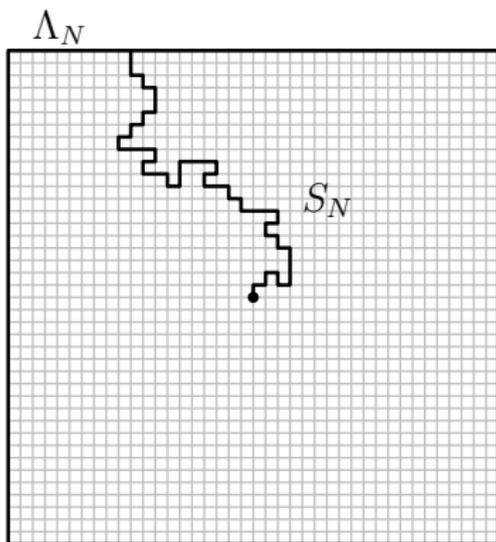
## Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

## Exposants critiques (marche auto-évitante)

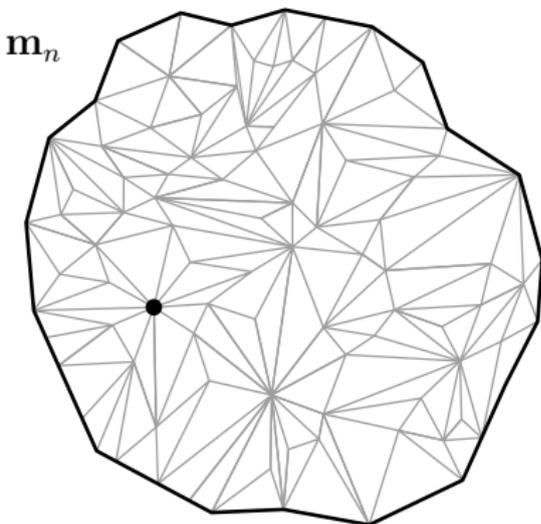
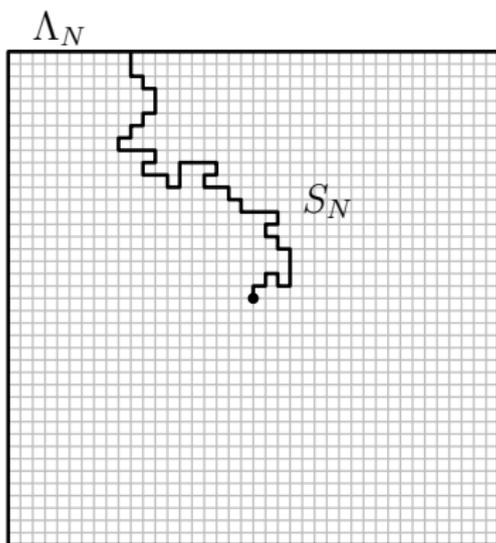


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**

# Exposants critiques (marche auto-évitante)

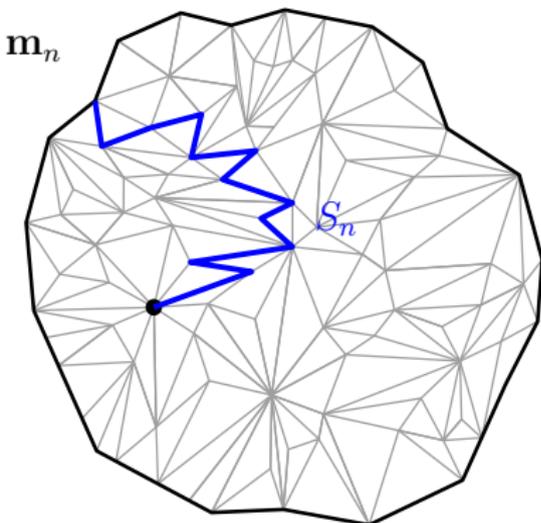
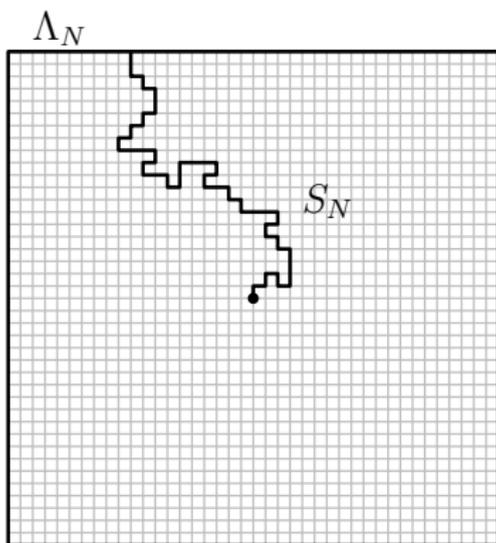


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**

# Exposants critiques (marche auto-évitante)

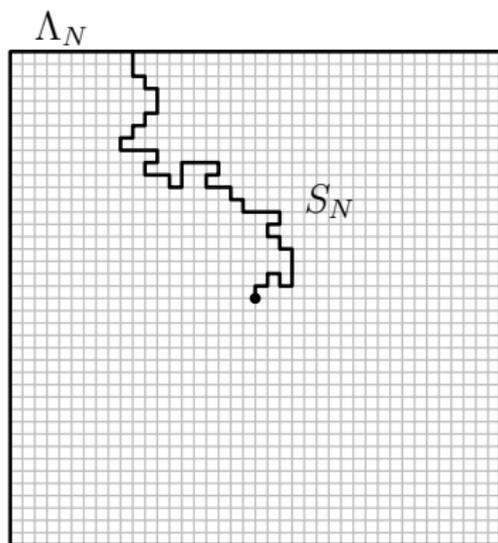


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**

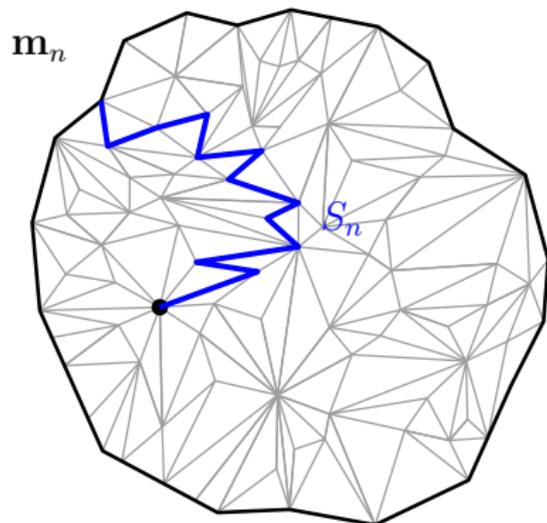
# Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

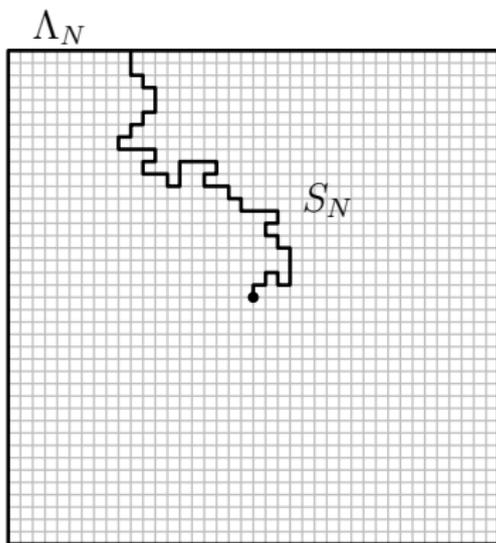
$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**



$$\mathbb{E}[|S_n|] \approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta}$$

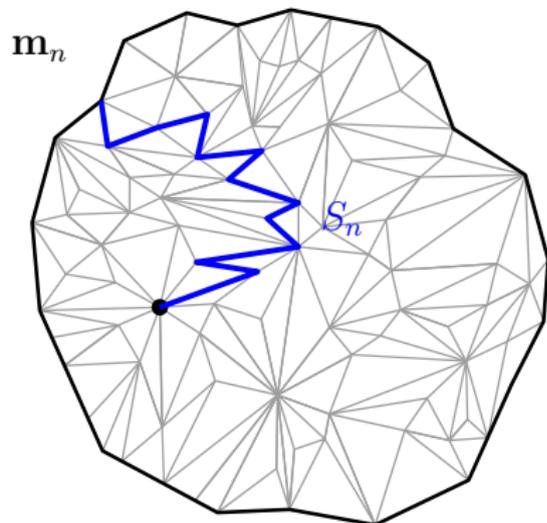
# Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

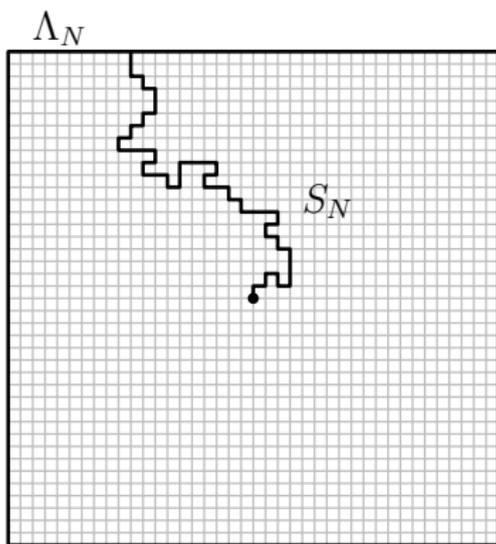
**conjecture importante**



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_n|] &\approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta} \\ &\approx n^{1/2}\end{aligned}$$

$$\Delta(S) = 1/2$$

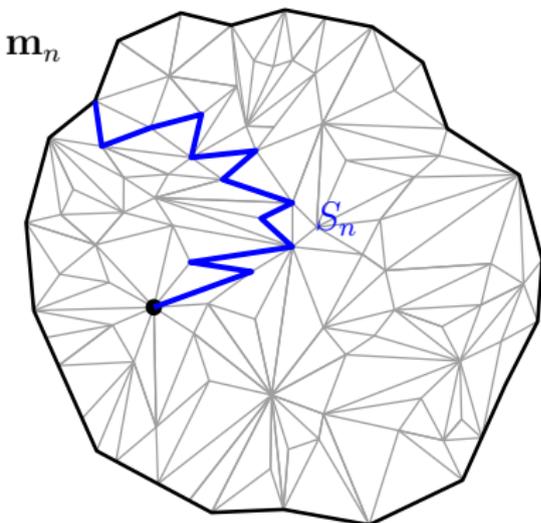
# Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**

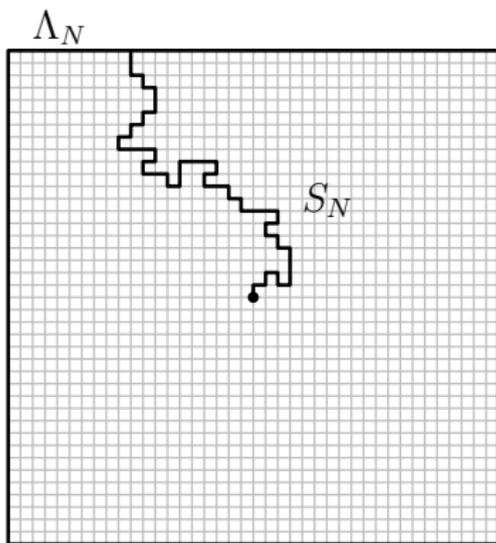


$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_n|] &\approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta} \\ &\approx n^{1/2}\end{aligned}$$

$$\Delta(S) = 1/2$$

“floklore”

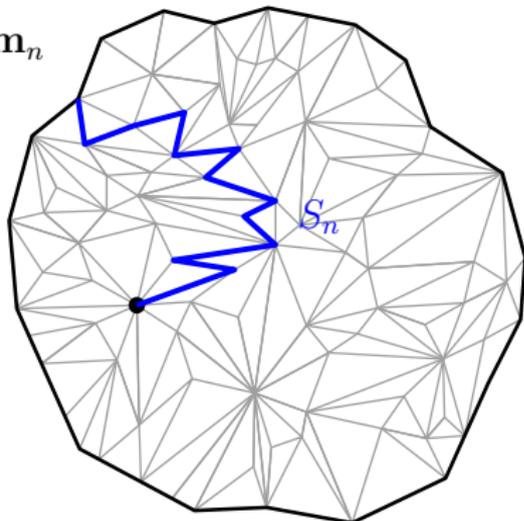
# Exposants critiques (marche auto-évitante)



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &\approx |\Lambda_N|^{1-x} = N^{2-2x} \\ &\approx N^{4/3}\end{aligned}$$

$$x(S) = 1/3$$

**conjecture importante**



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_n|] &\approx |\mathbf{m}_n|^{1-\Delta} = n^{1-\Delta} \\ &\approx n^{1/2}\end{aligned}$$

$$\Delta(S) = 1/2$$

“floklore”

“KPZ”  
←

## Exposants critiques et formule de KPZ

Soit  $K = (K_N)_{N \geq 1}$  une suite de sous-ensembles de  $\Lambda_N$ . **L'exposant d'échelle euclidien** de  $K$  est l'exposant  $x = x(K)$  défini par

$$x(K) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{E}[|K_N|/N^2]}{\log 1/N^2}$$

## Exposants critiques et formule de KPZ

Soit  $K = (K_N)_{N \geq 1}$  une suite de sous-ensembles de  $\Lambda_N$ . **L'exposant d'échelle euclidien** de  $K$  est l'exposant  $x = x(K)$  défini par

$$x(K) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{E}[|K_N|/N^2]}{\log 1/N^2}$$

Si maintenant  $K = (K_n)_{n \geq 1}$  est une suite de sous-ensembles de  $\mathbf{m}_n$  (triangulations uniformes à  $n$  faces), alors son **exposant d'échelle quantique**  $\Delta = \Delta(K)$  est défini par

$$\Delta(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\log |K_n|/n]}{\log 1/n}$$

## Exposants critiques et formule de KPZ

Soit  $K = (K_N)_{N \geq 1}$  une suite de sous-ensembles de  $\Lambda_N$ . L'**exposant d'échelle euclidien** de  $K$  est l'exposant  $x = x(K)$  défini par

$$x(K) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{E}[|K_N|/N^2]}{\log 1/N^2}$$

Si maintenant  $K = (K_n)_{n \geq 1}$  est une suite de sous-ensembles de  $\mathbf{m}_n$  (triangulations uniformes à  $n$  faces), alors son **exposant d'échelle quantique**  $\Delta = \Delta(K)$  est défini par

$$\Delta(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\log |K_n|/n]}{\log 1/n}$$

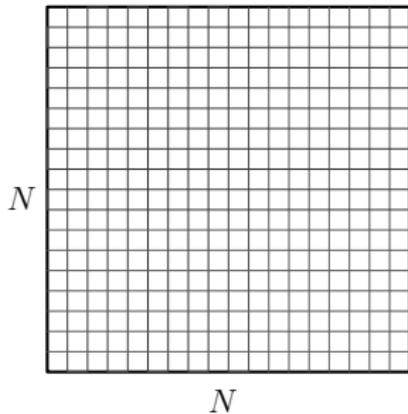
### Conjecture (Formule de KPZ)

*Pour la marche aléatoire, la percolation critique et la marche auto-évitante, le modèle de réseau aléatoire naturel est celui des **cartes planaires** et les exposants critiques euclidiens et quantiques sont reliés de la façon suivante :*

$$x = \frac{2}{3}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta$$

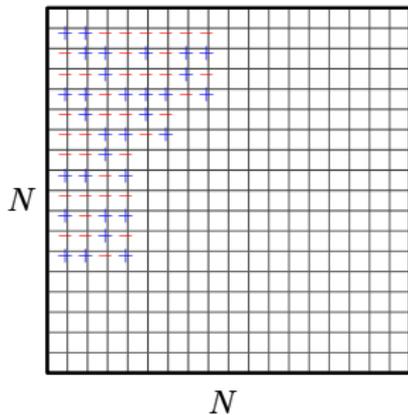
# Gravité quantique couplée à de la "matière"

Exemple: le cas du modèle d'Ising



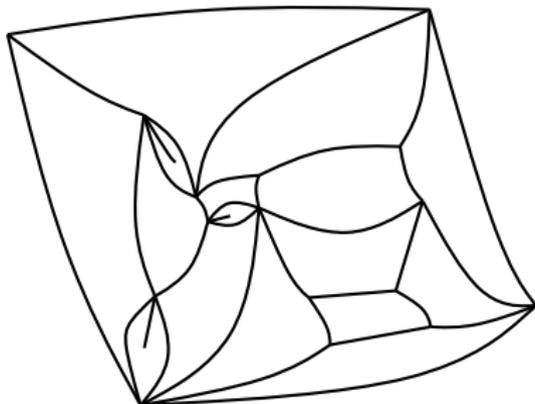
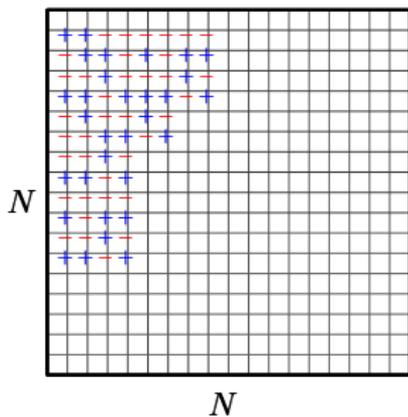
# Gravité quantique couplée à de la "matière"

Exemple: le cas du modèle d'Ising



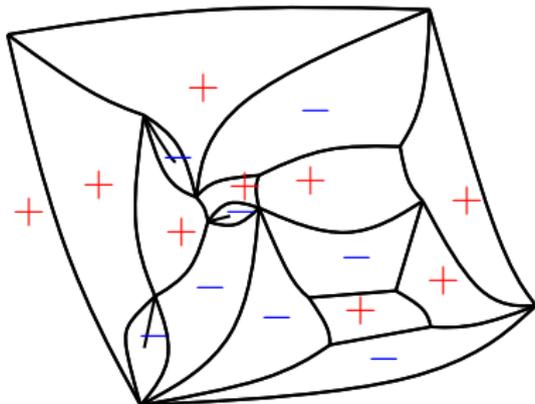
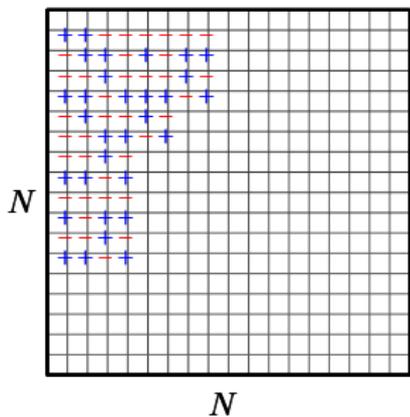
# Gravité quantique couplée à de la "matière"

Exemple: le cas du modèle d'Ising



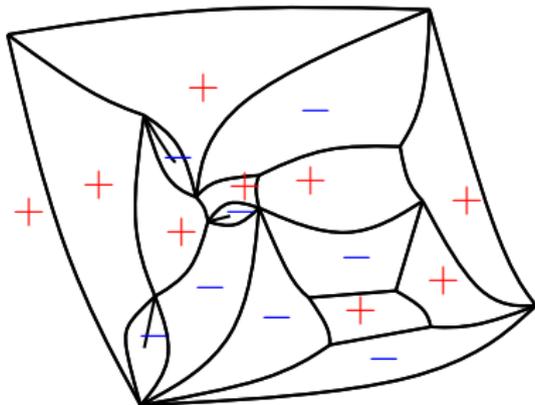
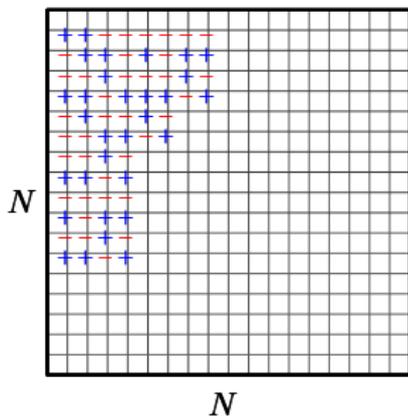
# Gravité quantique couplée à de la "matière"

Exemple: le cas du modèle d'Ising



# Gravité quantique couplée à de la "matière"

Exemple: le cas du modèle d'Ising



Conjecture (Relation de KPZ pour le modèle d'Ising critique)

Les exposants critiques Euclidiens et quantiques du modèle d'Ising sont reliés de la façon suivante :

$$x = \frac{3}{4} \Delta_{\text{ising}}^2 + \frac{1}{4} \Delta_{\text{ising}}$$

## Formule de KPZ en général

### Conjecture (Relation de KPZ)

Soit " $M$ " un modèle de physique statistique couplé à un certain modèle de réseau aléatoire (dans la bonne "classe d'universalité"), alors les exposants critiques **Euclidien** ( $x$ ) et **quantiques** ( $\Delta$ ) qui décrivent le comportement critique du modèle, sont reliés par la relation quadratique suivante (dite de KPZ) :

$$x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \Delta$$

## Formule de KPZ en général

### Conjecture (Relation de KPZ)

Soit " $M$ " un modèle de physique statistique couplé à un certain modèle de réseau aléatoire (dans la bonne "classe d'universalité"), alors les exposants critiques **Euclidien** ( $x$ ) et **quantiques** ( $\Delta$ ) qui décrivent le comportement critique du modèle, sont reliés par la relation quadratique suivante (dite de KPZ) :

$$x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \Delta$$

Le paramètre  $\gamma$  détermine dans quelle **classe d'universalité** se situe le modèle " $M$ ".

## Formule de KPZ en général

### Conjecture (Relation de KPZ)

Soit " $M$ " un modèle de physique statistique couplé à un certain modèle de réseau aléatoire (dans la bonne "classe d'universalité"), alors les exposants critiques **Euclidien** ( $x$ ) et **quantiques** ( $\Delta$ ) qui décrivent le comportement critique du modèle, sont reliés par la relation quadratique suivante (dite de KPZ) :

$$x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \Delta$$

Le paramètre  $\gamma$  détermine dans quelle **classe d'universalité** se situe le modèle " $M$ ".

Exemples:

1.  $\gamma = \sqrt{8/3} \iff$  Marche aléatoire, percolation, marche auto-évitante
2.  $\gamma = \sqrt{3} \iff$  Modèle d'Ising

## Formule de KPZ en général

### Conjecture (Relation de KPZ)

Soit " $M$ " un modèle de physique statistique couplé à un certain modèle de réseau aléatoire (dans la bonne "classe d'universalité"), alors les exposants critiques **Euclidien** ( $x$ ) et **quantiques** ( $\Delta$ ) qui décrivent le comportement critique du modèle, sont reliés par la relation quadratique suivante (dite de KPZ) :

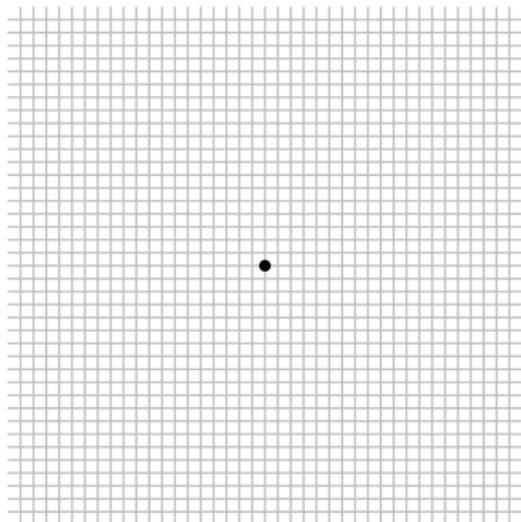
$$x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \Delta$$

Le paramètre  $\gamma$  détermine dans quelle **classe d'universalité** se situe le modèle " $M$ ".

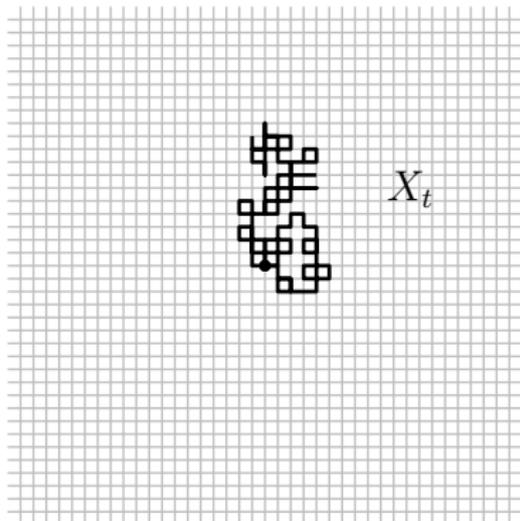
Exemples:

1.  $\gamma = \sqrt{8/3} \longleftrightarrow$  Marche aléatoire, percolation, marche auto-évitante
2.  $\gamma = \sqrt{3} \longleftrightarrow$  Modèle d'Ising
3.  $\gamma = \sqrt{\kappa} \longleftrightarrow$  Processus  $SLE_{\kappa}$  (Schramm-Loewner-Evolutions).

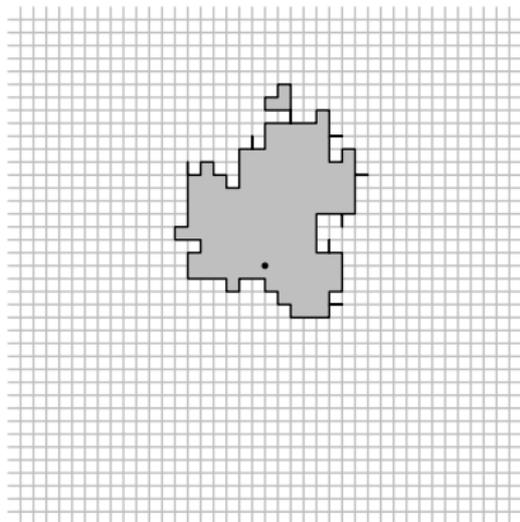
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



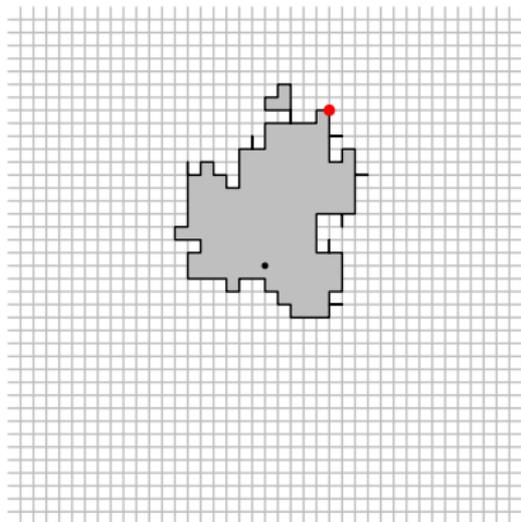
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



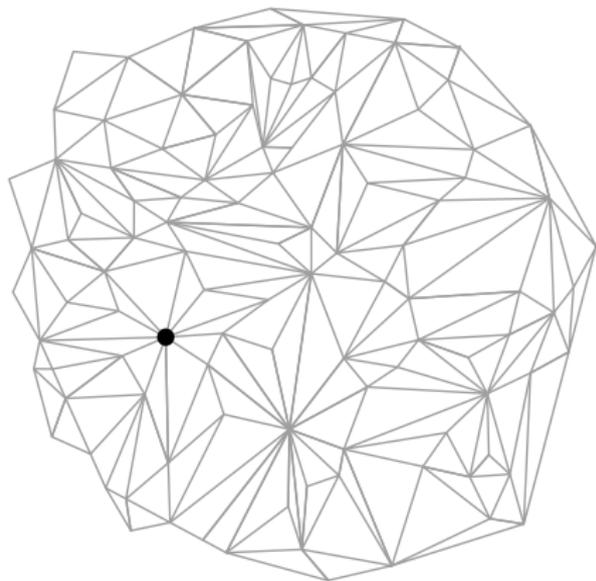
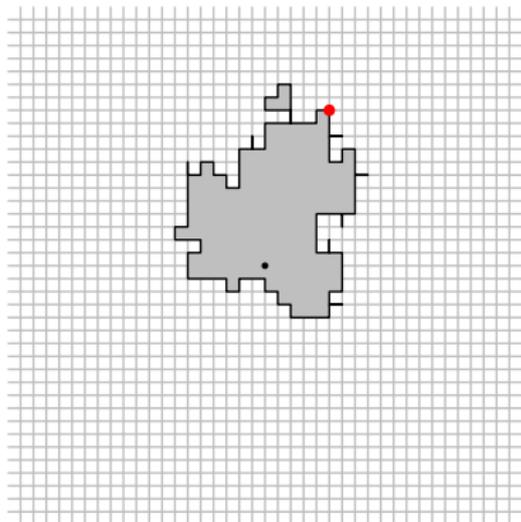
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



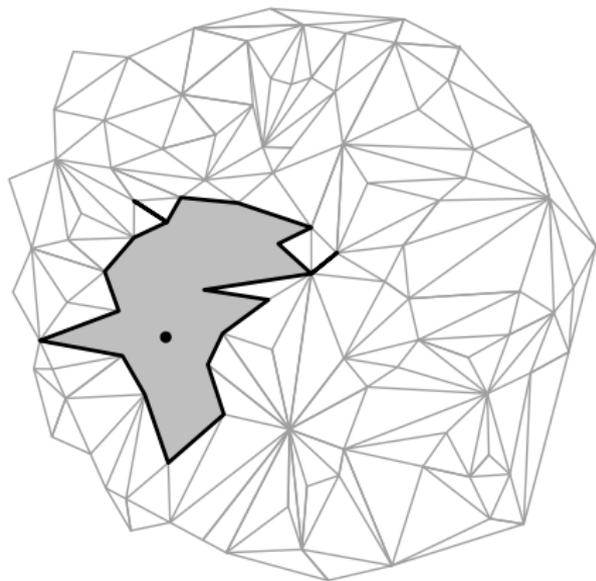
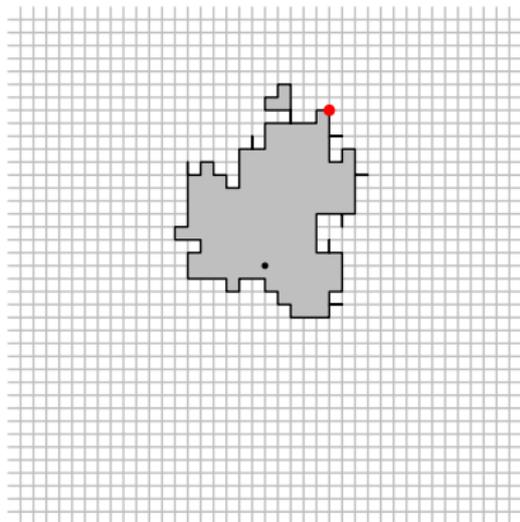
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



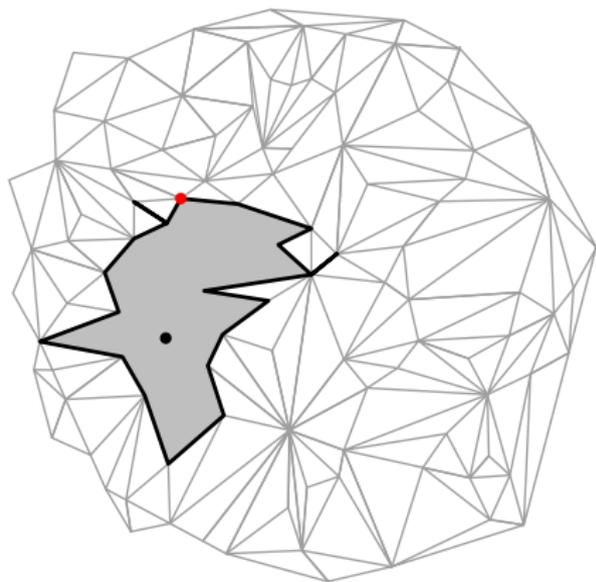
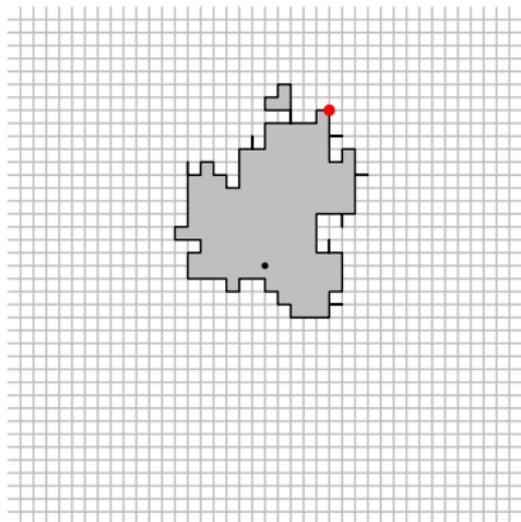
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



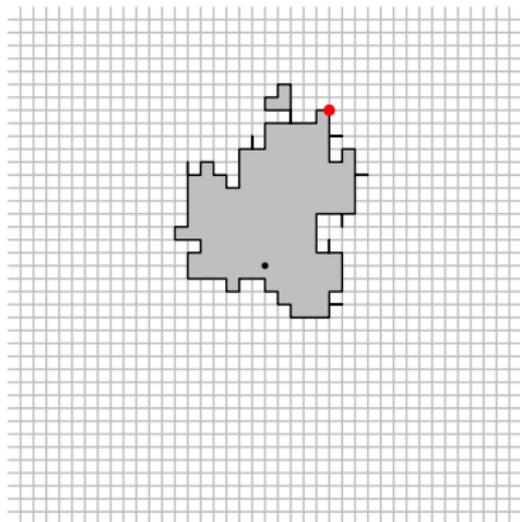
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



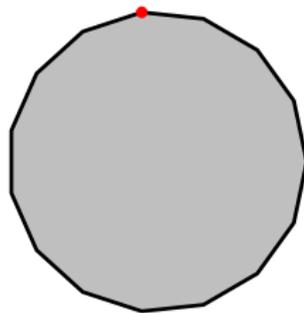
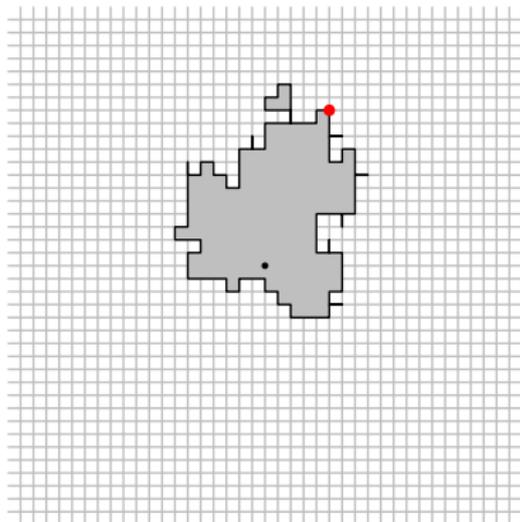
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



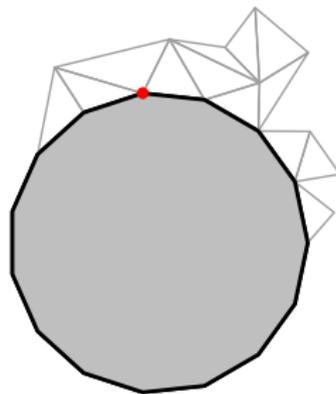
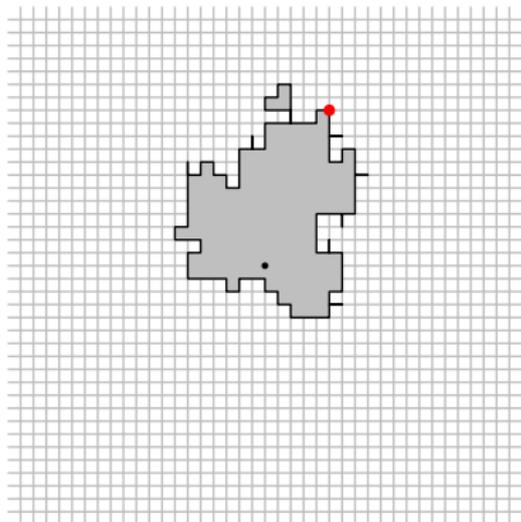
# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



# Pourquoi passer par la "gravité quantique" ?



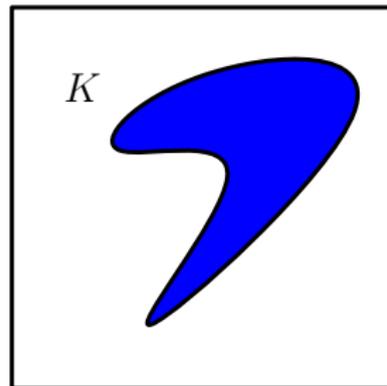
## Comprendre la relation KPZ

La difficulté : KPZ relie des exposants d'ensembles qui ne "vivent" pas sur le même espace. (par exemple les points coupure de  $X_t$  sur  $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^2$  et les points de coupure de  $W_m$  sur la triangulation  $\mathbf{m}_n$ ).

## Comprendre la relation KPZ

La difficulté : KPZ relie des exposants d'ensembles qui ne "vivent" pas sur le même espace. (par exemple les points coupure de  $X_t$  sur  $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^2$  et les points de coupure de  $W_m$  sur la triangulation  $\mathbf{m}_n$ ).

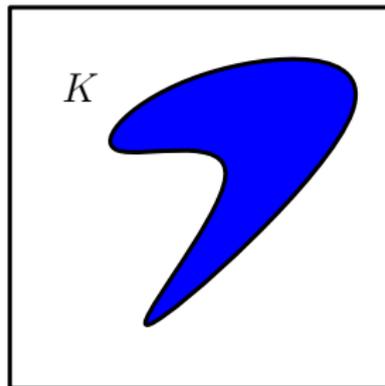
Pour pallier à ça, Duplantier et Sheffield ont découvert un "cadre" dans lequel l'ensemble considéré  $K$  vit sur le même espace test ( $[0, 1]^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ ), mais sa taille (qui est donnée par son exposant critique) peut être mesurée de deux façons :



## Comprendre la relation KPZ

La difficulté : KPZ relie des exposants d'ensembles qui ne "vivent" pas sur le même espace. (par exemple les points coupure de  $X_t$  sur  $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^2$  et les points de coupure de  $W_m$  sur la triangulation  $\mathbf{m}_n$ ).

Pour pallier à ça, Duplantier et Sheffield ont découvert un "cadre" dans lequel l'ensemble considéré  $K$  vit sur le même espace test ( $[0, 1]^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ ), mais sa taille (qui est donnée par son exposant critique) peut être mesurée de deux façons :

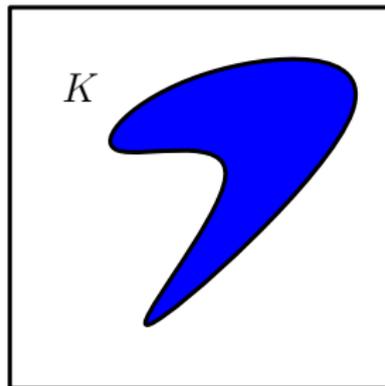


1. une façon *Euclidienne* qui donnera un exposant Euclidien  $x = x(K)$

## Comprendre la relation KPZ

La difficulté : KPZ relie des exposants d'ensembles qui ne "vivent" pas sur le même espace. (par exemple les points coupure de  $X_t$  sur  $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^2$  et les points de coupure de  $W_m$  sur la triangulation  $\mathbf{m}_n$ ).

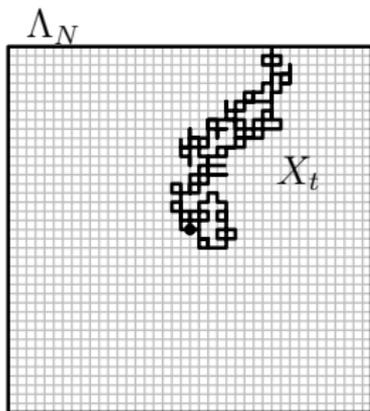
Pour pallier à ça, Duplantier et Sheffield ont découvert un "cadre" dans lequel l'ensemble considéré  $K$  vit sur le même espace test ( $[0, 1]^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ ), mais sa taille (qui est donnée par son exposant critique) peut être mesurée de deux façons :



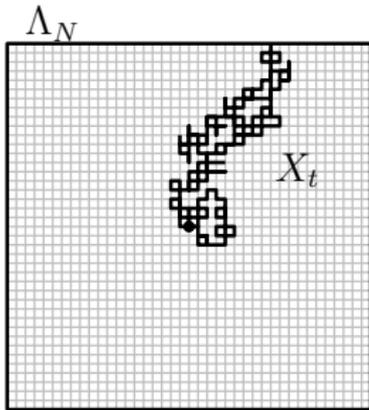
1. une façon *Euclidienne* qui donnera un exposant Euclidien  $x = x(K)$
2. une façon *quantique* qui donnera un exposant a priori différent : l'exposant quantique  $\Delta = \Delta(K)$

Leur cadre est construit de telle façon que  $x$  et  $\Delta$  vérifient la relation  $KPZ_\gamma$  (c'est à dire,  $x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + (1 - \frac{\gamma^2}{4}) \Delta$ ).

Si  $K$  est un Mouvement Brownien



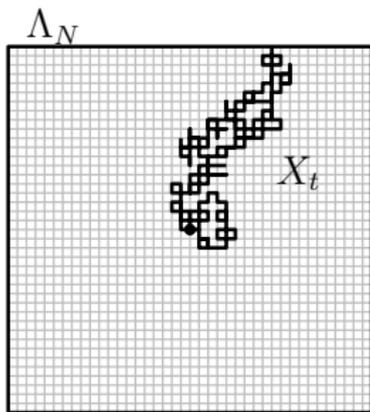
Si  $K$  est un Mouvement Brownien



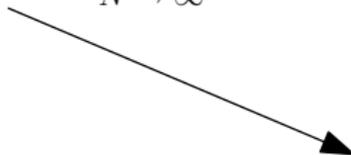
$N \rightarrow \infty$



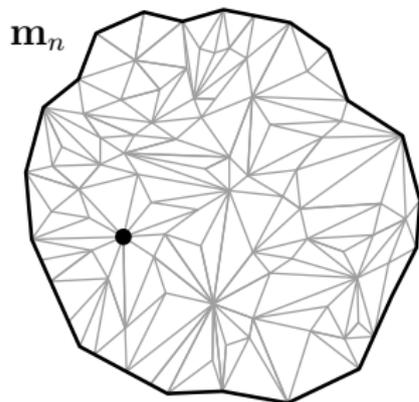
Si  $K$  est un Mouvement Brownien



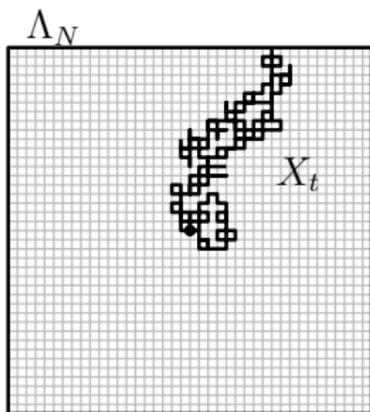
$N \rightarrow \infty$



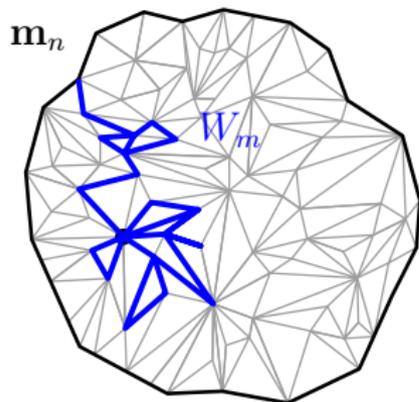
An arrow points from the grid to the right, indicating the limit as  $N \rightarrow \infty$ .



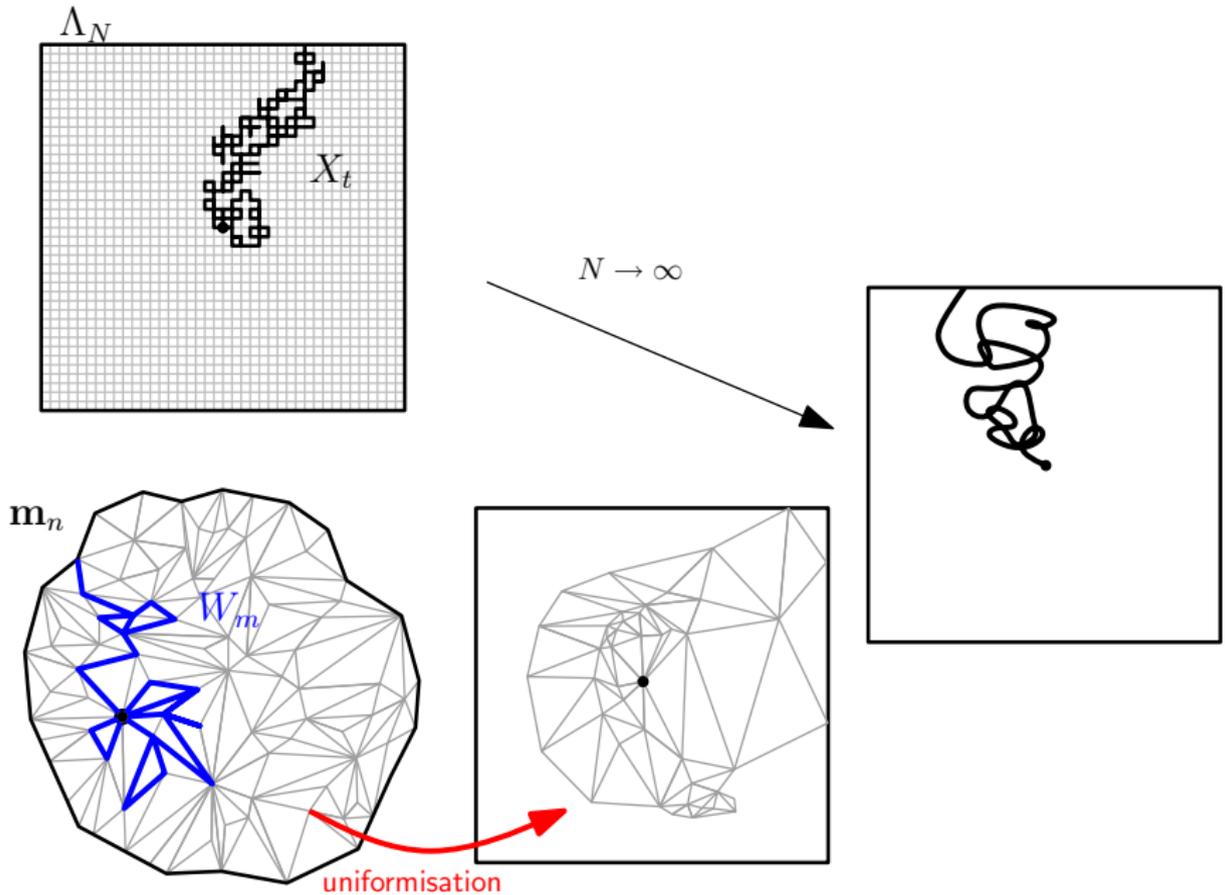
Si  $K$  est un Mouvement Brownien



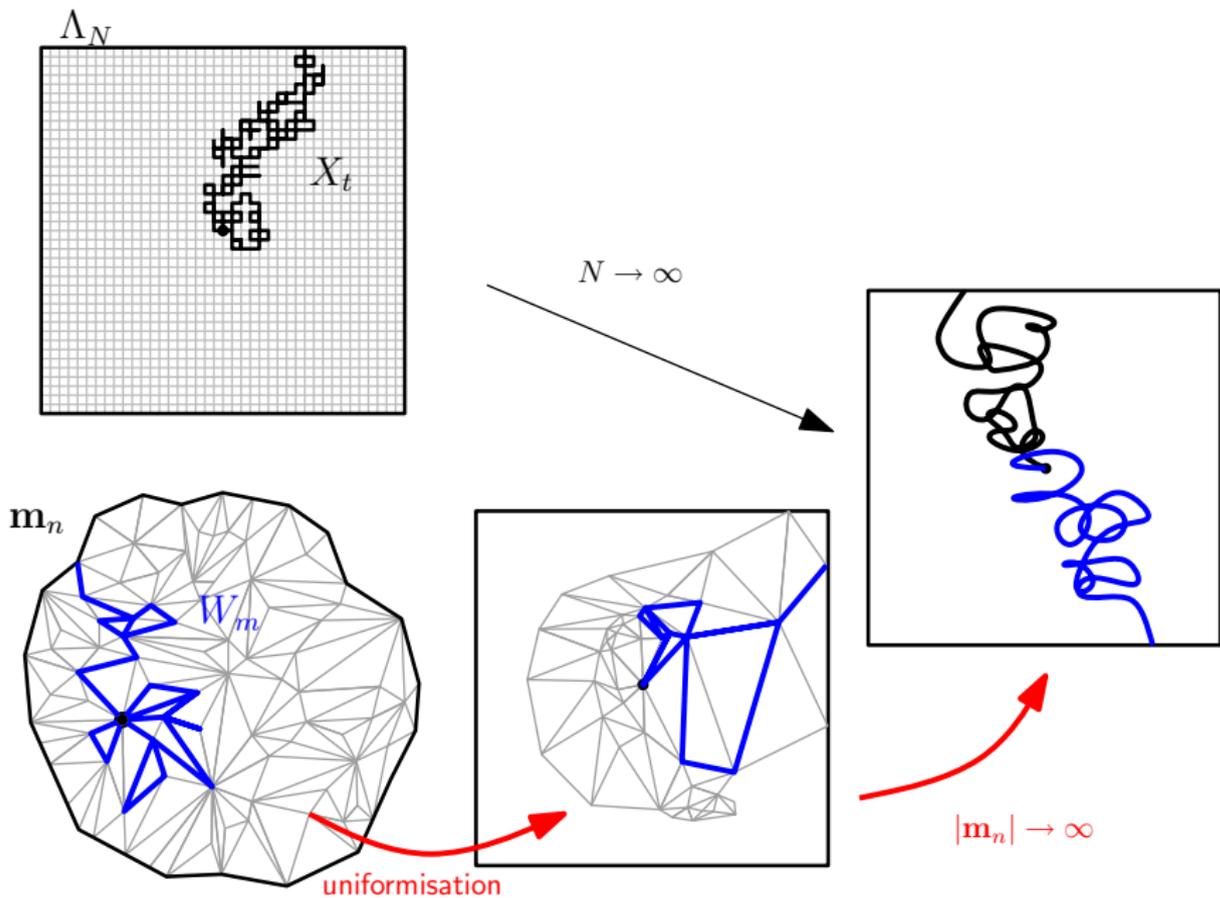
$N \rightarrow \infty$



# Si $K$ est un Mouvement Brownien



# Si $K$ est un Mouvement Brownien



## Modèle considéré par Duplantier et Sheffield

- L'espace test sera le domaine  $[0, 1]^2$ .

## Modèle considéré par Duplantier et Sheffield

- L'espace test sera le domaine  $[0, 1]^2$ .
- On considère deux **mesures** sur  $[0, 1]^2$

## Modèle considéré par Duplantier et Sheffield

- L'espace test sera le domaine  $[0, 1]^2$ .
- On considère deux **mesures** sur  $[0, 1]^2$

1. La mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}$  sur  $[0, 1]^2$

## Modèle considéré par Duplantier et Sheffield

- L'espace test sera le domaine  $[0, 1]^2$ .
- On considère deux **mesures** sur  $[0, 1]^2$

1. La mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}$  sur  $[0, 1]^2$
2. Une mesure aléatoire  $\mu = \mu_\gamma$  qui est donnée de façon informelle par :

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = e^{\gamma h}$$

ou  $h$  est un **Champ libre Gaussien**.

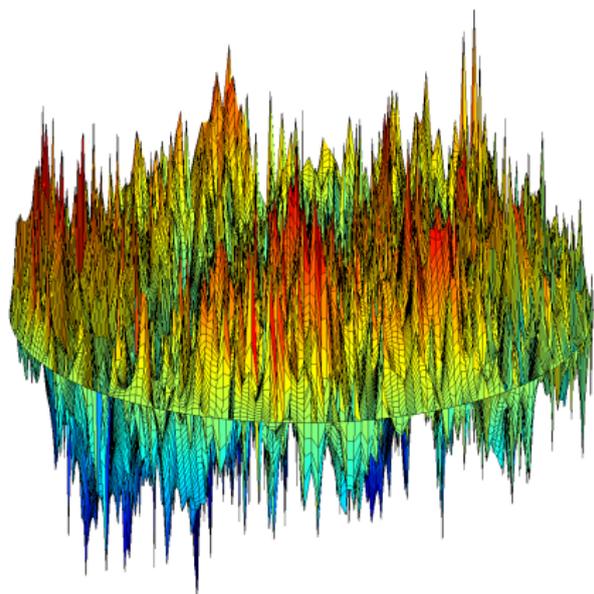
## Modèle considéré par Duplantier et Sheffield

- L'espace test sera le domaine  $[0, 1]^2$ .
- On considère deux **mesures** sur  $[0, 1]^2$

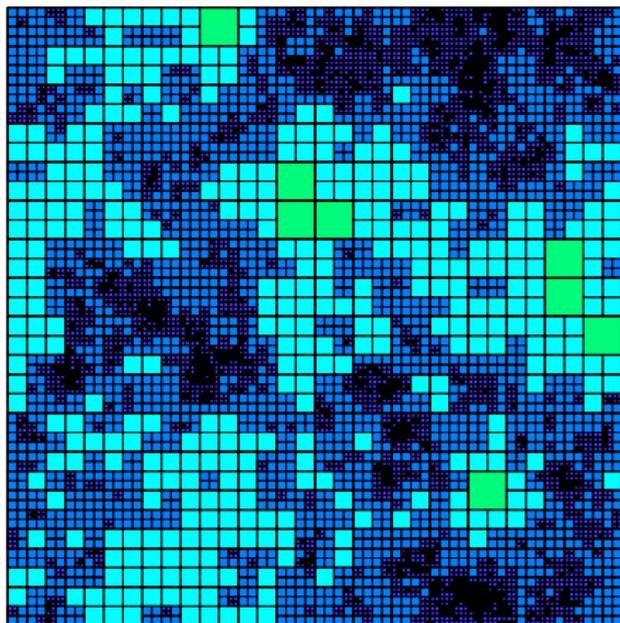
1. La mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}$  sur  $[0, 1]^2$
2. Une mesure aléatoire  $\mu = \mu_\gamma$  qui est donnée de façon informelle par :

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = e^{\gamma h}$$

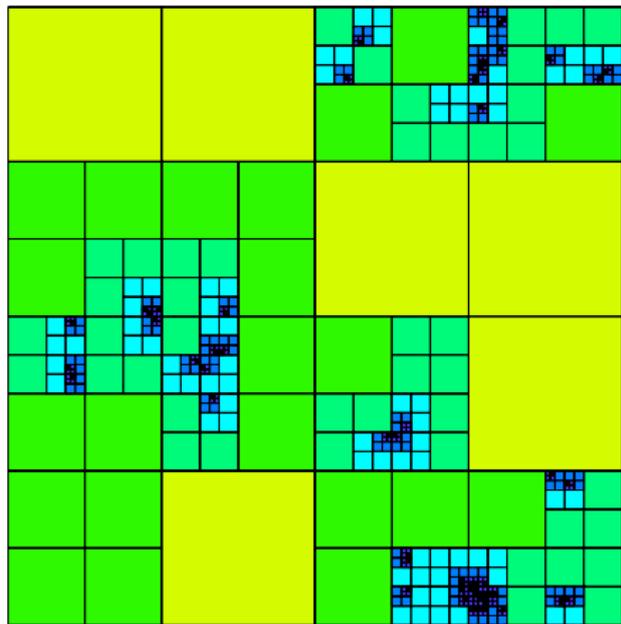
ou  $h$  est un **Champ libre Gaussien**.



$$\mu = e^{\gamma h} \text{ pour } \gamma = 3/2.$$



$$\mu = e^{\gamma h} \text{ pour } \gamma = 5.$$



## Exposants Euclidiens et quantiques

Définition (Exposant euclidien de  $K$ )

$$x = x(K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathbb{P}[B_\epsilon(z) \cap K \neq \emptyset]}{\log \epsilon^2},$$

où  $z \sim \mathcal{L}$ .

## Exposants Euclidiens et quantiques

### Définition (Exposant euclidien de $K$ )

$$x = x(K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathbb{P}[B_\epsilon(z) \cap K \neq \emptyset]}{\log \epsilon^2},$$

où  $z \sim \mathcal{L}$ .

Pour tout point  $z \in [0, 1]^2$  et  $\delta > 0$ , on définit la **Boule quantique**  $B^\delta(z)$  centrée en  $z$  et d'aire quantique  $\delta$  comme étant la boule  $B_\tau(z)$  avec

$$\tau := \sup\{r \geq 0, \mu(B_r(z)) \leq \delta\}$$

## Exposants Euclidiens et quantiques

### Définition (Exposant euclidien de $K$ )

$$x = x(K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathbb{P}[B_\epsilon(z) \cap K \neq \emptyset]}{\log \epsilon^2},$$

où  $z \sim \mathcal{L}$ .

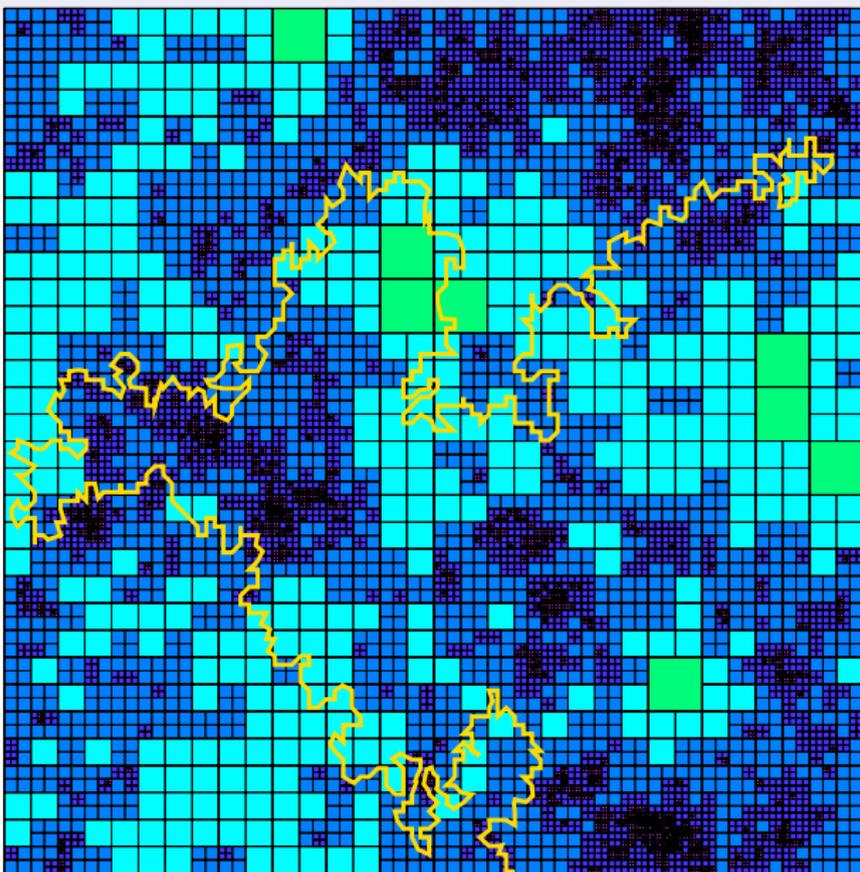
Pour tout point  $z \in [0, 1]^2$  et  $\delta > 0$ , on définit la **Boule quantique**  $B^\delta(z)$  centrée en  $z$  et d'aire quantique  $\delta$  comme étant la boule  $B_\tau(z)$  avec

$$\tau := \sup\{r \geq 0, \mu(B_r(z)) \leq \delta\}$$

### Définition (Exposant quantique de $K$ )

$$\Delta = \Delta(K) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathbb{E}[\mu[B^\delta(z) \cap K \neq \emptyset]]}{\log \delta}$$

où  $z \sim \mu = e^{\gamma h}$  et  $\mathbb{E}$  moyennise par rapport à la mesure  $\mu = e^{\gamma h}$ .



# Théorème de Duplantier-Sheffield

## Théorème (Duplantier-Sheffield)

*Soit  $\mu_\gamma = e^{\gamma h}$  la mesure de Liouville sur  $[0, 1]^2$ , et soit  $K$  un sous-ensemble de  $[0, 1]^2$  tel que la limite définissant  $x = x(K)$  existe.*

# Théorème de Duplantier-Sheffield

## Théorème (Duplantier-Sheffield)

Soit  $\mu_\gamma = e^{\gamma h}$  la mesure de Liouville sur  $[0, 1]^2$ , et soit  $K$  un sous-ensemble de  $[0, 1]^2$  tel que la limite définissant  $x = x(K)$  existe.

Alors, si  $\gamma \in [0, 2)$ , l'exposant quantique de  $K$ ,  $\Delta = \Delta(K)$ , est p.s. bien défini et satisfait à l'équation de KPZ:

$$x = \frac{\gamma^2}{4} \Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \Delta$$

# Le Champ libre Gaussien (discret)

## Définition

Le champ libre Gaussien discret dans  $\Lambda_N := \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2 \cap [0, 1]^2$  est une mesure de probabilité sur les fonctions  $h_N : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $h|_{\partial\Lambda_N} = 0$  et qui a pour densité :

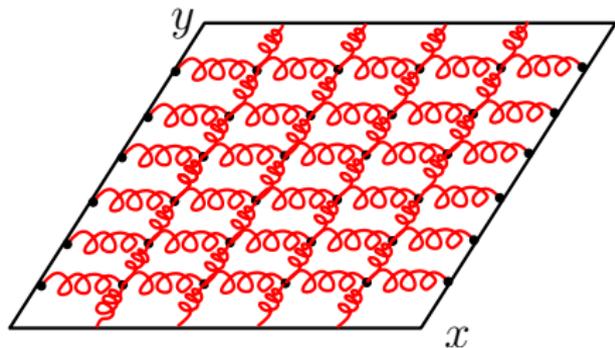
$$d\mathbb{P}[h_N] \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x \sim y} (h_N(x) - h_N(y))^2\right) \prod dh_N(x)$$

# Le Champ libre Gaussien (discret)

## Définition

Le champ libre Gaussien discret dans  $\Lambda_N := \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2 \cap [0, 1]^2$  est une mesure de probabilité sur les fonctions  $h_N : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $h|_{\partial\Lambda_N} = 0$  et qui a pour densité :

$$d\mathbb{P}[h_N] \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x \sim y} (h_N(x) - h_N(y))^2\right) \prod dh_N(x)$$

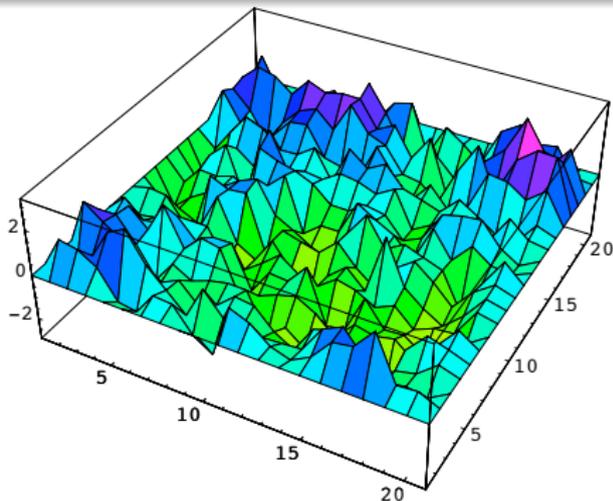
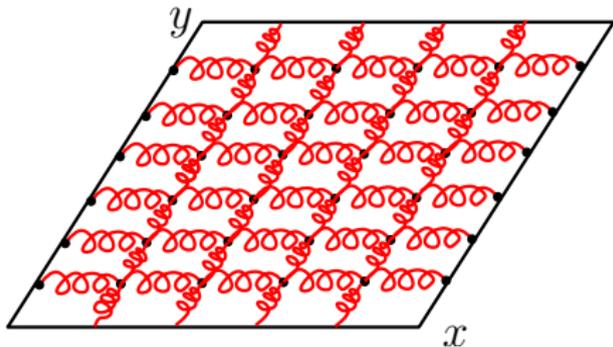


# Le Champ libre Gaussien (discret)

## Définition

Le champ libre Gaussien discret dans  $\Lambda_N := \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2 \cap [0, 1]^2$  est une mesure de probabilité sur les fonctions  $h_N : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $h|_{\partial\Lambda_N} = 0$  et qui a pour densité :

$$d\mathbb{P}[h_N] \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x \sim y} (h_N(x) - h_N(y))^2\right) \prod dh_N(x)$$



## Le Champ libre Gaussien discret (suite)

Grâce aux conditions aux bord de type **Dirichlet**, on peut réécrire la densité

$$d\mathbb{P}[h_N] = Z^{-1} \exp \left[ \frac{1}{2} \langle h_N, \Delta h_N \rangle \right]$$

## Le Champ libre Gaussien discret (suite)

Grâce aux conditions aux bord de type **Dirichlet**, on peut réécrire la densité

$$d\mathbb{P}[h_N] = Z^{-1} \exp \left[ \frac{1}{2} \langle h_N, \Delta h_N \rangle \right]$$

Ainsi, le champ libre discret est un **processus Gaussien** indexé par  $x \in \Lambda_N$  de matrice de covariance  $[-\Delta]^{-1}$

## Le Champ libre Gaussien discret (suite)

Grâce aux conditions aux bord de type **Dirichlet**, on peut réécrire la densité

$$d\mathbb{P}[h_N] = Z^{-1} \exp \left[ \frac{1}{2} \langle h_N, \Delta h_N \rangle \right]$$

Ainsi, le champ libre discret est un **processus Gaussien** indexé par  $x \in \Lambda_N$  de matrice de covariance  $[-\Delta]^{-1}$

$$[-\Delta]^{-1} = [G_N(x, y)]_{x, y \in \Lambda_N}$$

où  $G_N(x, y)$  est la *fonction de Green* de la marche aléatoire sur  $\Lambda_N$  tuée sur le bord  $\partial\Lambda_N$ .

## Le Champ libre Gaussien discret (suite)

Grâce aux conditions aux bord de type **Dirichlet**, on peut réécrire la densité

$$d\mathbb{P}[h_N] = Z^{-1} \exp \left[ \frac{1}{2} \langle h_N, \Delta h_N \rangle \right]$$

Ainsi, le champ libre discret est un **processus Gaussien** indexé par  $x \in \Lambda_N$  de matrice de covariance  $[-\Delta]^{-1}$

$$[-\Delta]^{-1} = [G_N(x, y)]_{x, y \in \Lambda_N}$$

où  $G_N(x, y)$  est la *fonction de Green* de la marche aléatoire sur  $\Lambda_N$  tuée sur le bord  $\partial\Lambda_N$ .

### Définition

Le champ libre Gaussien discret est le **processus Gaussien centré**  $h_N$  indexé par les points  $x \in \Lambda_N$ , de matrice de covariance

$$\text{Cov}[h_N(x), h_N(y)] = \mathbb{E}[h_N(x)h_N(y)] = G_N(x, y)$$

## Ordre de grandeur des fluctuations

Si  $x$  est "loin" du bord  $\partial\Lambda_N$ , alors  $G_N(x, x) \asymp \log N$ . En particulier,

$$\text{Var}[h_N(x)] = G_N(x, x) \asymp \log N$$

## Ordre de grandeur des fluctuations

Si  $x$  est "loin" du bord  $\partial\Lambda_N$ , alors  $G_N(x, x) \asymp \log N$ . En particulier,

$$\text{Var}[h_N(x)] = G_N(x, x) \asymp \log N$$

### Définition ("informelle")

Le **champ libre Gaussien** dans un domaine  $D$  est le processus Gaussien centré  $(h(x))_{x \in D}$  de matrice de covariance

$$\text{Var}[h(x), h(y)] := G_D(x, y)$$

où  $G_D$  est la fonction de Green du domaine  $D$ .

## Ordre de grandeur des fluctuations

Si  $x$  est "loin" du bord  $\partial\Lambda_N$ , alors  $G_N(x, x) \asymp \log N$ . En particulier,

$$\text{Var}[h_N(x)] = G_N(x, x) \asymp \log N$$

### Définition ("informelle")

Le **champ libre Gaussien** dans un domaine  $D$  est le processus Gaussien centré  $(h(x))_{x \in D}$  de matrice de covariance

$$\text{Var}[h(x), h(y)] := G_D(x, y)$$

où  $G_D$  est la fonction de Green du domaine  $D$ .

Vu que  $G_D(x, x) = \infty$ , cette définition nécessite d'être précisée : le champ libre  $h$  ne sera pas une fonction aléatoire  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , mais plutôt une distribution aléatoire  $h \in \mathcal{D}'$ .

## Définition moins informelle

### Définition

Le champ libre Gaussien  $h$  dans le domaine  $D$  est la distribution aléatoire  $h \in \mathcal{D}'$  caractérisée par la propriété suivante : le processus induit  $(\langle h, f \rangle)$ , indexé par les fonctions  $f \in C_c^\infty(D)$  est un **processus Gaussien centré de covariance**

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\langle h, f \rangle, \langle h, g \rangle] &= \iint f(x)g(y)G_D(x, y)dxdy \\ &= 2\pi\langle f, [-\Delta]^{-1}g \rangle\end{aligned}$$

## La fonction de Green $G_D(x, y)$ d'un domaine $D$

### Définition

La fonction de Green d'un domaine  $D \subsetneq \mathbb{C}$  est notée  $G_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ .  
Pour tout  $x \in D$ , on introduit la fonction  $G^x(y) := G_D(x, y)$ .

## La fonction de Green $G_D(x, y)$ d'un domaine $D$

### Définition

La fonction de Green d'un domaine  $D \subsetneq \mathbb{C}$  est notée  $G_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $x \in D$ , on introduit la fonction  $G^x(y) := G_D(x, y)$ . La fonction de Green est caractérisée de la façon suivante :

- (a)  $\Delta G^x(\cdot) = 0$  sur  $D \setminus \{x\}$  ( $\equiv G^x$  est harmonique dans  $D \setminus \{x\}$ )
- (b)  $G^x(y) \rightarrow 0$  lorsque  $y \rightarrow \partial D$ .
- (c)  $G^x(y) \sim \log \frac{1}{|x-y|}$  lorsque  $y \rightarrow x$ .

## La fonction de Green $G_D(x, y)$ d'un domaine $D$

### Définition

La fonction de Green d'un domaine  $D \subsetneq \mathbb{C}$  est notée  $G_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $x \in D$ , on introduit la fonction  $G^x(y) := G_D(x, y)$ . La fonction de Green est caractérisée de la façon suivante :

- (a)  $\Delta G^x(\cdot) = 0$  sur  $D \setminus \{x\}$  ( $\equiv G^x$  est harmonique dans  $D \setminus \{x\}$ )
- (b)  $G^x(y) \rightarrow 0$  lorsque  $y \rightarrow \partial D$ .
- (c)  $G^x(y) \sim \log \frac{1}{|x-y|}$  lorsque  $y \rightarrow x$ .

### Proposition

- (a) Si  $\phi : D \rightarrow D'$  est une application conforme alors  $\forall x, y \in D$ ,

$$G_D(x, y) = G_{D'}(\phi(x), \phi(y)).$$

- (b) Dans le sens des distributions,  $\frac{-1}{2\pi} \Delta[G^x(\cdot)] = \delta_x$ .

On souhaite définir  $h_\epsilon(z) := \langle h, \nu_{z,\epsilon} \rangle$  où  $\nu_{z,\epsilon}$  est la mes. unif. sur  $\partial B_\epsilon(z)$ .

On souhaite définir  $h_\epsilon(z) := \langle h, \nu_{z,\epsilon} \rangle$  où  $\nu_{z,\epsilon}$  est la mes. unif. sur  $\partial B_\epsilon(z)$ .  
Pour cela, décomposons la fonction de Green de la façon suivante :

$$G^z(y) = \log \frac{1}{|z - y|} + \tilde{G}^z(y)$$

On souhaite définir  $h_\epsilon(z) := \langle h, \nu_{z,\epsilon} \rangle$  où  $\nu_{z,\epsilon}$  est la mes. unif. sur  $\partial B_\epsilon(z)$ .  
Pour cela, décomposons la fonction de Green de la façon suivante :

$$G^z(y) = \log \frac{1}{|z-y|} + \tilde{G}^z(y)$$

### Proposition

Si  $G_\epsilon^z(y) := \log \frac{1}{\epsilon \sqrt{|z-y|}} + \tilde{G}^z(y)$ , alors dans le sens des distributions,

$$\frac{-1}{2\pi} \Delta[G_\epsilon^z(\cdot)] = \nu_{z,\epsilon} \iff 2\pi[-\Delta]^{-1} \nu_{z,\epsilon} = G_\epsilon^z(\cdot)$$

On souhaite définir  $h_\epsilon(z) := \langle h, \nu_{z,\epsilon} \rangle$  où  $\nu_{z,\epsilon}$  est la mes. unif. sur  $\partial B_\epsilon(z)$ .  
 Pour cela, décomposons la fonction de Green de la façon suivante :

$$G^z(y) = \log \frac{1}{|z-y|} + \tilde{G}^z(y)$$

### Proposition

Si  $G_\epsilon^z(y) := \log \frac{1}{\epsilon \sqrt{|z-y|}} + \tilde{G}^z(y)$ , alors dans le sens des distributions,

$$\frac{-1}{2\pi} \Delta[G_\epsilon^z(\cdot)] = \nu_{z,\epsilon} \iff 2\pi[-\Delta]^{-1}\nu_{z,\epsilon} = G_\epsilon^z(\cdot)$$

Ainsi, en utilisant la structure de covariance donnée par  
 $\text{Cov}[\langle h, f \rangle, \langle h, g \rangle] = 2\pi \langle f, [-\Delta]^{-1}g \rangle$ , on obtient (si  $h_\epsilon$  est bien défini) :

$$\begin{aligned} \text{Var}[h_\epsilon(z)] &= \langle \nu_{z,\epsilon}, 2\pi[-\Delta]^{-1}\nu_{z,\epsilon} \rangle = \langle \nu_{z,\epsilon}, G_\epsilon^z \rangle \\ &= \log 1/\epsilon + \int \tilde{G}^z(x) \nu_{z,\epsilon}(dx) \\ &= \log 1/\epsilon + \log C(z, D) \end{aligned}$$

## Mesures de Liouville

On cherche à définir la **mesure de Liouville**  $\mu = e^{\gamma h}$ . Pour cela, on va régulariser  $e^{\gamma h}$  en  $e^{\gamma h_\epsilon}$  et faire tendre la régularisation  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## Mesures de Liouville

On cherche à définir la **mesure de Liouville**  $\mu = e^{\gamma h}$ . Pour cela, on va régulariser  $e^{\gamma h}$  en  $e^{\gamma h_\epsilon}$  et faire tendre la régularisation  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Sans renormaliser,  $e^{\gamma h_\epsilon(z)} \mathcal{L}(dz)$  divergerait dans l'espace des mesures. La bonne renormalisation est la suivante :

### Définition

*Pour tout  $\epsilon > 0$ , on définit la mesure absolument continue par rapport à  $\mathcal{L}$  :*

$$d\mu_\epsilon(z) := \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma h_\epsilon(z)} dz$$

## Mesures de Liouville

On cherche à définir la **mesure de Liouville**  $\mu = e^{\gamma h}$ . Pour cela, on va régulariser  $e^{\gamma h}$  en  $e^{\gamma h_\epsilon}$  et faire tendre la régularisation  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Sans renormaliser,  $e^{\gamma h_\epsilon(z)} \mathcal{L}(dz)$  divergerait dans l'espace des mesures. La bonne renormalisation est la suivante :

### Définition

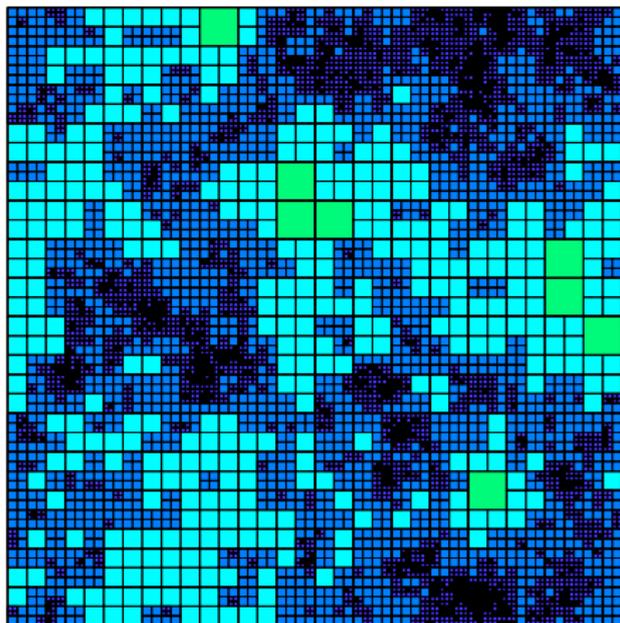
*Pour tout  $\epsilon > 0$ , on définit la mesure absolument continue par rapport à  $\mathcal{L}$  :*

$$d\mu_\epsilon(z) := \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma h_\epsilon(z)} dz$$

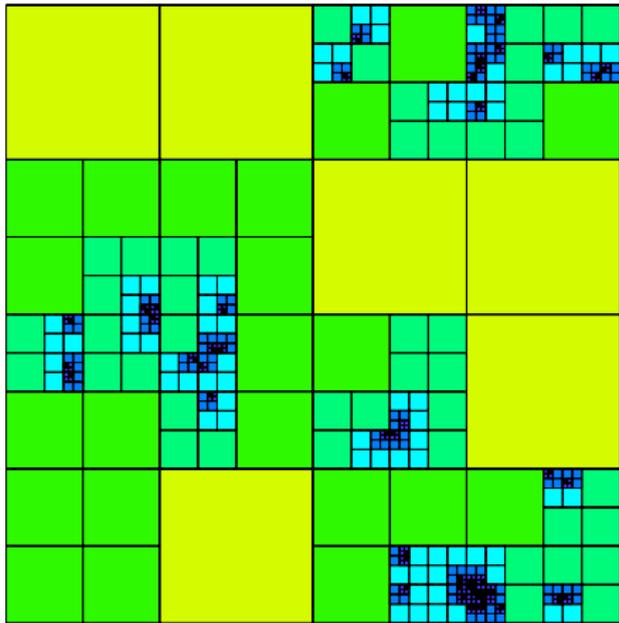
### Proposition (Duplantier-Sheffield)

*Si  $\gamma \in [0, 2)$ , alors  $\mu_\epsilon$  converge en probabilité (pour la topologie de la convergence faible des mesures) vers une mesure aléatoire non-dégénérée  $\mu_\gamma$ , la **mesure de Liouville** de paramètre  $\gamma$ . Cette mesure de Liouville  $\mu_\gamma$  est mesurable par rapport au champ libre  $h$ .*

$\mu = e^{\gamma h}$  pour  $\gamma = 3/2$ .



$\mu = e^{\gamma h}$  pour  $\gamma = 5$ .



## Pourquoi une telle renormalisation ?

Calculons pour tout  $\epsilon > 0$ , et tout borélien  $A \subset D$ ,  $\mathbb{E}\left[\int_A d\mu_\epsilon(z)\right]$ .

## Pourquoi une telle renormalisation ?

Calculons pour tout  $\epsilon > 0$ , et tout borélien  $A \subset D$ ,  $\mathbb{E}[\int_A d\mu_\epsilon(z)]$ . Cela donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_A d\mu_\epsilon(z)\right] = \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} \mathbb{E}\left[\int_A e^{\gamma h_\epsilon(z)} dz\right]$$

## Pourquoi une telle renormalisation ?

Calculons pour tout  $\epsilon > 0$ , et tout borélien  $A \subset D$ ,  $\mathbb{E}[\int_A d\mu_\epsilon(z)]$ . Cela donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_A d\mu_\epsilon(z)\right] = \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} \mathbb{E}\left[\int_A e^{\gamma h_\epsilon(z)} dz\right]$$

Rappel : pour tout point  $z$ ,  $h_\epsilon(z)$  est une Gaussienne centrée de variance  $\log 1/\epsilon + \log C(z, D)$ .

## Pourquoi une telle renormalisation ?

Calculons pour tout  $\epsilon > 0$ , et tout borélien  $A \subset D$ ,  $\mathbb{E}[\int_A d\mu_\epsilon(z)]$ . Cela donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_A d\mu_\epsilon(z)\right] = \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} \mathbb{E}\left[\int_A e^{\gamma h_\epsilon(z)} dz\right]$$

Rappel : pour tout point  $z$ ,  $h_\epsilon(z)$  est une Gaussienne centrée de variance  $\log 1/\epsilon + \log C(z, D)$ .

Si  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors  $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_A d\mu_\epsilon(z)\right] &= \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} \int_A e^{\frac{\gamma^2}{2} \left(\log \frac{1}{\epsilon} + \log C(z, D)\right)} dz \\ &= \int_A C(z, D)^{\frac{\gamma^2}{2}} dz < \infty \end{aligned}$$

## Mouvements Browniens issus du champ libre $h$

### Proposition

*Soit  $h$  un champ libre dans le domaine  $D$ . Pour tout point  $z \in D$ , soit  $t_0^z := \inf\{t \geq 0 : B_{e^{-t}}(z) \subset D\}$  et soit*

$$Y_t(z) := h_{e^{-t}}(z),$$

*le processus stochastique défini pour tout  $t \geq t_0^z$ .*

## Mouvements Browniens issus du champ libre $h$

### Proposition

Soit  $h$  un champ libre dans le domaine  $D$ . Pour tout point  $z \in D$ , soit  $t_0^z := \inf\{t \geq 0 : B_{e^{-t}}(z) \subset D\}$  et soit

$$Y_t(z) := h_{e^{-t}}(z),$$

le **processus stochastique** défini pour tout  $t \geq t_0^z$ .

Alors, le processus stochastique

$$B_t(z) := Y_{t_0^z+t} - Y_{t_0^z},$$

est un **mouvement Brownien standard**.

## Mouvements Browniens issus du champ libre $h$

### Proposition

Soit  $h$  un champ libre dans le domaine  $D$ . Pour tout point  $z \in D$ , soit  $t_0^z := \inf\{t \geq 0 : B_{e^{-t}}(z) \subset D\}$  et soit

$$Y_t(z) := h_{e^{-t}}(z),$$

le processus stochastique défini pour tout  $t \geq t_0^z$ .

Alors, le processus stochastique

$$\mathcal{B}_t(z) := Y_{t_0^z+t} - Y_{t_0^z},$$

est un mouvement Brownien standard.

"preuve": Il suffit de vérifier que pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$\text{Cov}[\mathcal{B}_s(z), \mathcal{B}_t(z)] = s (= s \wedge t)$ . Pour cela, on est ramené à calculer des covariances du type

$$\text{Cov}[h_{r_1}(z), h_{r_2}(z)] = \langle \nu_{z, r_1}, G_{r_2}^z(\cdot) \rangle$$



## Travaux liés

- Jean-Pierre Kahane. *Sur le chaos multiplicatif*, 1985

## Travaux reliés

- Jean-Pierre Kahane. *Sur le chaos multiplicatif*, 1985
- Raoul Robert and Vincent Vargas. *Gaussian multiplicative chaos revisited*, 2010.
- Rémi Rhodes and Vincent Vargas. *KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures*, 2008.

## Travaux reliés

- Jean-Pierre Kahane. *Sur le chaos multiplicatif*, 1985
- Raoul Robert and Vincent Vargas. *Gaussian multiplicative chaos revisited*, 2010.
- Rémi Rhodes and Vincent Vargas. *KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures*, 2008.
- Itai Benjamini and Nicolas Curien. *Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation: Subdiffusivity via pioneer points*. 2012

# Merci !

