Panorama de quelques processus aléatoires

Christophe Garban

Université Lyon 1

Préambule : ordres de grandeurs

Combien de **grains de sable** sur votre plage favorite ?

Archimède aurait déjà tenté de comparer le nombre de grains de sable sur Terre avec le nombre d'étoiles dans l'univers.

$\Rightarrow$ Trouver une méthode pour representer de très grands nombres (remonte d'ailleurs à Archimède)
$\Rightarrow$ Aujourd'hui: **Notation scientifique**. (4.2×10^5)

$$
\begin{aligned}
10^0 &= 1 \\
10^1 &= 10 \\
10^2 &= 100
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
10^6 &= 1\,000\,000 \ \ (= 1 \text{ million}) \\
10^{-3} &= 0.001 \ \ (= 1/1000)
\end{aligned}
$$

$$10^0 = 1 \qquad 10^6 = 1\,000\,000 \ (= 1 \text{ million})$$
$$10^1 = 10 \qquad 10^{-3} = 0.001 \ (= 1/1000)$$
$$10^2 = 100$$

Example 1

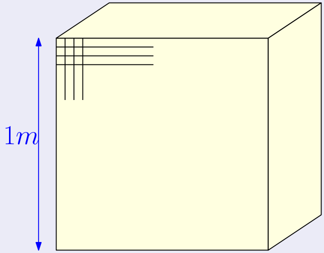
La terre est peuplée d'environ **7.5 milliards d'êtres humains**, soit $N = 7.5 \times 10^9$

$$10^0 = 1 \qquad 10^6 = 1\,000\,000 \ (= 1 \text{ million})$$
$$10^1 = 10 \qquad 10^{-3} = 0.001 \ (= 1/1000)$$
$$10^2 = 100$$

Example 1

La terre est peuplée d'environ **7.5 milliards d'êtres humains**, soit $N = 7.5 \times 10^9$

Example 2 : grains de sable

1. 

Commencer par estimer le Nb de grains dans un m^3: compter 0.1 mm$= 10^{-4} m$ de diamètre pour du *sable fin*.

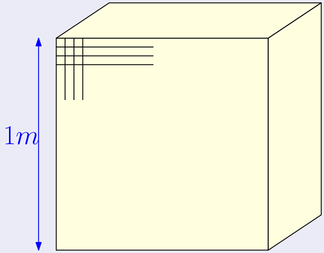
$$
\begin{aligned}
10^0 &= 1 & \qquad 10^6 &= 1\,000\,000 \;\; (= 1 \text{ million})\\
10^1 &= 10 & \qquad 10^{-3} &= 0.001 \;\; (= 1/1000)\\
10^2 &= 100 & &
\end{aligned}
$$

Example 1

La terre est peuplée d'environ **7.5 milliards d'êtres humains**, soit $N = 7.5 \times 10^9$

Example 2 : grains de sable

1



Commencer par estimer le Nb de grains dans un m^3: compter 0.1 mm$= 10^{-4}m$ de diamètre pour du *sable fin*.
On trouve

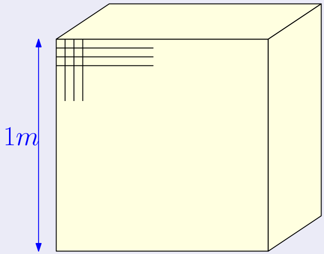
$$n = (10^4) \times (10^4) \times (10^4) = 10^{12} \;\; (!)$$

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 \\ 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10^6 &= 1\,000\,000 \;\; (= 1 \text{ million}) \\ 10^{-3} &= 0.001 \;\; (= 1/1000) \end{aligned}$$

Example 1

La terre est peuplée d'environ **7.5 milliards d'êtres humains**, soit $N = 7.5 \times 10^9$

Example 2 : grains de sable

1. 

Commencer par estimer le Nb de grains dans un m^3: compter 0.1 mm$= 10^{-4}m$ de diamètre pour du *sable fin*.
On trouve

$$n = (10^4) \times (10^4) \times (10^4) = 10^{12} \;\; (!)$$

2. Mesurer les dimensions de votre plage: par exemple $L = 1000m$, $l = 100m$, $p = 10m$, ce qui donne

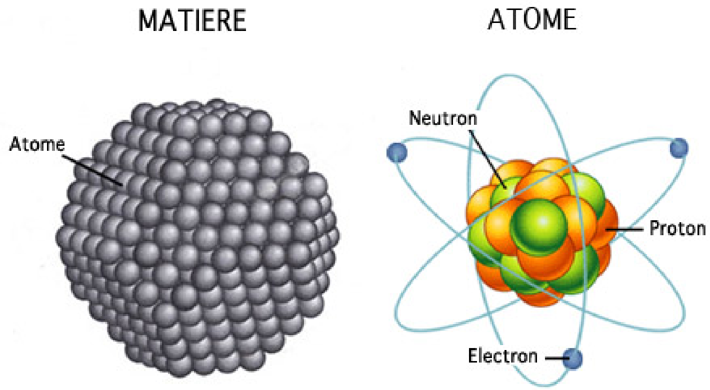
$$N_{\text{votre plage favorite}} \approx 10^{12} \times 1000 \times 100 \times 10 = 10^{18} \;\; (!!)$$

Plan de cet exposé

A. Le mouvement Brownien
  - Origines (Brown, Einstein, Perrin)
  - Application : compter les atomes !
  - Autres processus aléatoires reliés au mouvement Brownien (turbulence, finance)

B. Marches aléatoires
  - Mélanger les cartes
  - Classer les pages web (Google)

Partie I. Les atomes : une quête millénaire



Hypothèse atomique

Introduite dès l'antiquité (!), **l'hypothèse atomique** prédit une structure **discontinue** de la matière. Cette matière serait constituée de *briques élémentaires* : les atomes!

Les atomes : une quête millénaire

- Pour les grecs, avant tout un courant philosophique
- Au XIX$^{\text{ème}}$: hypothèse très importante en chimie (John Dalton)

Les atomes : une quête millénaire

- Pour les grecs, avant tout un courant philosophique
- Au XIX$^{\text{ème}}$: hypothèse très importante en chimie (John Dalton)
- Impossible de les "*voir*" avant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$!

Les atomes : une quête millénaire

- Pour les grecs, avant tout un courant philosophique
- Au XIX$^{\text{ème}}$: hypothèse très importante en chimie (John Dalton)
- Impossible de les *"voir"* avant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$!

Question

Comment mettre alors en évidence leur **existence** ?
Peut-on les **compter** sans les voir ?

Les atomes : une quête millénaire

- Pour les grecs, avant tout un courant philosophique
- Au XIX$^{\text{ème}}$: hypothèse très importante en chimie (John Dalton)
- Impossible de les *"voir"* avant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$!

Question

Comment mettre alors en évidence leur **existence** ?
Peut-on les **compter** sans les voir ?

- En 1905, **Albert Einstein** apporte une contribution importante à cette question en donnant une explication théorique à un curieux mouvement, d'apparence aléatoire, découvert en 1827 par le botaniste **Robert Brown**

- Pour les grecs, avant tout un courant philosophique
- Au XIX$^{\text{ème}}$: hypothèse très importante en chimie (John Dalton)
- Impossible de les *"voir"* avant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$!

Question

Comment mettre alors en évidence leur **existence** ?
Peut-on les **compter** sans les voir ?

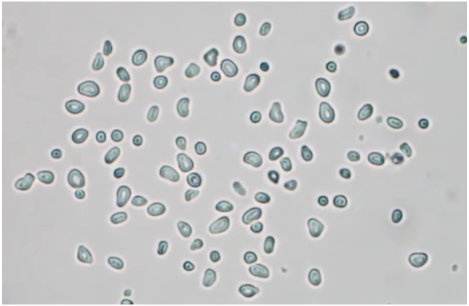
- En 1905, **Albert Einstein** apporte une contribution importante à cette question en donnant une explication théorique à un curieux mouvement, d'apparence aléatoire, découvert en 1827 par le botaniste **Robert Brown**
- A partir du travail théorique d'Einstein, **Jean Perrin** développe un *protocole experimental* qui lui permet de compter les atomes !

L'observation de Robert Brown

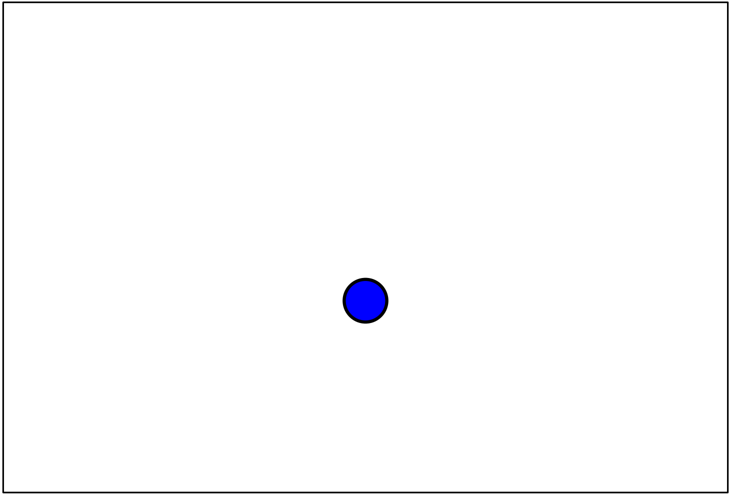
En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un "mouvement erratique". Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.

L'observation de Robert Brown

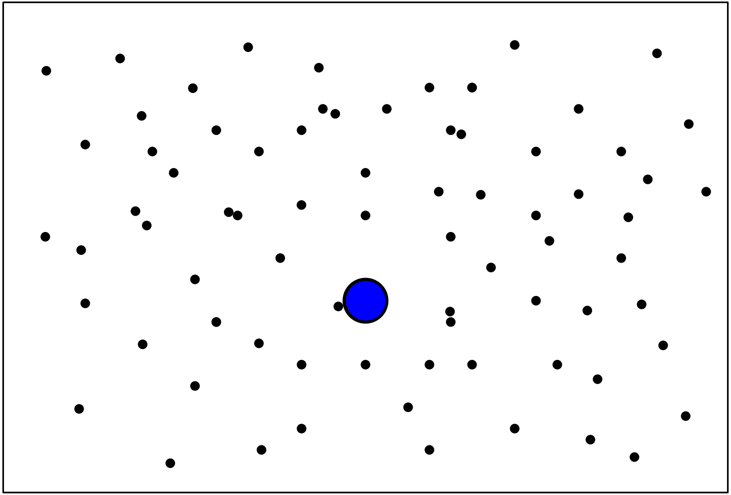
En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un "mouvement erratique". Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



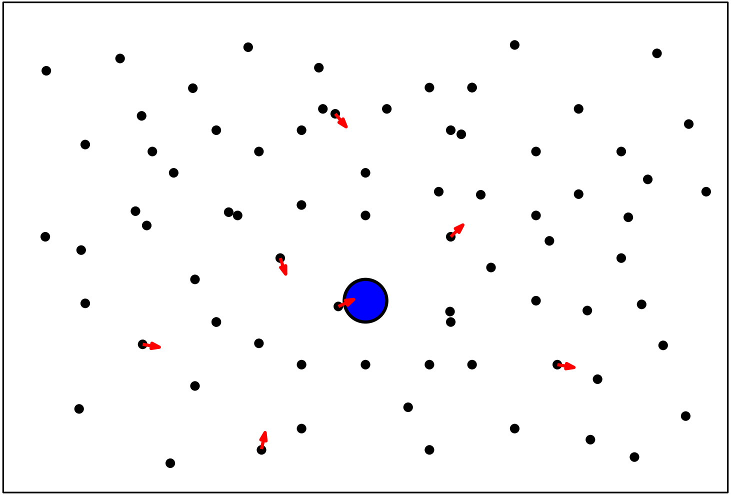
Comment expliquer un tel mouvement erratique ? (Einstein)



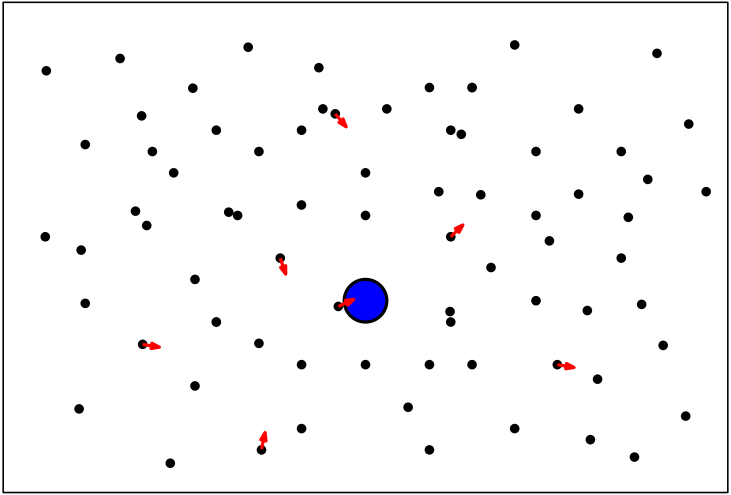
Comment expliquer un tel mouvement erratique ? (Einstein)



Comment expliquer un tel mouvement erratique ? (Einstein)

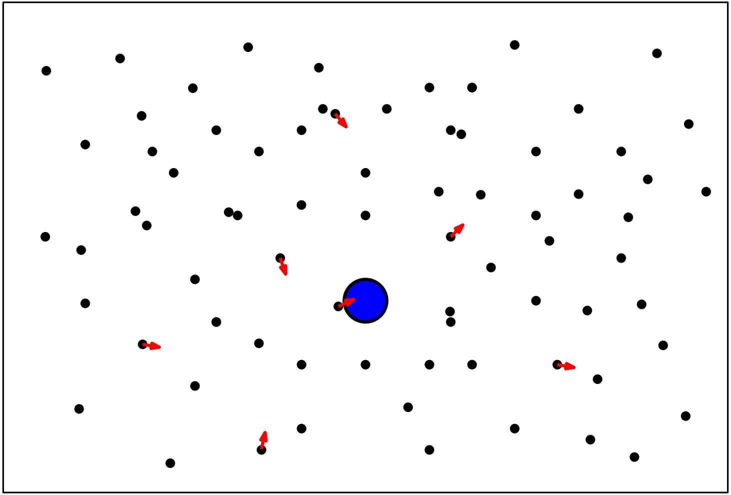


Comment expliquer un tel mouvement erratique ? (Einstein)



$\longrightarrow$ un système d'environ 10^{24} équations à résoudre ....

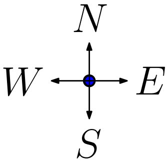
Comment expliquer un tel mouvement erratique ? (Einstein)



⟶ un système d'environ 10^{24} équations à résoudre ....

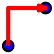
⟶ principe récurrent dans la suite de cet exposé : quand l'étude déterministe d'un système devient trop complexe : adopter une **approche probabiliste**

Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)

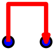


Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)

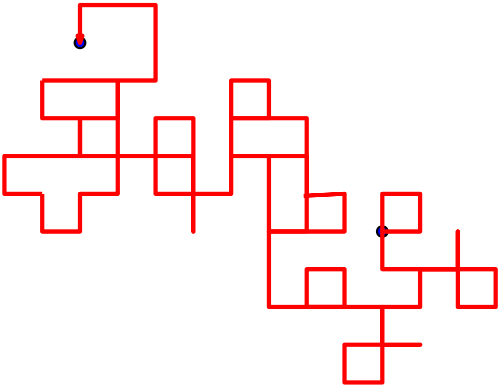
Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



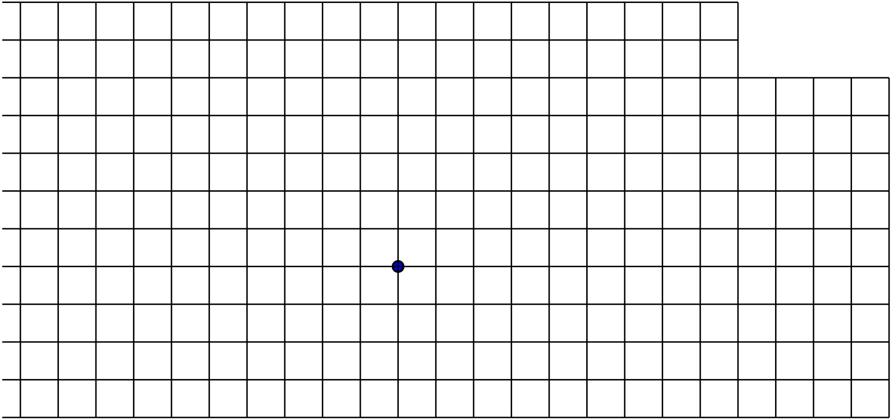
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



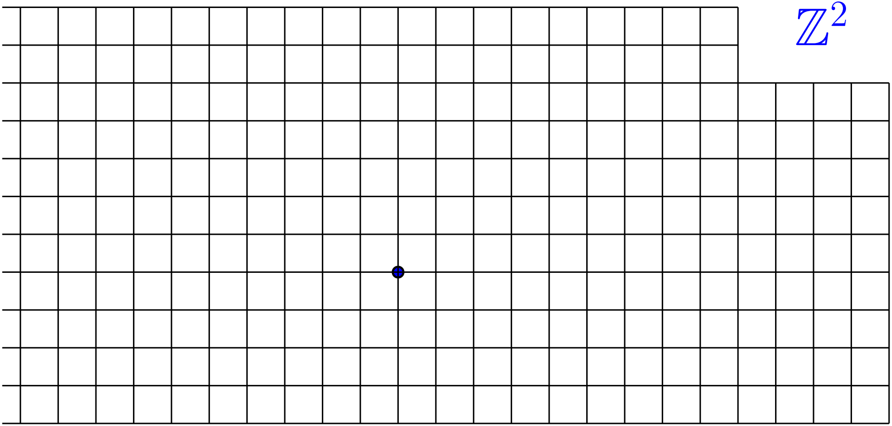
Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



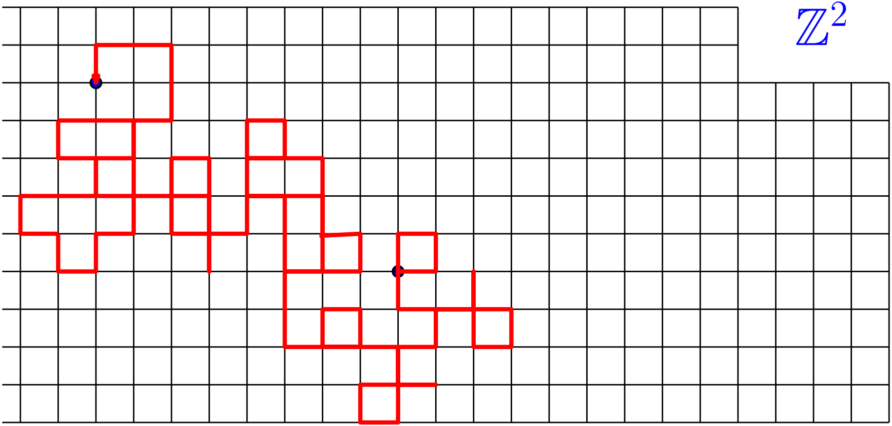
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



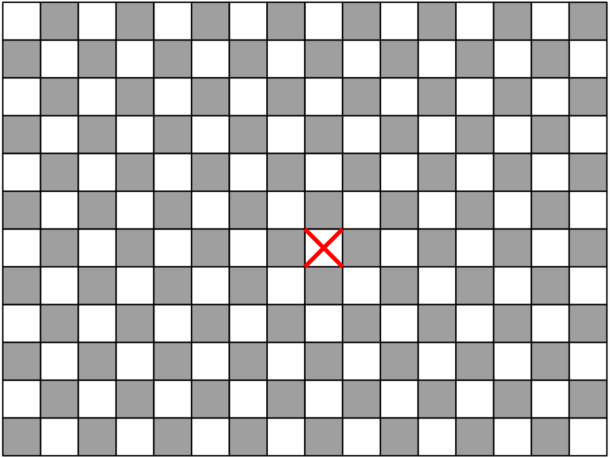
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



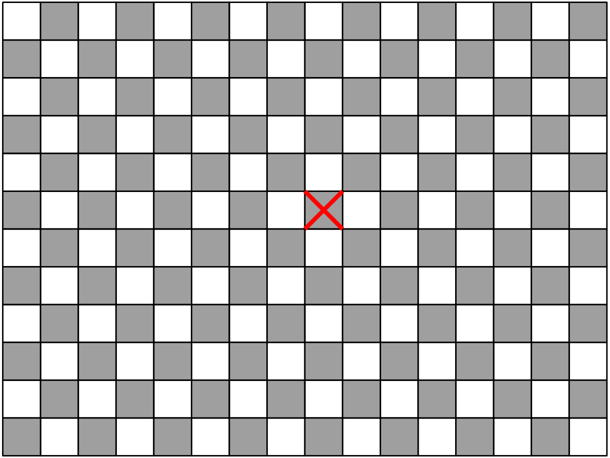
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



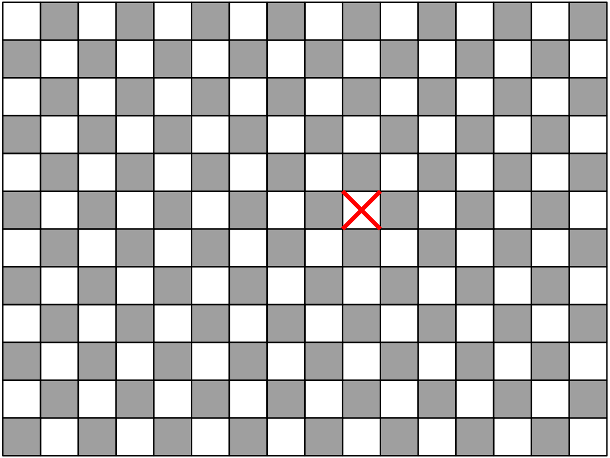
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



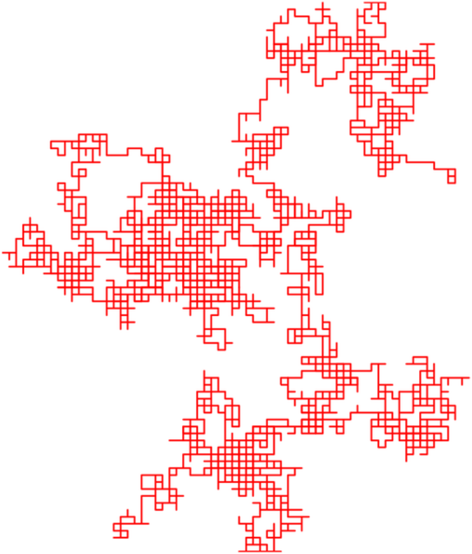
Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire sur une grille ($\mathbb{Z}^2$)



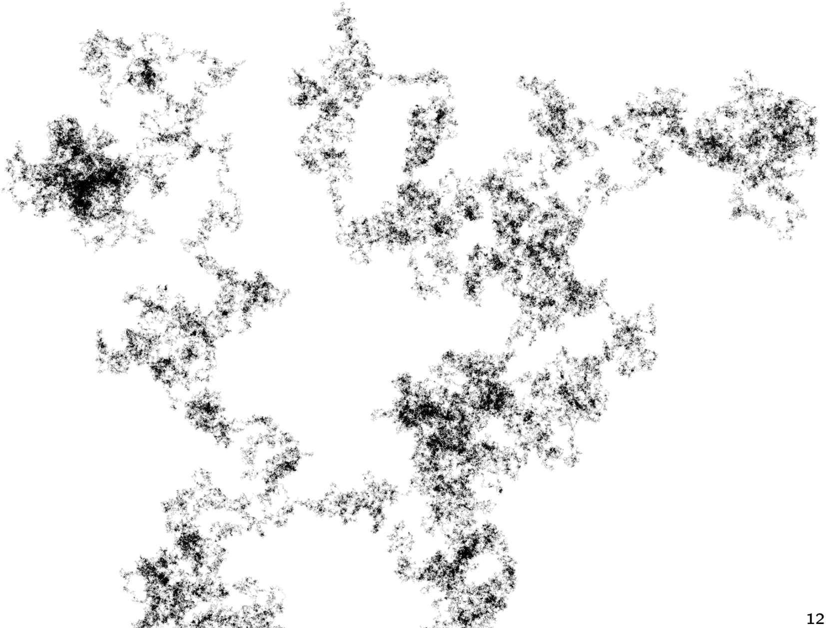
Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ vue de loin !



Images prises sur *Wikipedia*

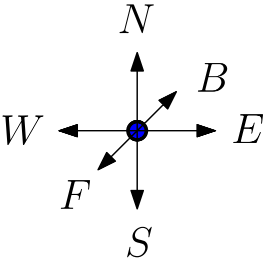
vue d'un peu plus loin !!

2,000,000 de pas (belle image de Wikipedia)



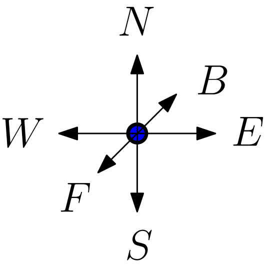
Modèle à la fois très simple et “fractal”

Pour créer de telles images **fractales**, la seule source d'aléa dont nous avons besoin peut être générée par :

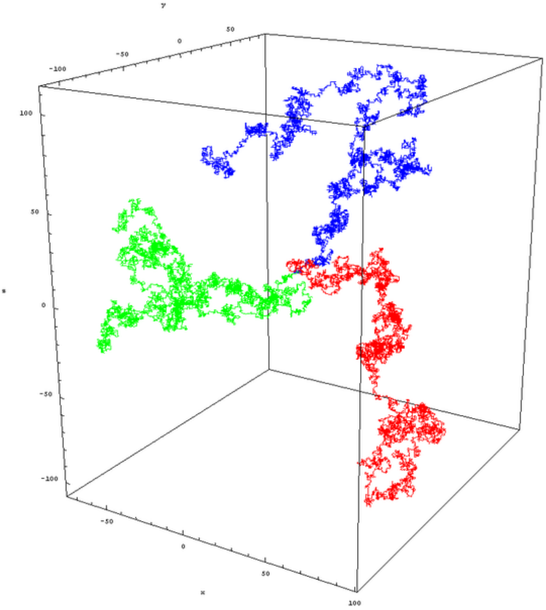


On part suivant chaque direction
avec probabilité 1/6

Et en dimension 3 ? $\longrightarrow \mathbb{Z}^3$



On part suivant chaque direction
avec probabilité 1/6



A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

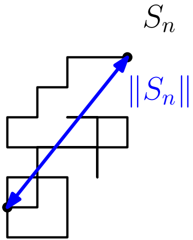
Notre trajectoire étant **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse EN MOYENNE une marche aléatoire s’éloigne-t-elle de son point de départ ?

A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Notre trajectoire étant **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse EN MOYENNE une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si S_n est la position de notre marche aléatoire au temps n dans $\mathbb{Z}^2$, on aimerait comprendre la fonction

$$n \mapsto \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right]$$

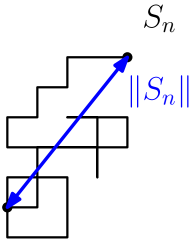


A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Notre trajectoire étant **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse EN MOYENNE une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si S_n est la position de notre marche aléatoire au temps n dans $\mathbb{Z}^2$, on aimerait comprendre la fonction

$$n \mapsto \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right]$$



On s'attend au comportement suivant

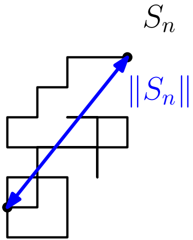
$$1 \ll \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right] \ll n$$

A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Notre trajectoire étant **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse EN MOYENNE une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si S_n est la position de notre marche aléatoire au temps n dans $\mathbb{Z}^2$, on aimerait comprendre la fonction

$$n \mapsto \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right]$$



On s'attend au comportement suivant

$$1 \ll \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right] \ll n$$

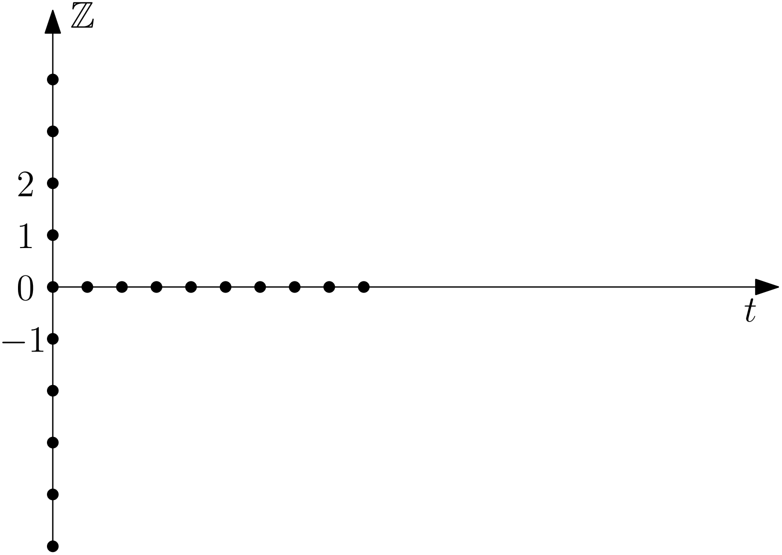
Théorème

Si $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ alors quand $n \to \infty$

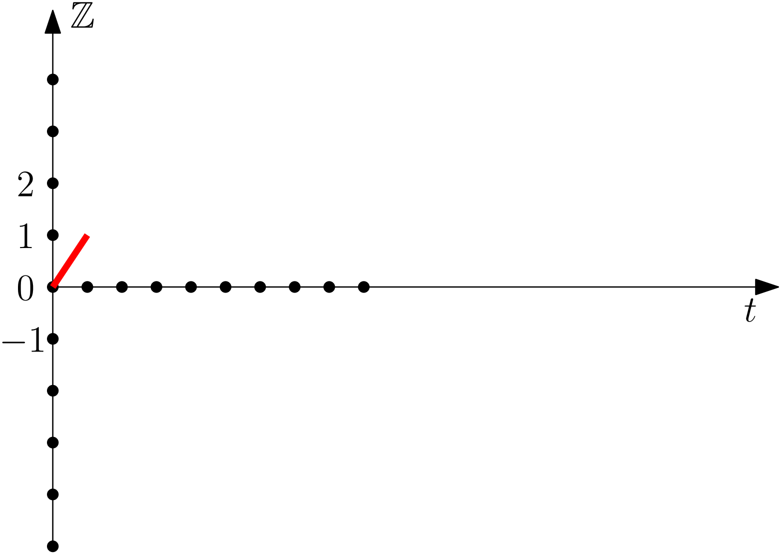
$$\mathbb{E}\left[\|S_n\|^2\right] = n$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\|S_n\|\right] \approx \sqrt{n}$$

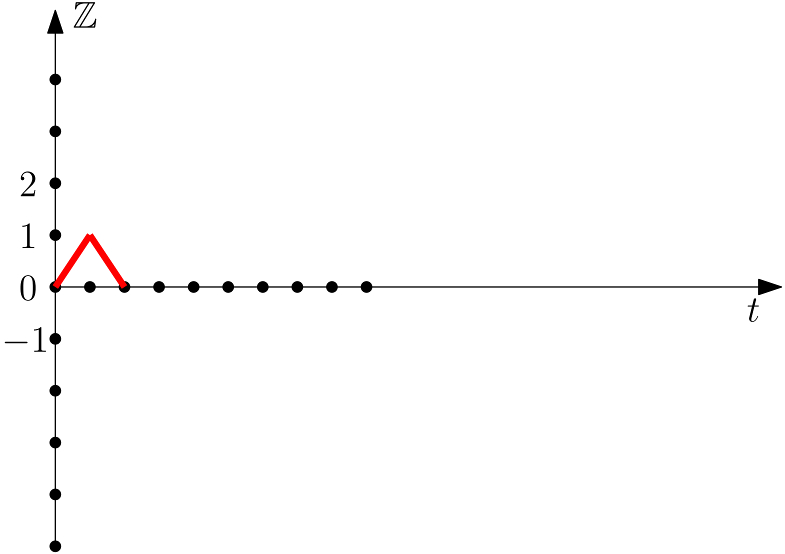
Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



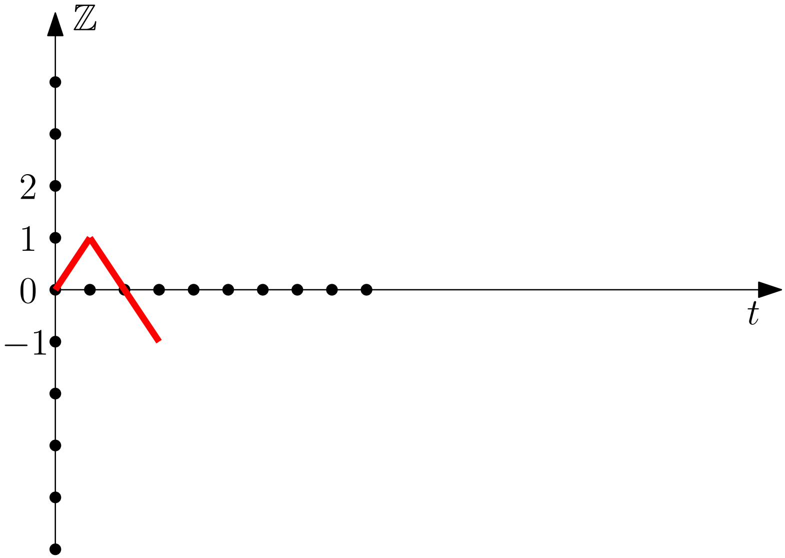
Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



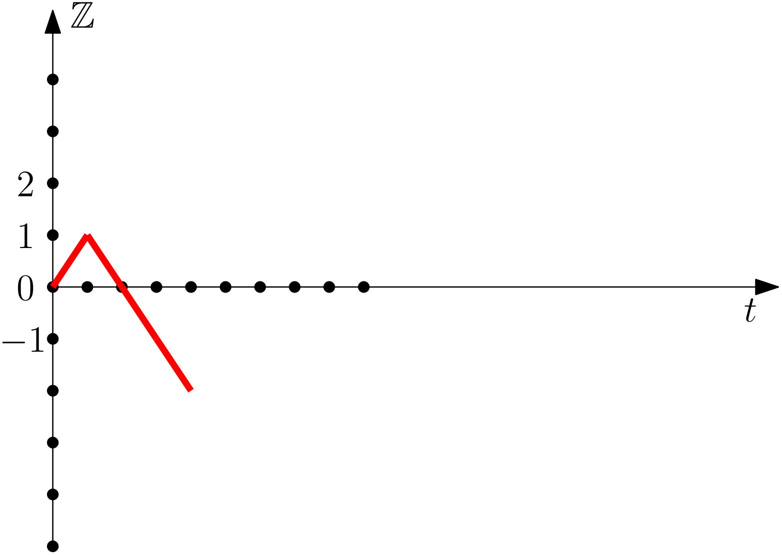
Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en “une dimension” ($d = 1$) ?



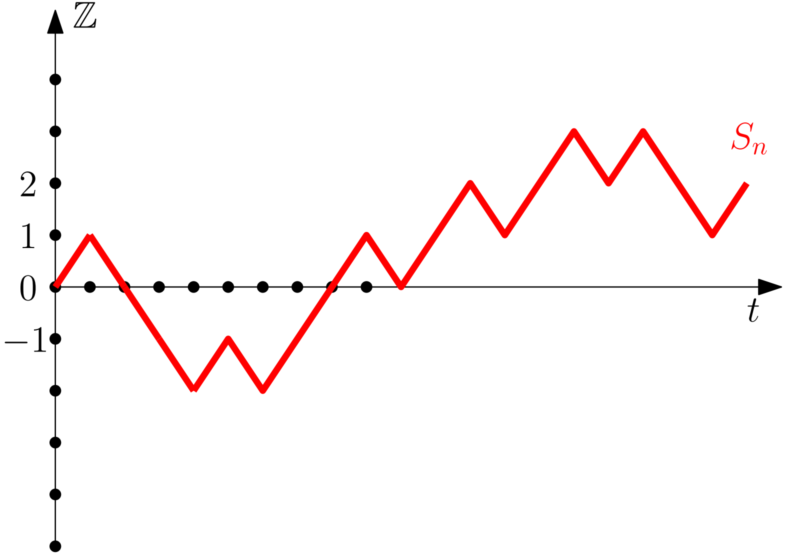
Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



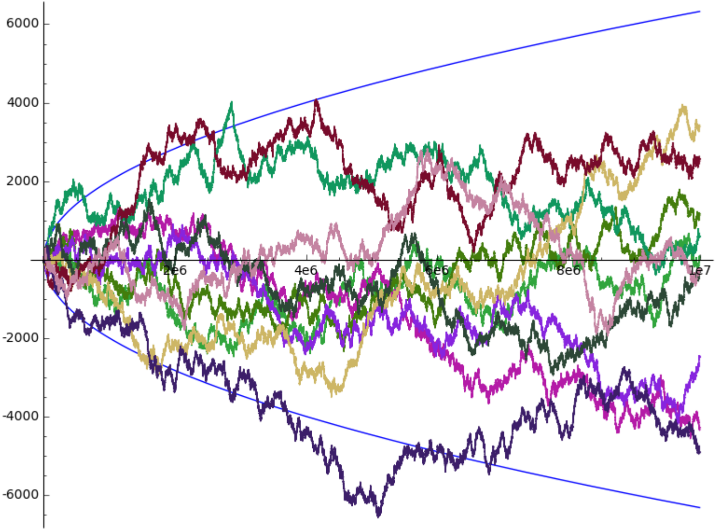
Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



Que signifie ce résultat pour une marche aléatoire en "une dimension" ($d = 1$) ?



Combien d'atomes dans un verre d'eau ?

Commençons par un vote ! **A votre avis ?**

A. Moins d'atomes dans un verre d'eau que de grains de sable sur votre plage (10^{18}) ?

OU ?

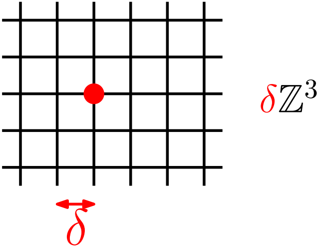
B. Pus d'atomes ?

Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?

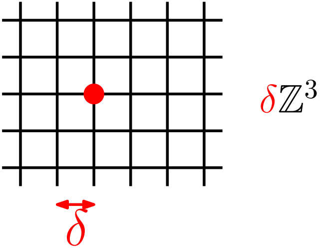
Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?

Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?

Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?



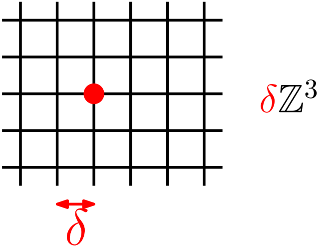
Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?



ce qu'on ne connaît pas :

- Le pas du reseau δ ??
- Δt ??

Comment "compter" les atomes ?
Quelles données sont à notre disposition ?



ce qu'on ne connaît pas :

- Le pas du reseau δ ??
- Δt ??

trajectoire $t \mapsto B(t)$

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations
de l'experience :

1. La masse de la particule : m

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. La masse de la particule : m
2. Le rayon de la particule : r

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. La masse de la particule : m
2. Le rayon de la particule : r
3. La **température** du fluide : T
   $\longrightarrow$ **ENERGIE**

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. La masse de la particule : m
2. Le rayon de la particule : r
3. La **température** du fluide : T
   $\longrightarrow$ **ENERGIE**
4. La **viscosité** du fluide : η

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. La masse de la particule : m
2. Le rayon de la particule : r
3. La **température** du fluide : T $\longrightarrow$ **ENERGIE**
4. La **viscosité** du fluide : η
5. Le **coéfficient de diffusion** D :

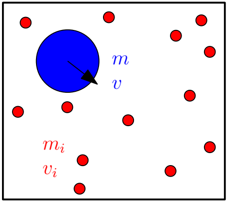
$$\boxed{\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\, t}$$

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. La masse de la particule : m
2. Le rayon de la particule : r
3. La **température** du fluide : T
   $\longrightarrow$ **ENERGIE**
4. La **viscosité** du fluide : η
5. Le **coéfficient de diffusion** D :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\, t}$$



Relation d'Einstein

$$D = \frac{R\,T}{\pi\,\mathcal{N}_a\,\eta\,r}$$

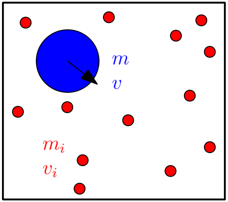
- R = Cste des gaz parfaits
  $R = 8.31\,\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$
- $\mathcal{N}_a$ = Nombre d'Avogadro
  = Nb d'atomes dans 12g de Carbone C^{12}
  = ??

Données du problème et relation d'Einstein

Données/observations de l'experience :

1. ~~La masse de la particule : m~~
2. Le rayon de la particule : r
3. La **température** du fluide : T
   $\longrightarrow$ **ENERGIE**
4. La **viscosité** du fluide : η
5. Le **coéfficient de diffusion** D :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\,t}$$



Relation d'Einstein

$$D = \frac{R\,T}{\pi\,\mathcal{N}_a\,\eta\,r}$$

- R = Cste des gaz parfaits
  $R = 8.31\,\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$
- $\mathcal{N}_a$ = Nombre d'Avogadro
  = Nb d'atomes dans 12g de Carbone C^{12}
  = ??

Protocole expérimental (Jean Perrin)

$$\boxed{D = \frac{RT}{\pi\,\eta\,r\,\mathcal{N}_a}}$$

Jean Perrin :

1. Plusieurs particules de rayons r

Protocole expérimental (Jean Perrin)

$$\boxed{D = \frac{RT}{\pi\,\eta\,r\,\mathcal{N}_a}}$$

Jean Perrin :

1. Plusieurs particules de rayons r
2. à différentes températures T

Protocole expérimental (Jean Perrin)

$$\boxed{D = \frac{RT}{\pi\,\eta\,r\,\mathcal{N}_a}}$$

Jean Perrin :

1. Plusieurs particules de rayons r
2. à différentes températures T
3. A chaque fois, il mesure D via $\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\,t$.

Protocole expérimental (Jean Perrin)

$$\boxed{D = \frac{RT}{\pi\,\eta\,r\,\mathcal{N}_a}}$$

Jean Perrin :

1. Plusieurs particules de rayons r
2. à différentes températures T
3. A chaque fois, il mesure D via $\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\,t$.

En 1908, il obtient ainsi $\mathcal{N}_a \approx 7.15\ \times 10^{23}$!! Pas si éloigné que ça de

$$\mathcal{N}_a = 6.022 \times 10^{23}\ !$$

Protocole expérimental (Jean Perrin)

$$\boxed{D = \frac{RT}{\pi\,\eta\,r\,\mathcal{N}_a}}$$

Jean Perrin :

1. Plusieurs particules de rayons r
2. à différentes températures T
3. A chaque fois, il mesure D via $\mathbb{E}\left[\|B(t)\|^2\right] = D\,t$.

En 1908, il obtient ainsi $\mathcal{N}_a \approx 7.15\ \times 10^{23}$!! Pas si éloigné que ça de

$$\mathcal{N}_a = 6.022 \times 10^{23}\ !$$

- Prix Nobel en 1926 “pour ses travaux sur la discontinuité de la matière”
- Eau = H^2O. Il suffit de peser notre verre d'eau pour obtenir le nombre de *moles d'eau*. Pour un verre de 300g, on obtient

$$N_{\text{atomes}} \approx 10^{24} \gg N_{\text{grains de sables}}$$

Suite de l'exposé

A. Le mouvement Brownien

- ~~Origines (Brown, Einstein, Perrin)~~
- ~~Application : compter les atomes !~~
- Autres processus aléatoires reliés au mouvement Brownien

  1. turbulence
  2. finance

B. Marches aléatoires

- Mélanger les cartes
- Classer les pages web (Google)

"Turbulencia", Léonard de Vinci, fin XV$^{\text{ème}}$

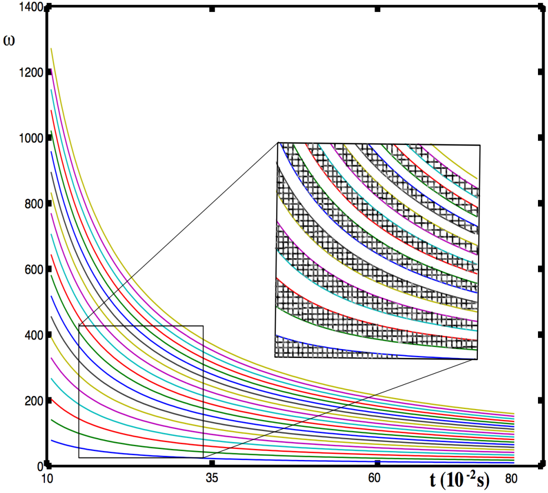
La turbulence : phénomène déterministe ou aléatoire ?

L'évolution d'un fluide est régit par une *équation*, appelée **équation de Navier-Stokes**.

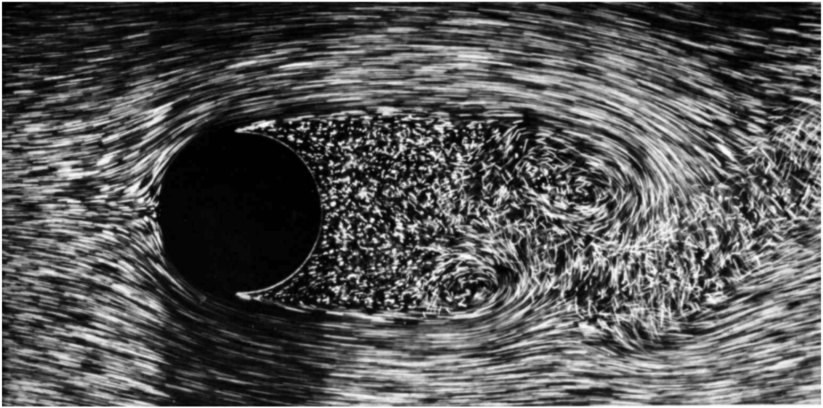
$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u + f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Par comparaison, un lancer *pile ou face* : est-ce déterministe ou aléatoire ?

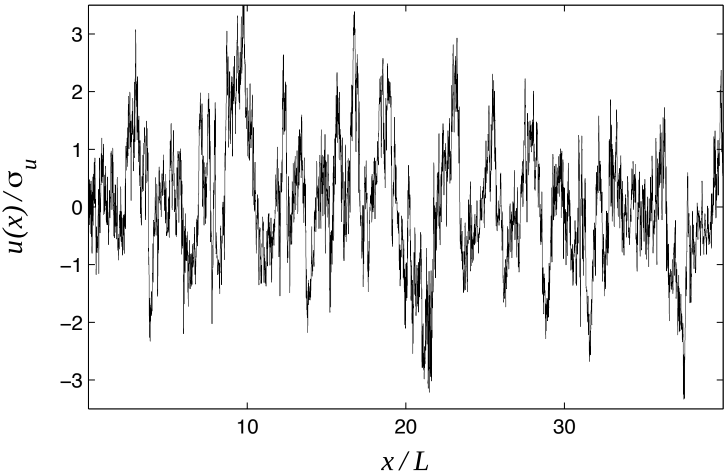
Diaconis, Holmes, Montgomery, **Dynamical Bias in the Coin Toss**, 2007.



Processus aléatoires et turbulence

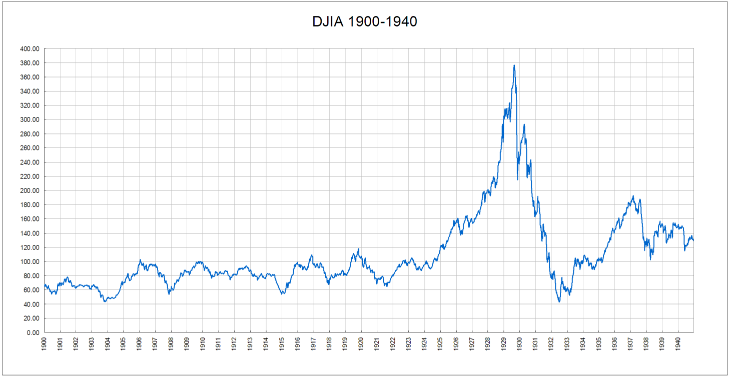


Processus aléatoires et turbulence

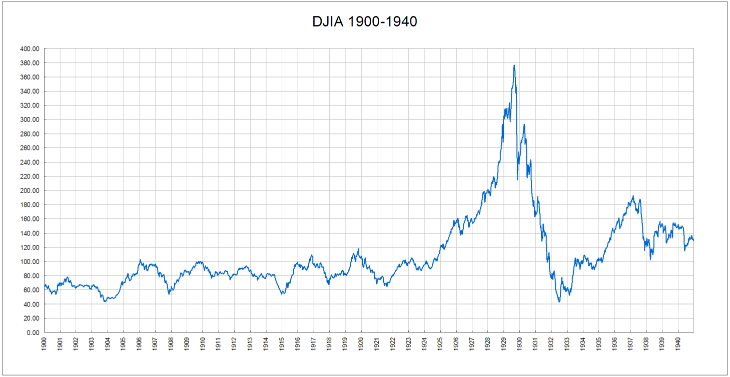


Andrey Kolmogorov a analysé/expliqué dans les années 1940 les propriétés fractales des signaux observés.
⇒ “ **Mouvements Browniens fractionnaires**”

Processus aléatoires en Finance



Processus aléatoires en Finance



R. Brown, 1827

Louis Bachelier, 1901

A. Einstein, 1905

Partie II. Comment mélanger les cartes ?

Une première question

De combien de façons différentes peut-on mélanger un paquet de $n = 52$ cartes ?

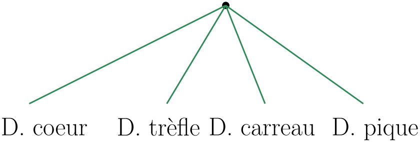
Partie II. Comment mélanger les cartes ?

Une première question

De combien de façons différentes peut-on mélanger un paquet de $n = 52$ cartes ?

Commençons par compter tous les paquets possibles de $n = 4$ cartes

Méthode possible de dénombrement : dessiner un arbre

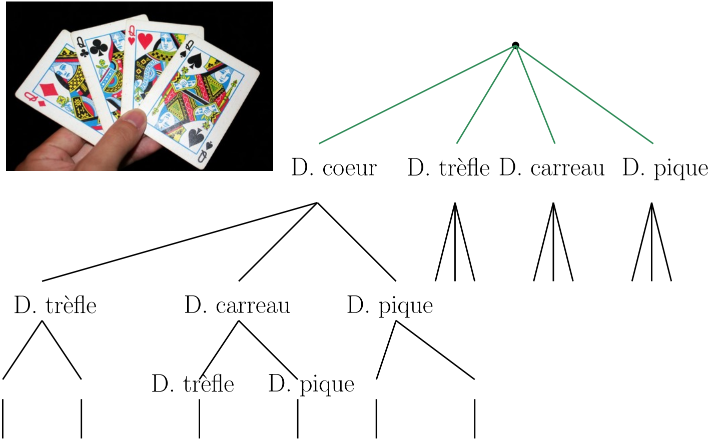


Méthode possible de dénombrement : dessiner un arbre

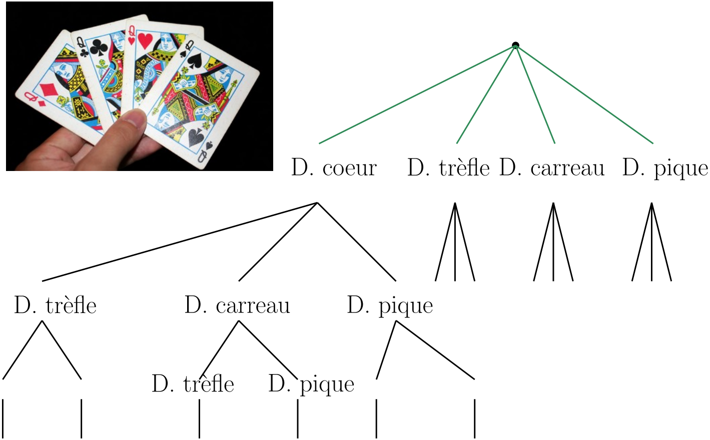
D. coeur D. trèfle D. carreau D. pique

D. trèfle D. carreau D. pique

Méthode possible de dénombrement : dessiner un arbre



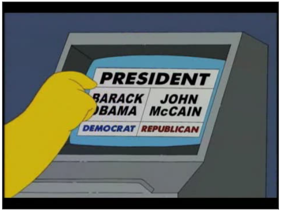
Méthode possible de dénombrement : dessiner un arbre



On trouve ainsi

$$N_{4\ \text{cartes}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Avec un paquet de 52 cartes ?



A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$N_{52 \text{ cartes}} \quad =$$

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$N_{52\text{ cartes}} = 52 \times$$

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$N_{52 \text{ cartes}} = 52 \times 51 \times \ldots \times 2 \times 1$$

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$\begin{aligned} N_{52\text{ cartes}} &= 52 \times 51 \times \ldots \times 2 \times 1 \\ &= 52! \end{aligned}$$

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$
\begin{aligned}
N_{52\text{ cartes}} &= 52 \times 51 \times \ldots \times 2 \times 1 \\
&= 52! \\
&\approx \mathbf{8.06 \times 10^{67}}
\end{aligned}
$$

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$\begin{aligned} N_{52 \text{ cartes}} &= 52 \times 51 \times \ldots \times 2 \times 1 \\ &= 52! \\ &\approx \mathbf{8.06 \times 10^{67}} \end{aligned}$$

Deux constats

1. C'est presque du même ordre de grandeur que le nombre estimé d'atomes dans **l'univers tout entier** !!!! ($N_{\text{univers}} \approx 10^{78}$)

Avec un paquet de 52 cartes ?

A. Moins de paquets de cartes que de grains de sables ?

B. Plus de paquets de cartes que de grains de sables ?

C. Plus de paquets de cartes que d'atomes dans le **système solaire** ?

$$
\begin{aligned}
N_{52\text{ cartes}} &= 52 \times 51 \times \ldots \times 2 \times 1 \\
&= 52! \\
&\approx \mathbf{8.06 \times 10^{67}}
\end{aligned}
$$

Deux constats

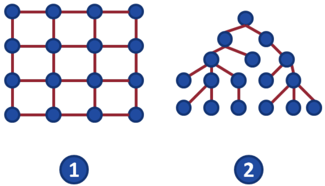
1. C'est presque du même ordre de grandeur que le nombre estimé d'atomes dans **l'univers tout entier** !!!! ($N_{\text{univers}} \approx 10^{78}$)
2. Si vous mélangez vous-mêmes un paquet de 52 cartes (*longuement*), alors avec une **très forte probabilité**, ce paquet est unique! Personne ne l'a mélangé de cette façon par le passé ! *(un peu comme votre génome)*

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

1. Qu'est-ce qu'un **graphe** ?

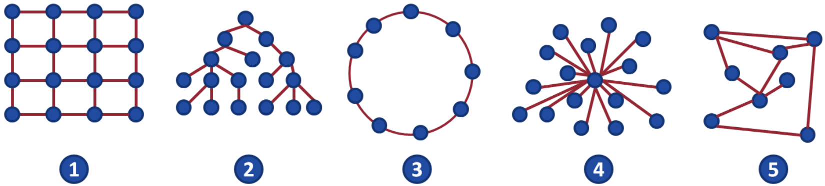
Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

1. Qu'est-ce qu'un **graphe** ? C'est une structure discrète qui ressemble à ça



Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

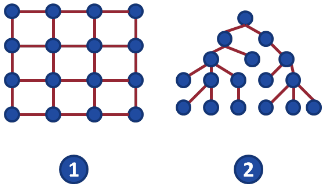
1. Qu'est-ce qu'un **graphe** ? C'est une structure discrète qui ressemble à ça



Mathématiquement, un graphe G est un couple $G = (S, A)$ où S désigne l'ensemble des **sommets** et A désigne l'ensemble des **arêtes**.

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

1. Qu'est-ce qu'un **graphe** ? C'est une structure discrète qui ressemble à ça



Mathématiquement, un graphe G est un couple $G = (S, A)$ où S désigne l'ensemble des **sommets** et A désigne l'ensemble des **arêtes**.

2. Un exemple: **le graphe des poignées de mains**. Ici $G = (S, A)$ où S est l'ensemble de tous les êtres humains sur Terre $|S| \approx 7.5 \times 10^9$ A est l'ensemble des arêtes qui relient deux sommets i et j si i et j se sont un jour serrés la main :) ! On dit de ce graphe que son diamètre est ≤ 7

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

Pour le mélange des cartes : plusieurs façons de procéder! Chacune correspond à un graphe.

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

Pour le mélange des cartes : plusieurs façons de procéder! Chacune correspond à un graphe. Prenons par exemple le **Riffle Shuffle**

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

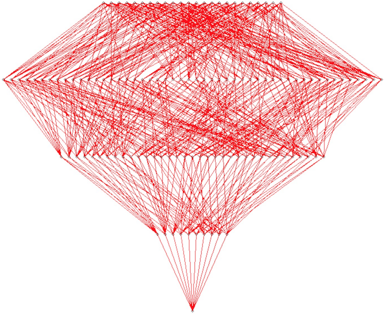
Pour le mélange des cartes : plusieurs façons de procéder! Chacune correspond à un graphe. Prenons par exemple le **Riffle Shuffle**

On peut représenter le Riffle Shuffle comme une **marche aléatoire** sur un graphe $G = (S, A)$ où

- S est l'ensemble de tous les paquets de cartes possibles. $|S| \approx 8 \times 10^{67}$.
- A est l'ensemble des arêtes entre deux paquets de cartes P_1 et P_2, si un riffle shuffle permet d'aller de P_1 vers P_2.

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

Pour le mélange des cartes : plusieurs façons de procéder! Chacune correspond à un graphe. Prenons par exemple le **Riffle Shuffle**

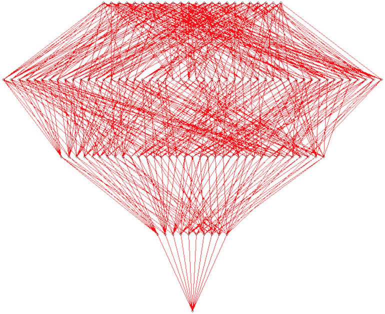


On peut représenter le Riffle Shuffle comme une **marche aléatoire** sur un graphe $G = (S, A)$ où

- S est l'ensemble de tous les paquets de cartes possibles. $|S| \approx 8 \times 10^{67}$.
- A est l'ensemble des arêtes entre deux paquets de cartes P_1 et P_2, si un riffle shuffle permet d'aller de P_1 vers P_2.

Mélanger les cartes = une marche aléatoire sur un *graphe*

Pour le mélange des cartes : plusieurs façons de procéder! Chacune correspond à un graphe. Prenons par exemple le **Riffle Shuffle**



On peut représenter le Riffle Shuffle comme une **marche aléatoire** sur un graphe $G = (S, A)$ où

- S est l'ensemble de tous les paquets de cartes possibles. $|S| \approx 8 \times 10^{67}$.
- A est l'ensemble des arêtes entre deux paquets de cartes P_1 et P_2, si un riffle shuffle permet d'aller de P_1 vers P_2.

Question

Combien faut-il de **riffle shuffles** pour que le paquet soit bien mélangé ?

Combien de **Riffle shuffles** ?

En partant d'un paquet neuf, il est n'est pas difficile de voir qu'on peut atteindre relativement peu de paquets possibles après seulement **1** riffle shuffle. En effet on peut en atteindre

$$2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15} \ll 8 \times 10^{67}$$

Combien de **Riffle shuffles** ?

En partant d'un paquet neuf, il est n'est pas difficile de voir qu'on peut atteindre relativement peu de paquets possibles après seulement **1** riffle shuffle. En effet on peut en atteindre

$$2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15} \ll 8 \times 10^{67}$$

Théorème (Bayer, Diaconis 1992)

- *Il faut aller au delà de* $\log_2(n)$ *riffle shuffles pour mélanger un paquet de* n ***cartes****.*

Combien de **Riffle shuffles** ?

En partant d'un paquet neuf, il est n'est pas difficile de voir qu'on peut atteindre relativement peu de paquets possibles après seulement **1** riffle shuffle. En effet on peut en atteindre

$$2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15} \ll 8 \times 10^{67}$$

Théorème (Bayer, Diaconis 1992)

- *Il faut aller au delà de* $\log_2(n)$ *riffle shuffles pour mélanger un paquet de* n ***cartes****.*
- *Pour* $n = 52$*, on peut estimer qu'à partir de* ***7 Riffle shuffles****, le paquet est bien mélangé !! En revanche avec seulement 5 shuffles, on est très loin d'être bien mélangé ! (****Diaconis*** *a un tour de magie qui illustre ça).*

Combien de **Riffle shuffles** ?

En partant d'un paquet neuf, il est n'est pas difficile de voir qu'on peut atteindre relativement peu de paquets possibles après seulement **1** riffle shuffle. En effet on peut en atteindre

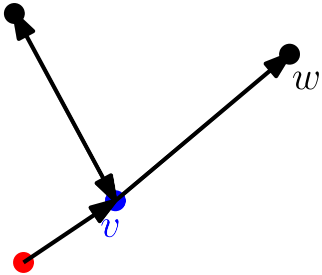
$$2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15} \ll 8 \times 10^{67}$$

Théorème (Bayer, Diaconis 1992)

- *Il faut aller au delà de* $\log_2(n)$ *riffle shuffles pour mélanger un paquet de* n ***cartes****.*
- *Pour* $n = 52$*, on peut estimer qu'à partir de* ***7 Riffle shuffles****, le paquet est bien mélangé !! En revanche avec seulement 5 shuffles, on est très loin d'être bien mélangé ! (****Diaconis*** *a un tour de magie qui illustre ça).*

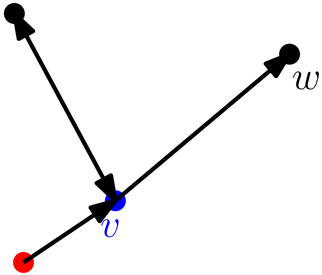
Ce théorème a fait parler de lui jusque dans le **New York Times!**

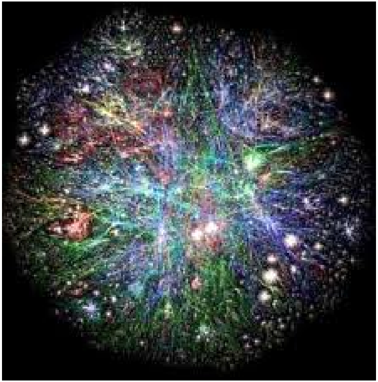
On s'intéresse au **graphe des pages web** : $G = (S, A)$.



Marches aléatoires et Google : le graphe du Web

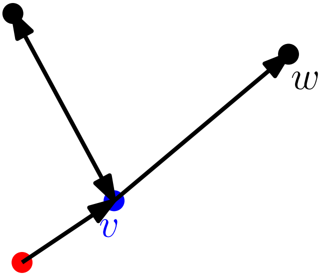
On s'intéresse au **graphe des pages web** : $G = (S, A)$.

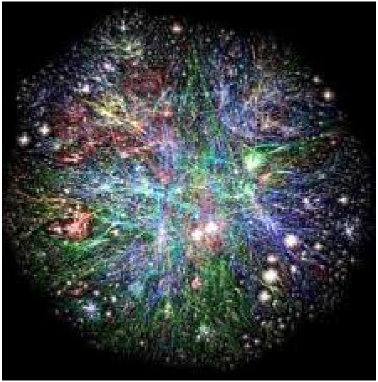




Marches aléatoires et Google : le graphe du Web

On s'intéresse au **graphe des pages web** : $G = (S, A)$.



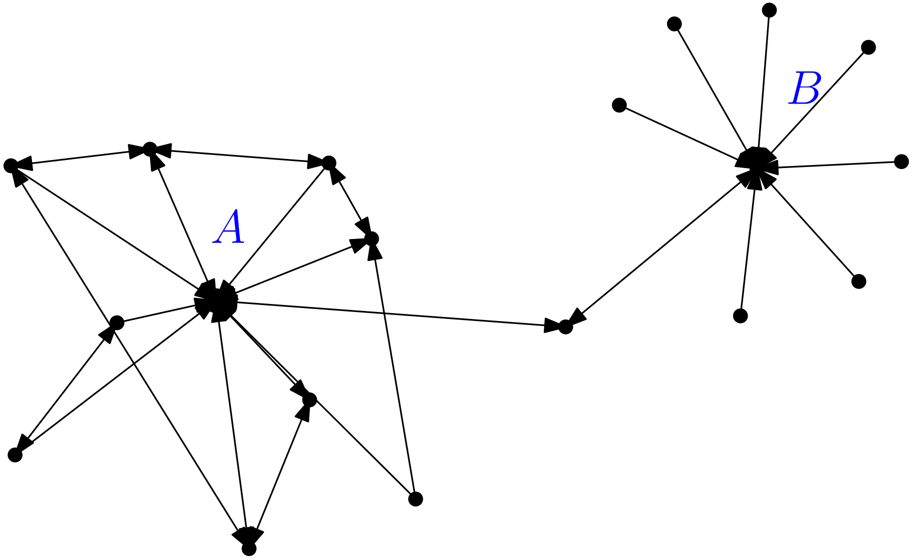


On 25 July 2008, Google software engineers Jesse Alpert and Nissan Hajaj announced that Google Search had discovered one trillion (i.e. 10^{12}*) unique URLs*

$$\#\text{pages web} = |S| \approx 10^{12}$$

"page ranking" : Altavista v.s. Google

“page ranking” : Altavista v.s. Google



Google en 1998 :)