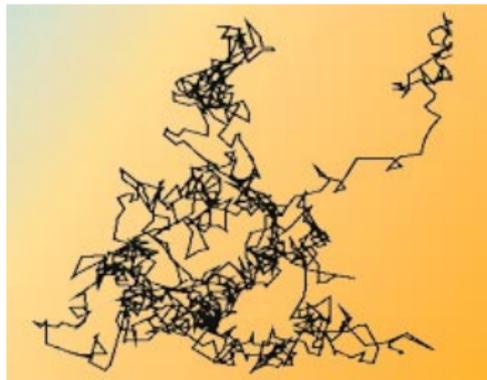


# Marches aléatoires : du nombre d'Avogadro à Google

Christophe Garban

ENS Lyon, CNRS



# Préambule: Einstein en 1905 : “Annus Mirabilis”

A 26 ans, Einstein publie 4 articles fondateurs !



- ▶ Un premier article sur **l'effet photo-électrique** → “particules” de lumières ou **photons** → Mécanique quantique

# Préambule: Einstein en 1905 : “Annus Mirabilis”

A 26 ans, Einstein publie 4 articles fondateurs !



- ▶ Un premier article sur l'effet photo-électrique → “particules” de lumières ou photons → Mécanique quantique
- ▶ Un troisième article qui introduit la théorie de la relativité restreinte !

# Préambule: Einstein en 1905 : “Annus Mirabilis”

A 26 ans, Einstein publie 4 articles fondateurs !



- ▶ Un premier article sur l'effet photo-électrique → “particules” de lumières ou **photons** → Mécanique quantique
- ▶ Un troisième article qui introduit la théorie de la **relativité restreinte** !
- ▶ Un quatrième sur l'équivalence de la masse et de l'énergie →

$$E = m c^2 .$$

# Préambule: Einstein en 1905 : “Annus Mirabilis”

A 26 ans, Einstein publie 4 articles fondateurs !



- ▶ Un premier article sur l'**effet photo-électrique** → “particules” de lumières ou **photons** → Mécanique quantique
- ▶ Un troisième article qui introduit la théorie de la **relativité restreinte** !
- ▶ Un quatrième sur l'équivalence de la masse et de l'énergie →  $E = m c^2$ .
- ▶ Un deuxième sur le **Mouvement Brownien** → Existence et dénombrement des **atomes** !

# Plan de l'histoire de ce soir

- ▶ 1827 : l'observation de Robert Brown, botaniste écossais

# Plan de l'histoire de ce soir

- ▶ 1827 : l'observation de Robert Brown, botaniste écossais
- ▶ Comment modéliser un "Mouvement Brownien" → Marches aléatoires

# Plan de l'histoire de ce soir

- ▶ 1827 : l'observation de Robert Brown, botaniste écossais
- ▶ Comment modéliser un "Mouvement Brownien" → Marches aléatoires
- ▶ Etude des marches aléatoires (sur  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ )

# Plan de l'histoire de ce soir

- ▶ 1827 : l'observation de Robert Brown, botaniste écossais
- ▶ Comment modéliser un "Mouvement Brownien" → Marches aléatoires
- ▶ Etude des marches aléatoires (sur  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ )
- ▶ Comment "compter les atomes" : l'approche d'Einstein (1905)

# Plan de l'histoire de ce soir

- ▶ 1827 : l'observation de Robert Brown, botaniste écossais
- ▶ Comment modéliser un "Mouvement Brownien" → Marches aléatoires
- ▶ Etude des marches aléatoires (sur  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ )
- ▶ Comment "compter les atomes" : l'approche d'Einstein (1905)



- ▶ Débat sur l'allure d'une courbe "typique" au XIX<sup>e</sup> siècle.
- ▶ Marches aléatoires et comment bien mélanger les cartes : le "Riffle Shuffle"
- ▶ Marches aléatoires et Google

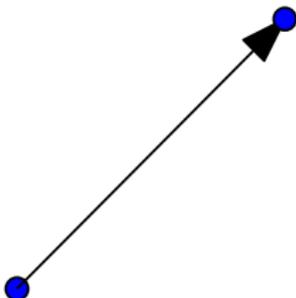
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un “**mouvement erratique**”. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



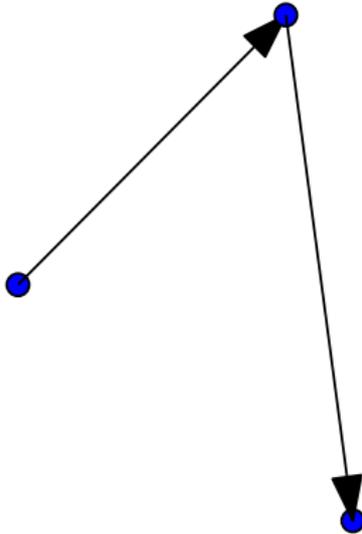
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un "mouvement erratique". Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



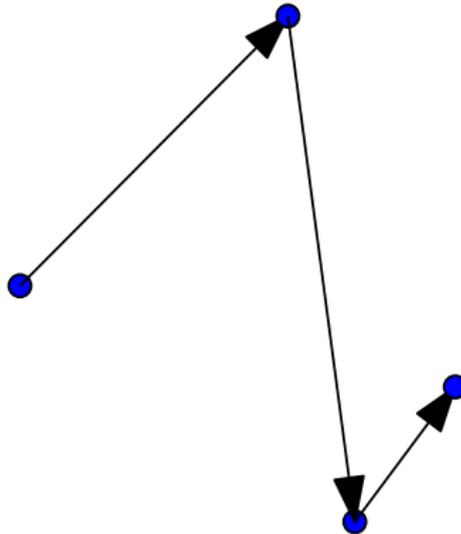
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un **“mouvement erratique”**. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



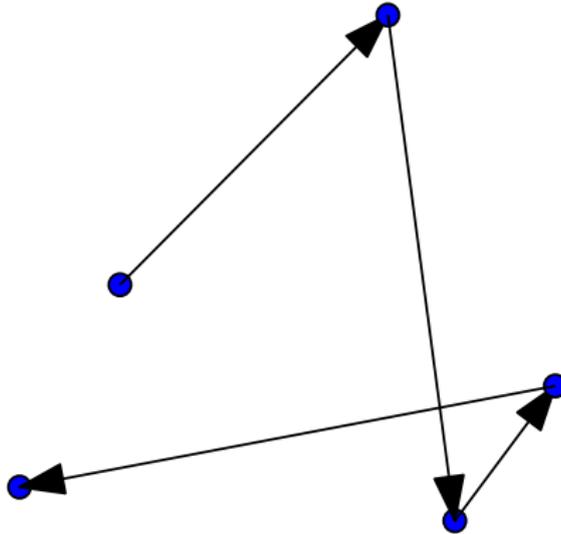
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un **“mouvement erratique”**. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



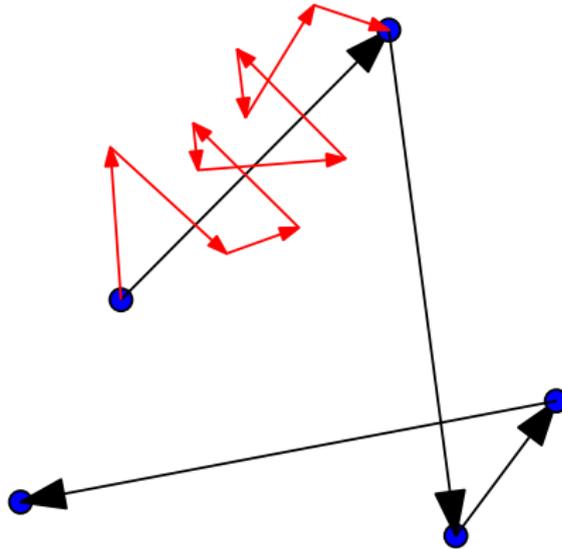
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un **“mouvement erratique”**. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



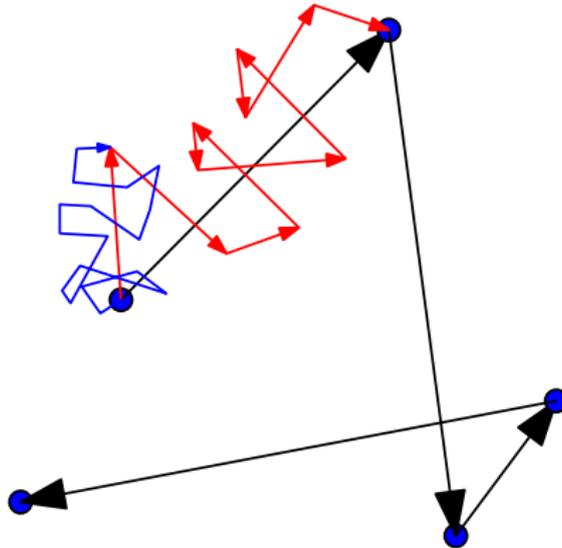
# L'observation de Robert Brown

En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un **“mouvement erratique”**. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.

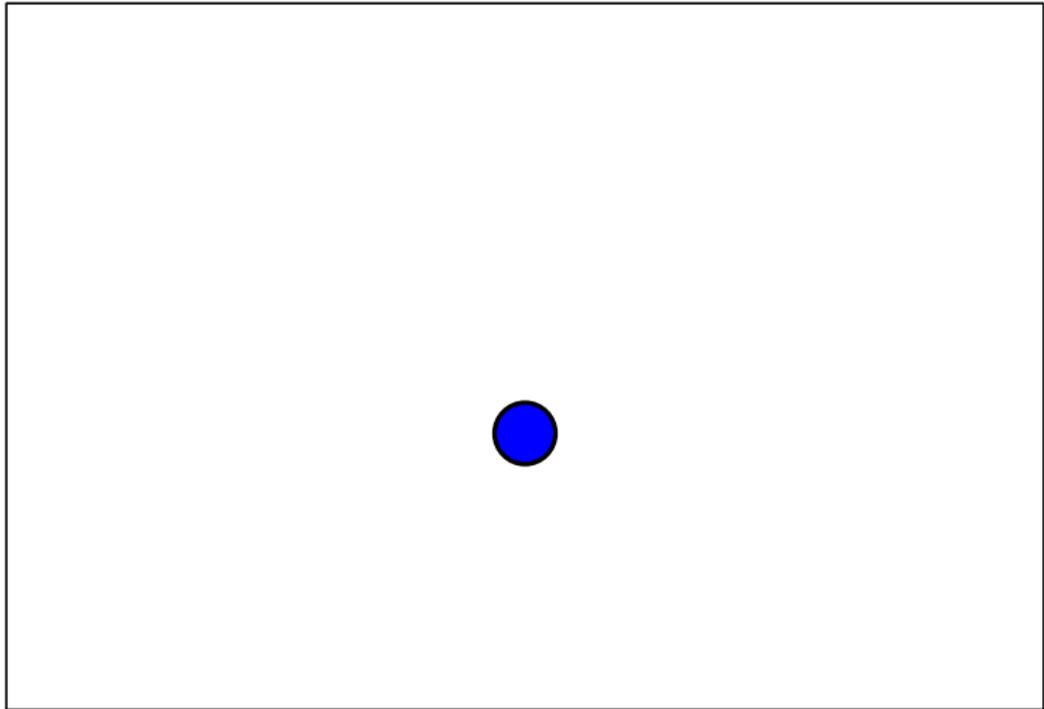


# L'observation de Robert Brown

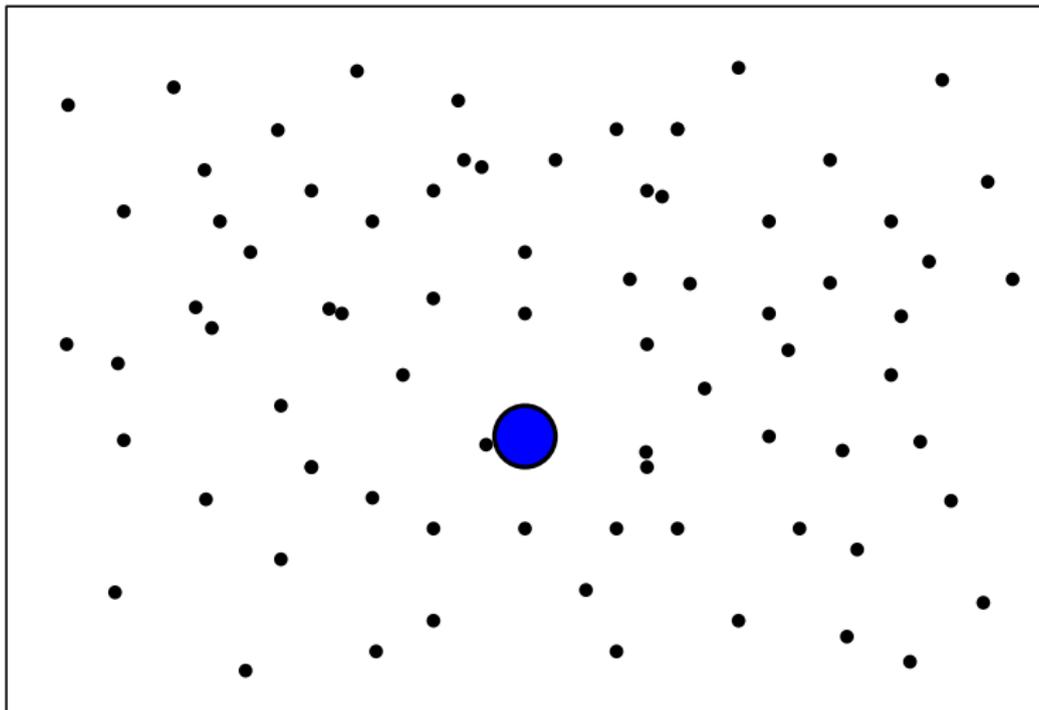
En 1827, Robert Brown observe des fines particules de pollen suspendues dans du liquide. Il observe au microscope que ces petites particules bougent dans tous les sens suivant un **“mouvement erratique”**. Ce mouvement portera plus tard le nom de **Mouvement Brownien**.



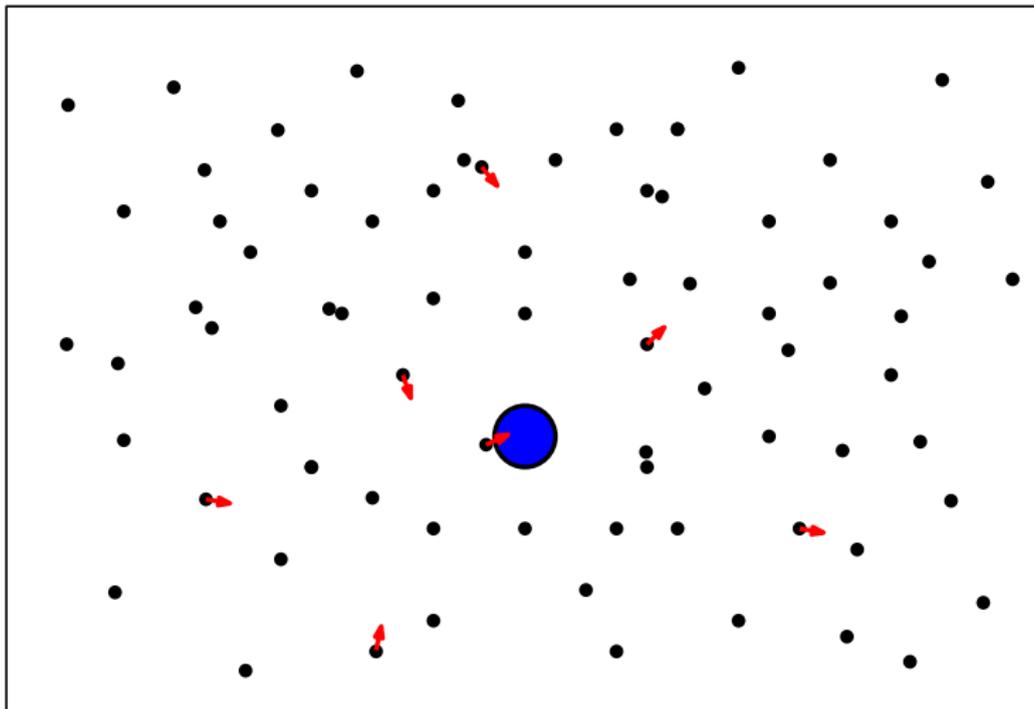
# Comment modeliser un tel mouvement erratique ?



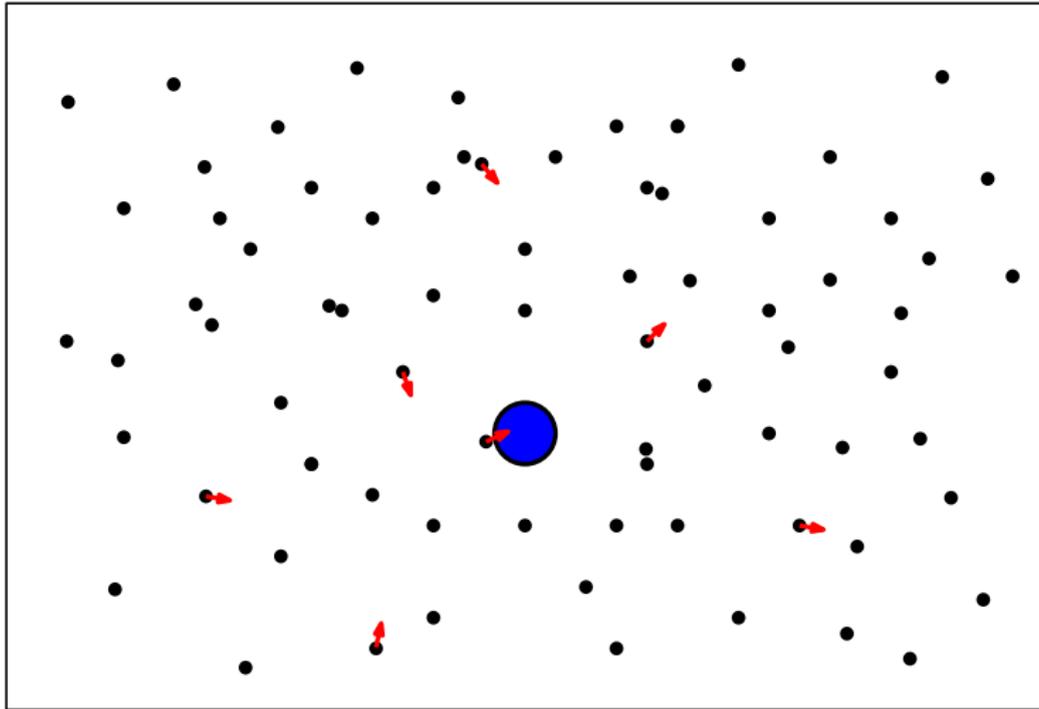
# Comment modeliser un tel mouvement erratique ?



# Comment modeliser un tel mouvement erratique ?



# Comment modeliser un tel mouvement erratique ?



—→ un système d'environ  $10^{24}$  équations différentielles à résoudre

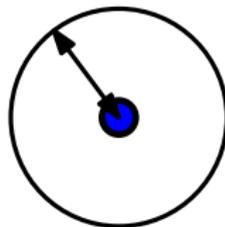
.....

# Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire

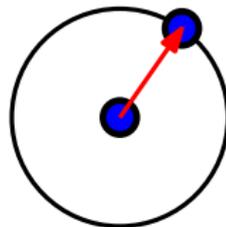


# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire

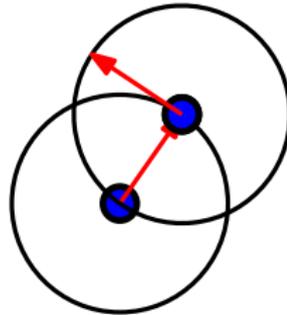
$r$



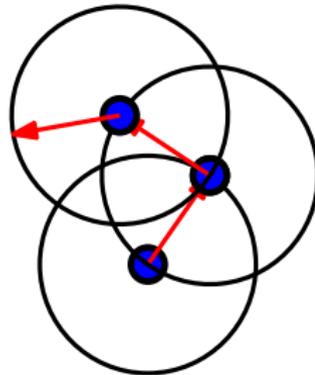
# Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire



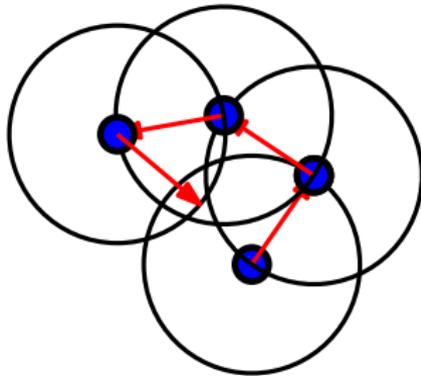
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



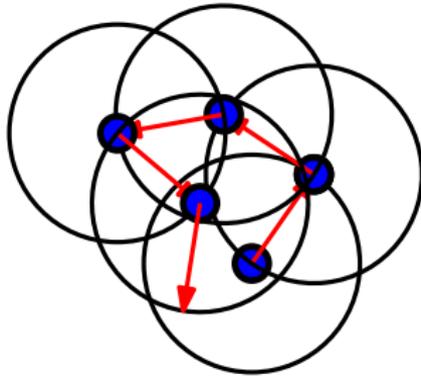
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



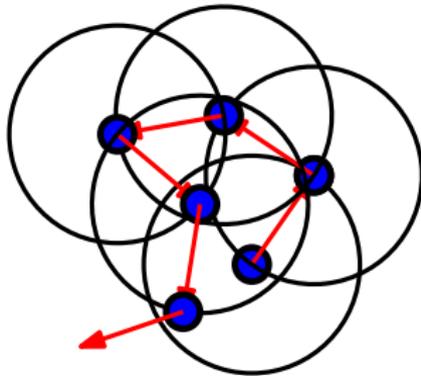
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



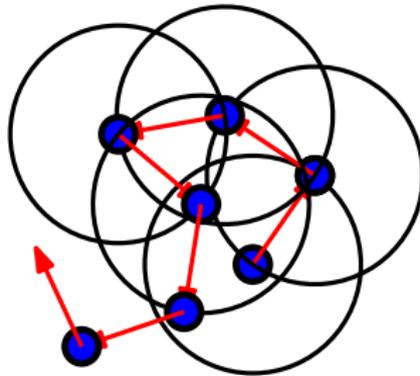
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



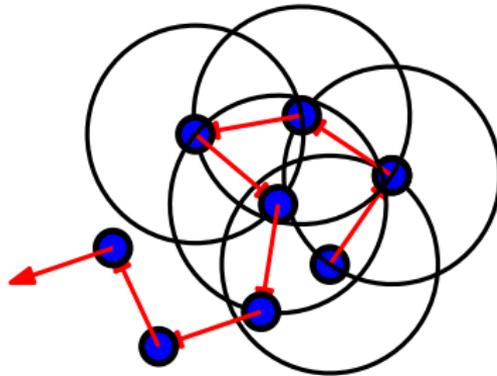
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



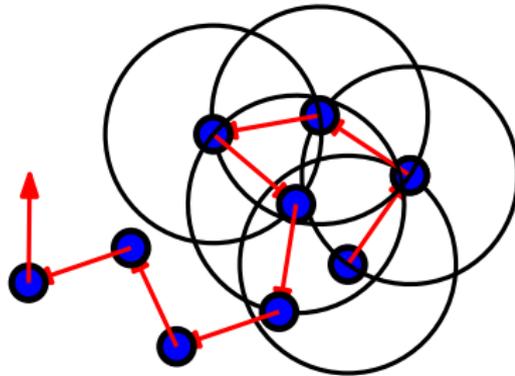
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



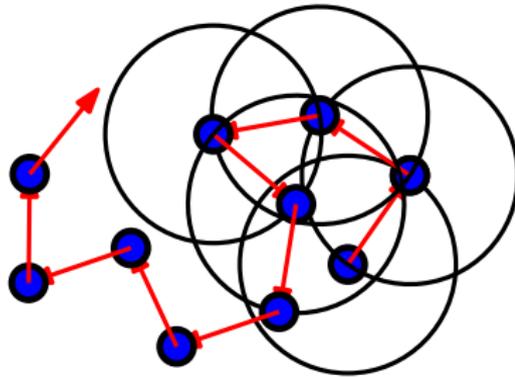
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



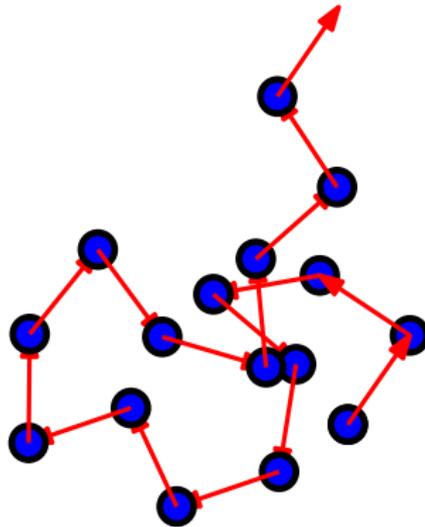
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



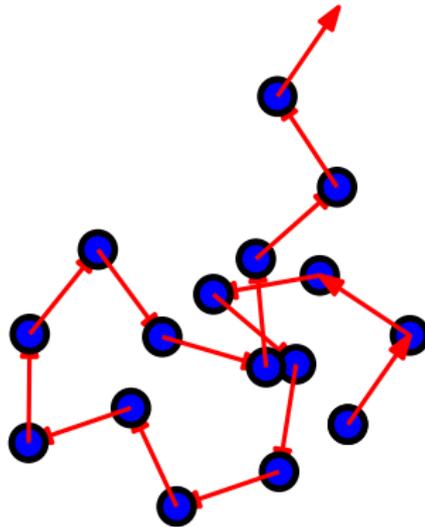
# Une modélisation plus "simple" : la marche aléatoire



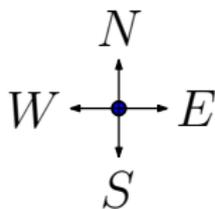
# Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire



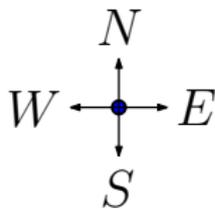
# Une modélisation plus “simple” : la marche aléatoire



On va simplifier encore le modèle



# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



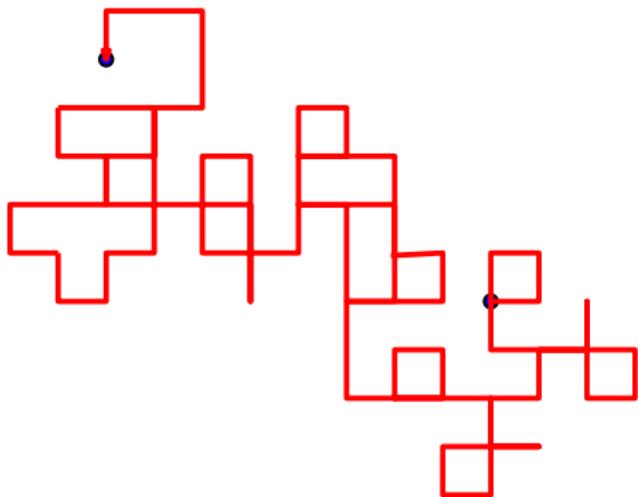
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



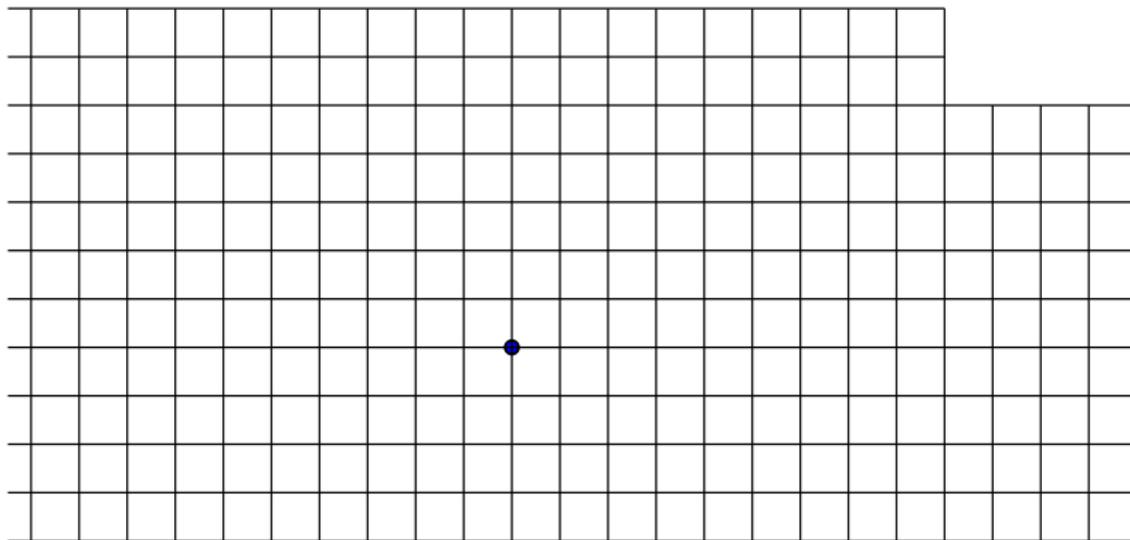
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



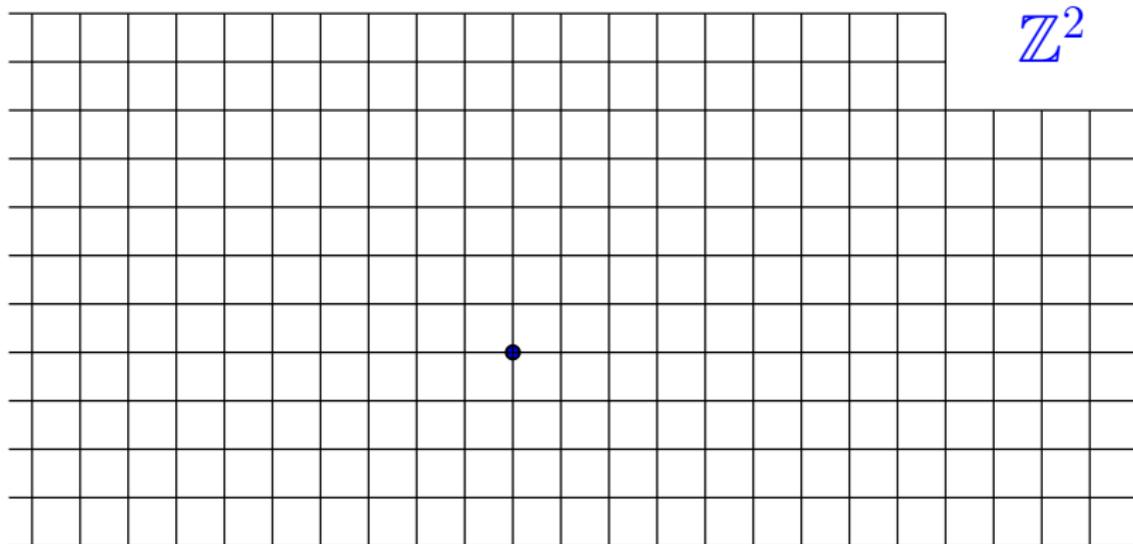
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



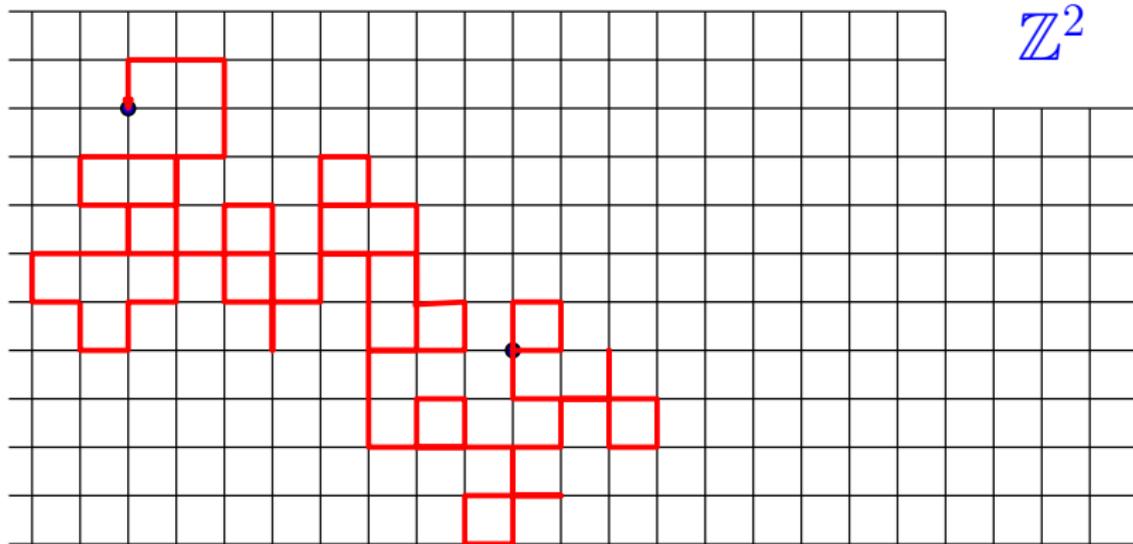
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



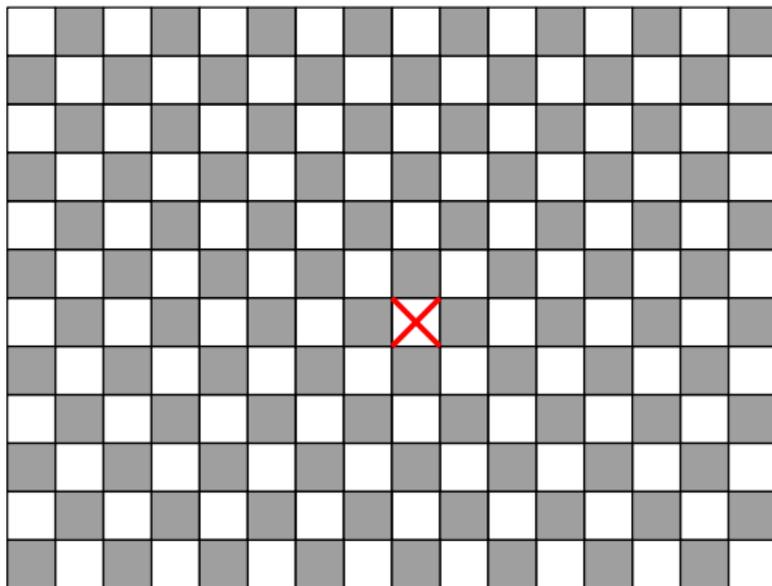
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



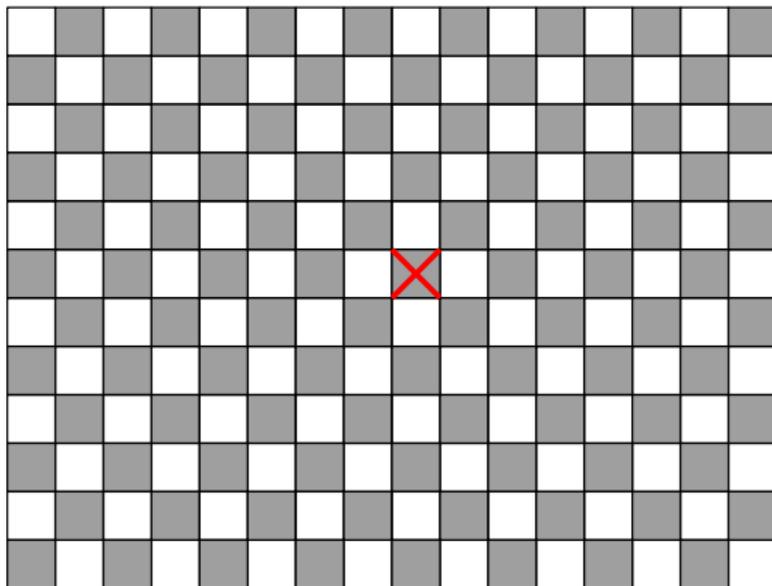
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



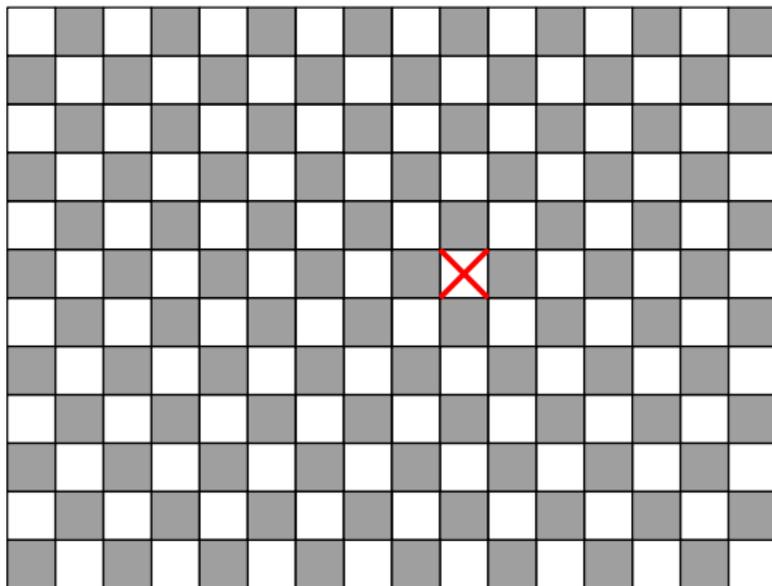
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



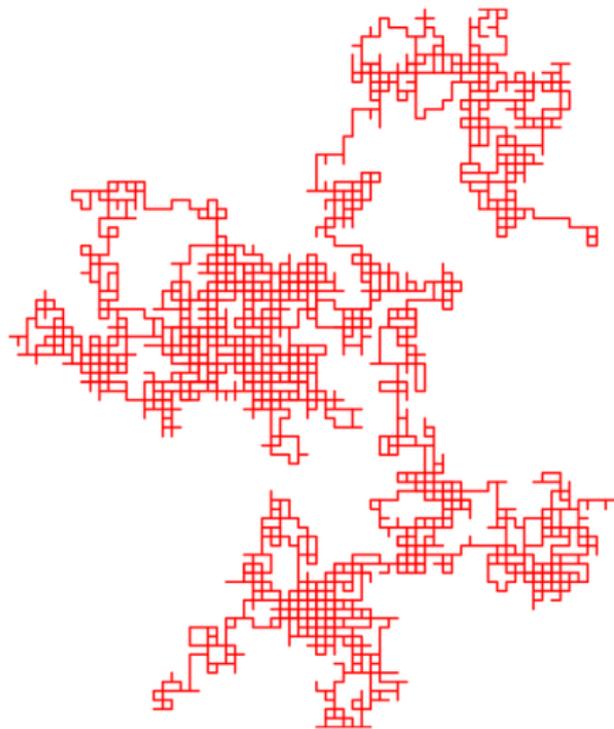
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



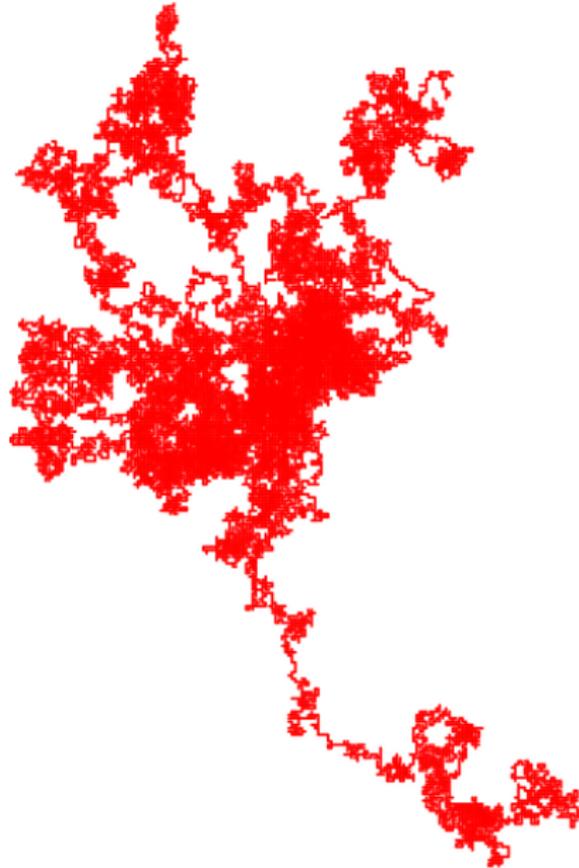
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$



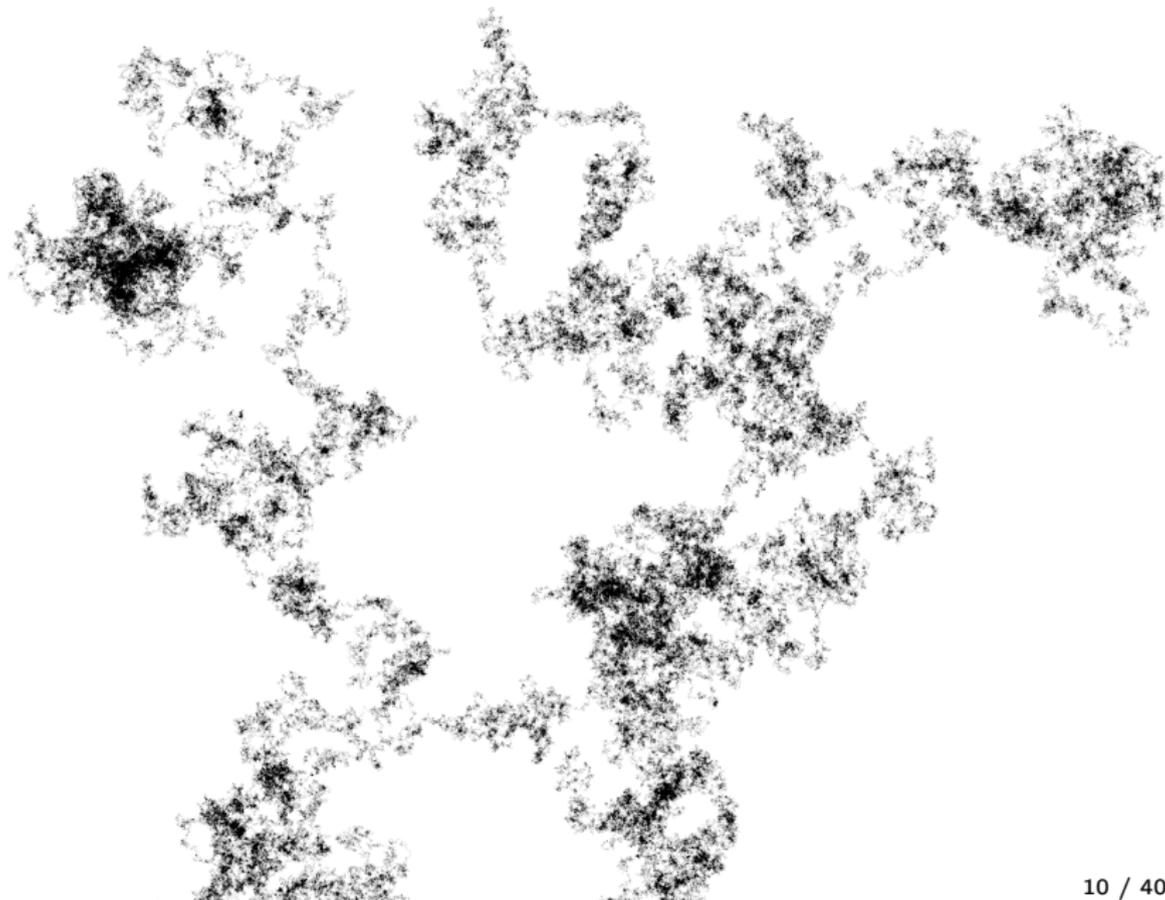
Voici à quoi ressemble une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  vue de loin !



vue d'un peu plus loin !!



2,000,000 de pas (belle image de Wikipedia)

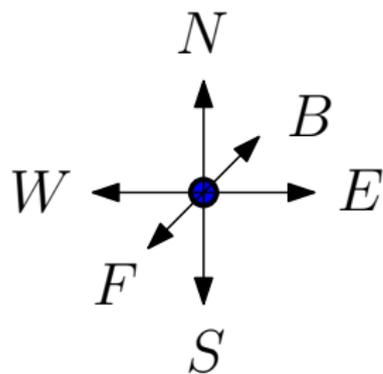


# Modèle très simple mais dont la "limite" est un objet riche

Pour créer de telles images **fractales**, la seule source d'aléa dont nous avons besoin peut être générée par :



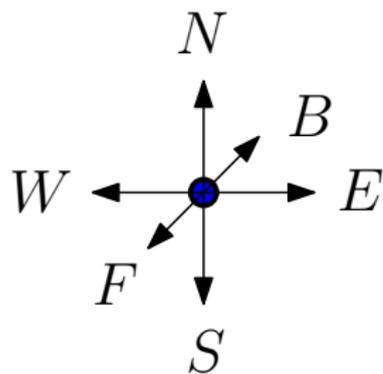
Et en dimension 3 ?  $\longrightarrow \mathbb{Z}^3$



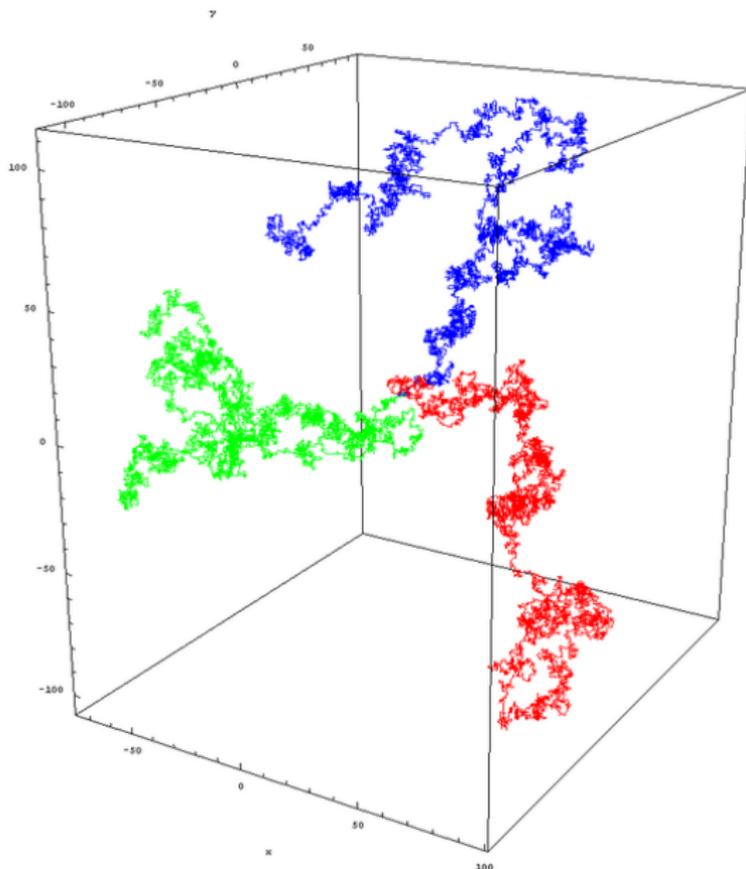
On part suivant chaque  
direction  
avec probabilité  $1/6$



Et en dimension 3 ?  $\longrightarrow \mathbb{Z}^3$



On part suivant chaque direction avec probabilité  $1/6$



A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

## A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

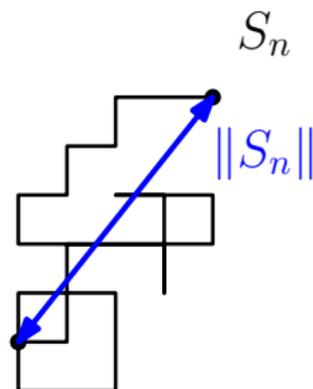
Vu que notre trajectoire est **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse **EN MOYENNE** une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

# A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Vu que notre trajectoire est **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse **EN MOYENNE** une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si  $S_n$  est la position de notre marche aléatoire au temps  $n$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , on aimerait comprendre la fonction

$$n \mapsto \mathbb{E}[\|S_n\|]$$

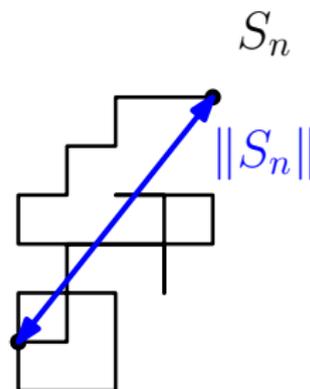


# A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Vu que notre trajectoire est **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse **EN MOYENNE** une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si  $S_n$  est la position de notre marche aléatoire au temps  $n$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , on aimerait comprendre la fonction

$$n \mapsto \mathbb{E}[\|S_n\|]$$



Pour comprendre cette “vitesse moyenne”, nous allons

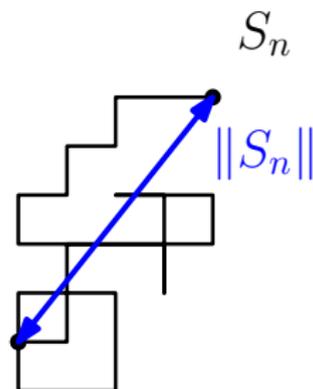
- 1 Considérer le cas plus simple de la dimension 1
- 2 Expliquer ce que l'on entend par  $\mathbb{E}[X]$ , la **moyenne** (appelée aussi **l'espérance**) d'une variable aléatoire  $X$

# A quelle vitesse une marche aléatoire “diffuse”-t-elle ?

Vu que notre trajectoire est **aléatoire**, on devrait plutôt se demander à quelle vitesse **EN MOYENNE** une marche aléatoire s'éloigne-t-elle de son point de départ ?

Autrement dit, si  $S_n$  est la position de notre marche aléatoire au temps  $n$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , on aimerait comprendre la fonction

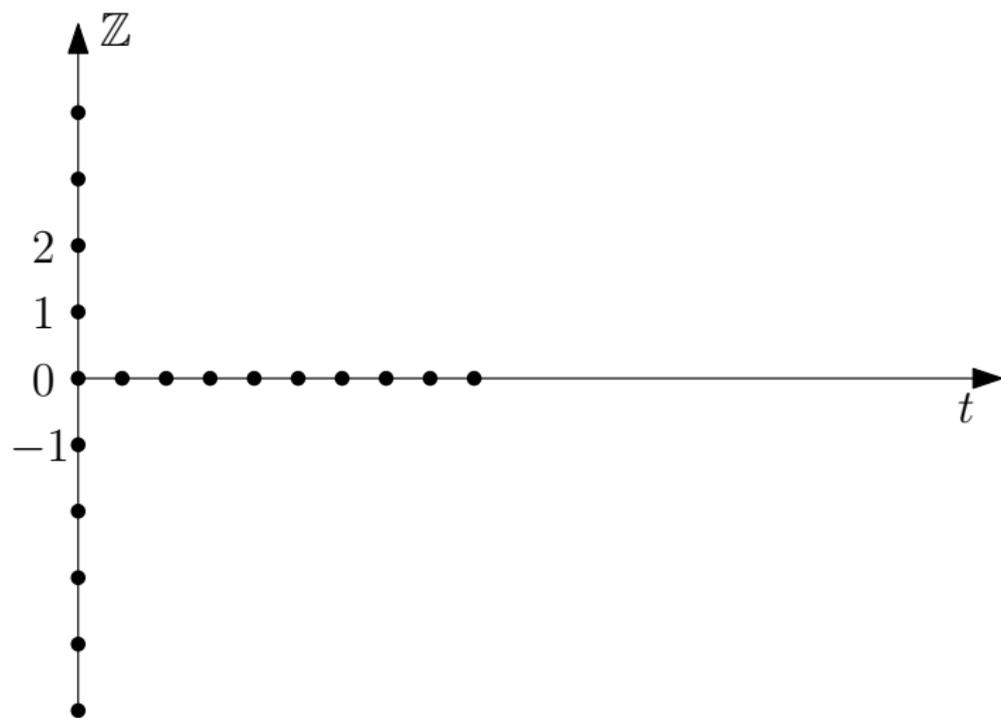
$$n \mapsto \mathbb{E}[\|S_n\|]$$



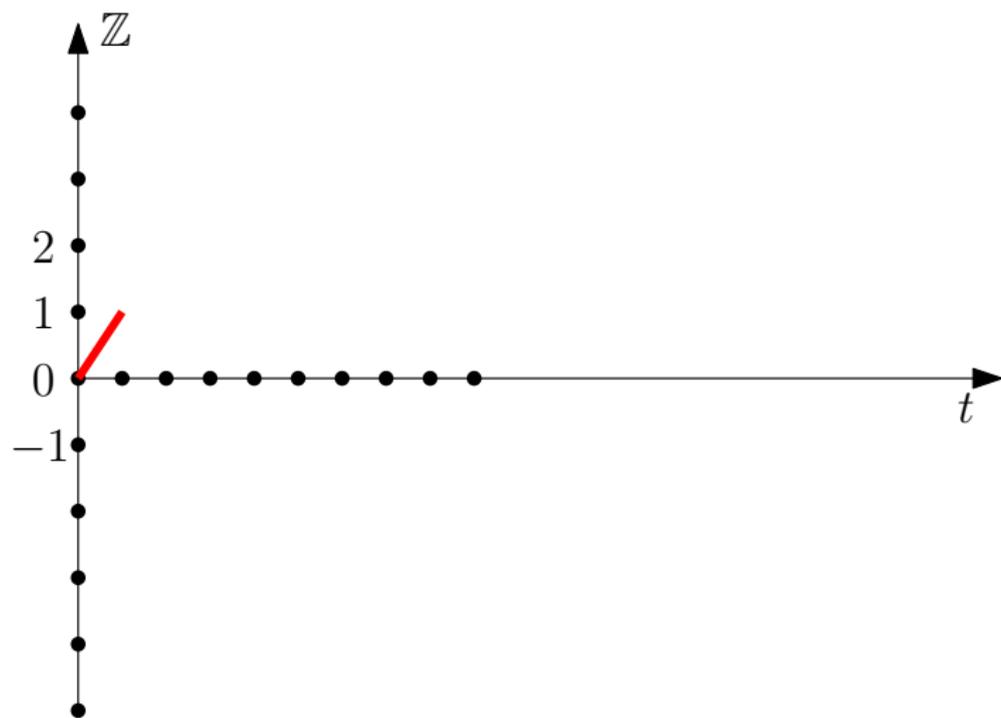
Par ailleurs, on s'attend au comportement suivant

$$1 \ll \mathbb{E}[\|S_n\|] \ll n$$

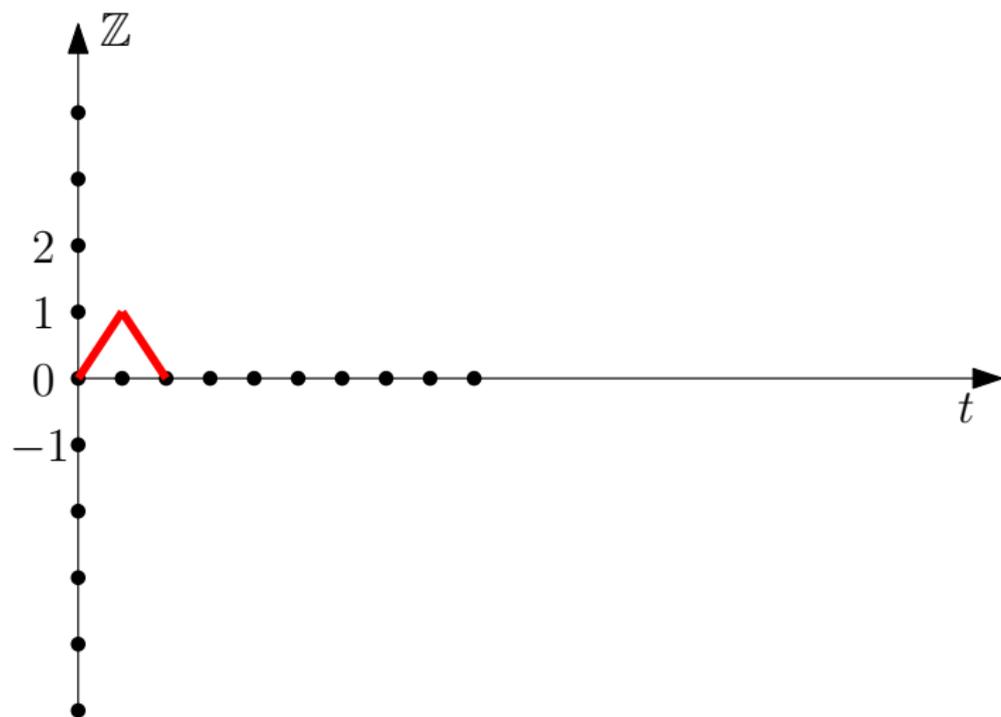
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



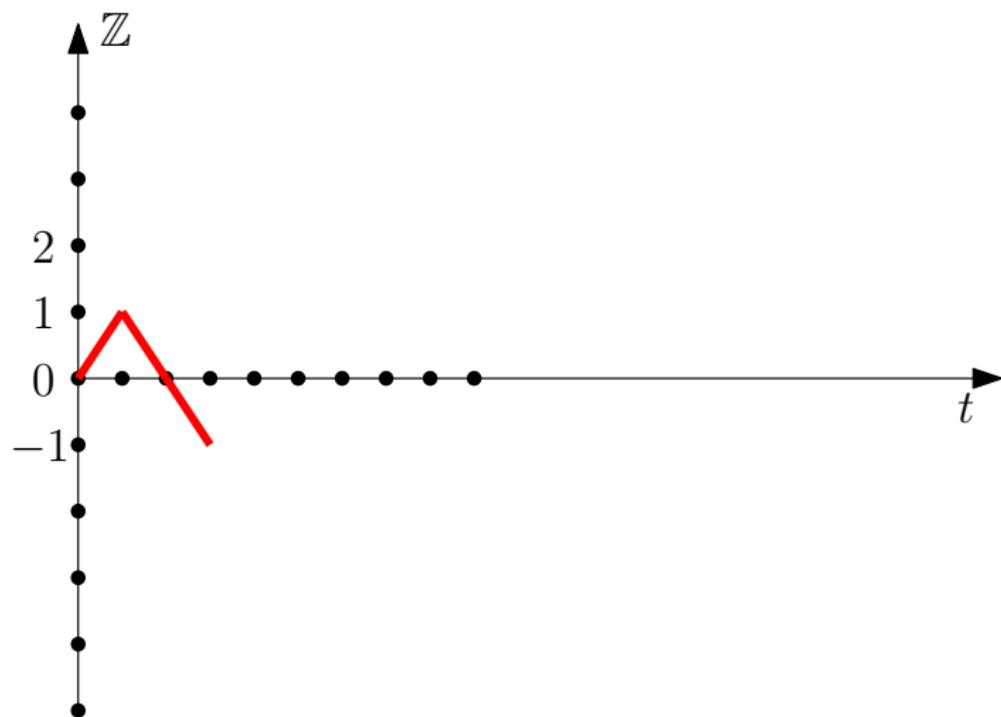
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



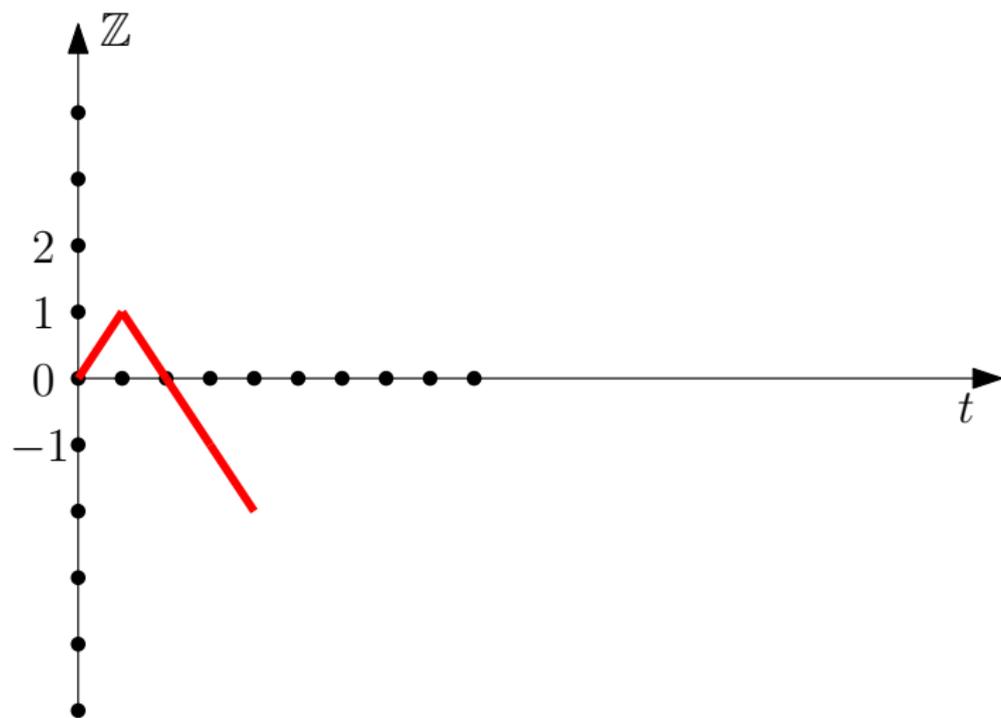
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



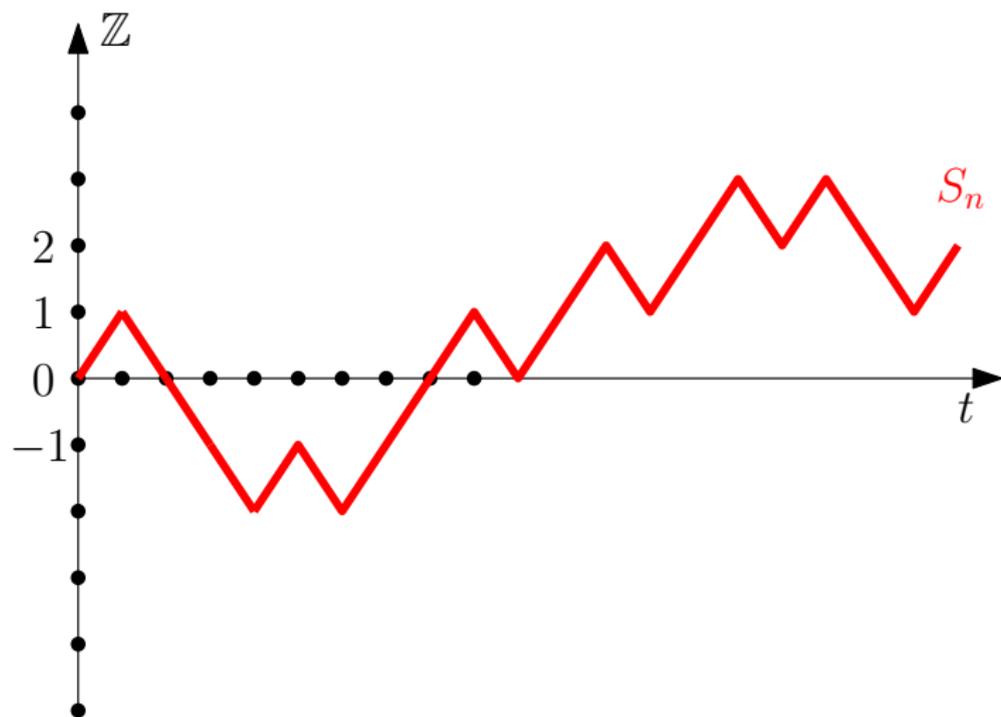
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



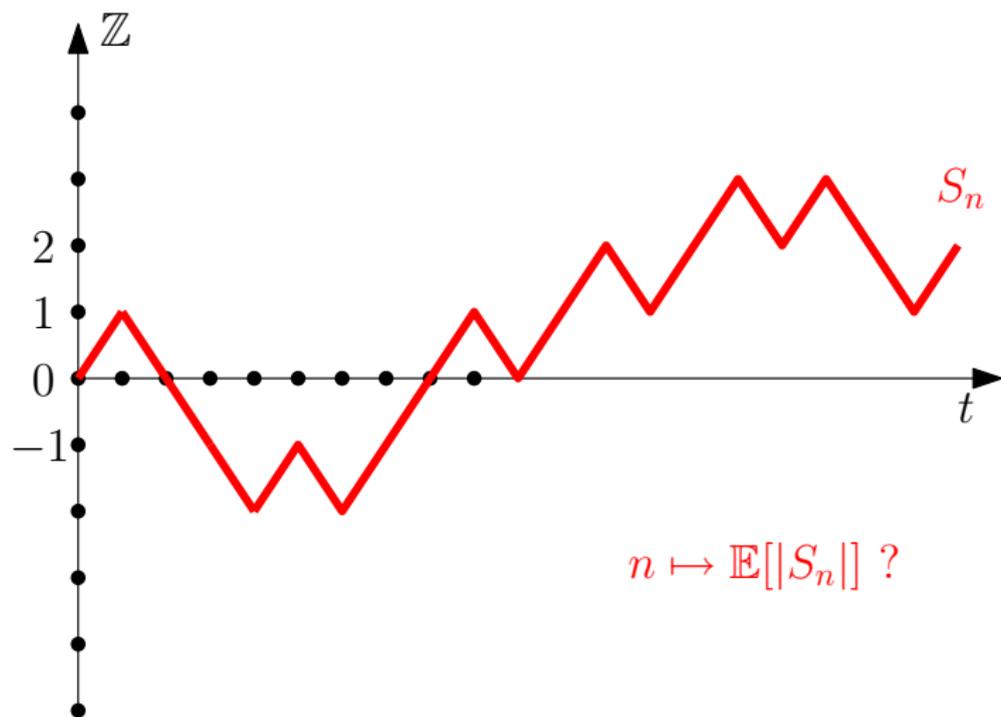
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



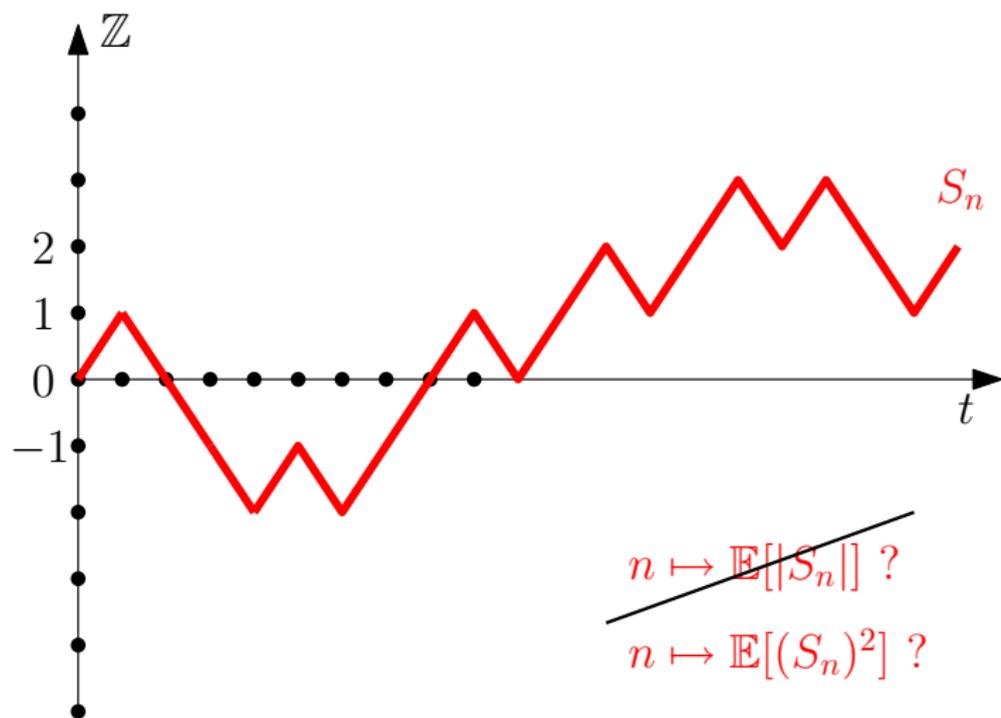
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



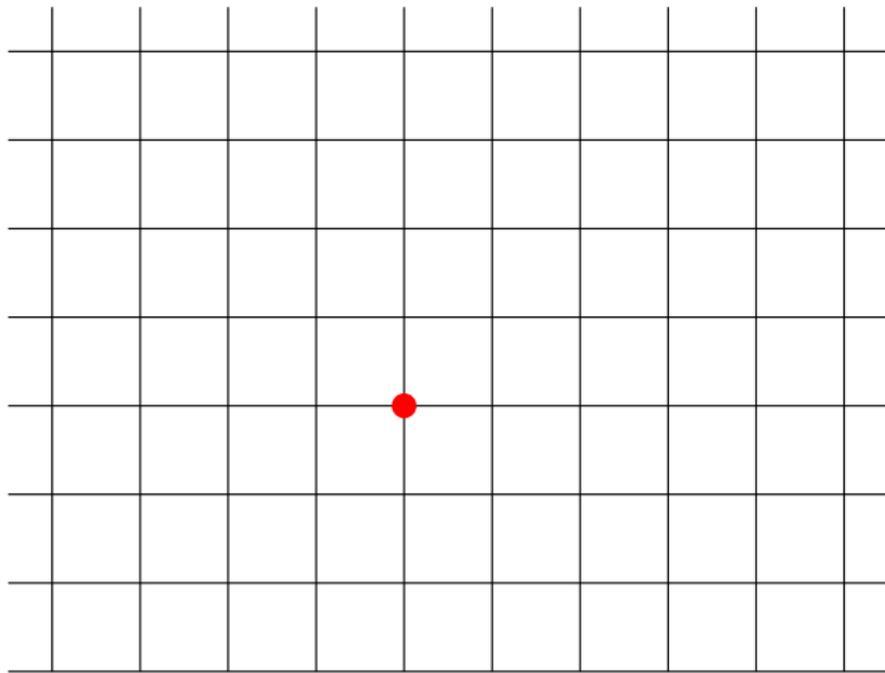
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



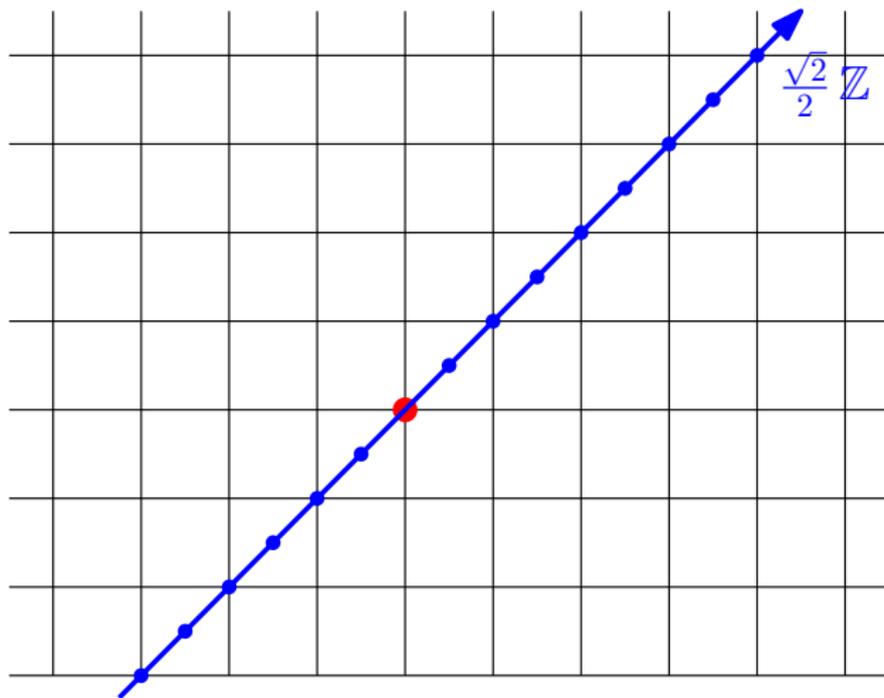
# Marche aléatoire en dimension 1: sur $\mathbb{Z}$



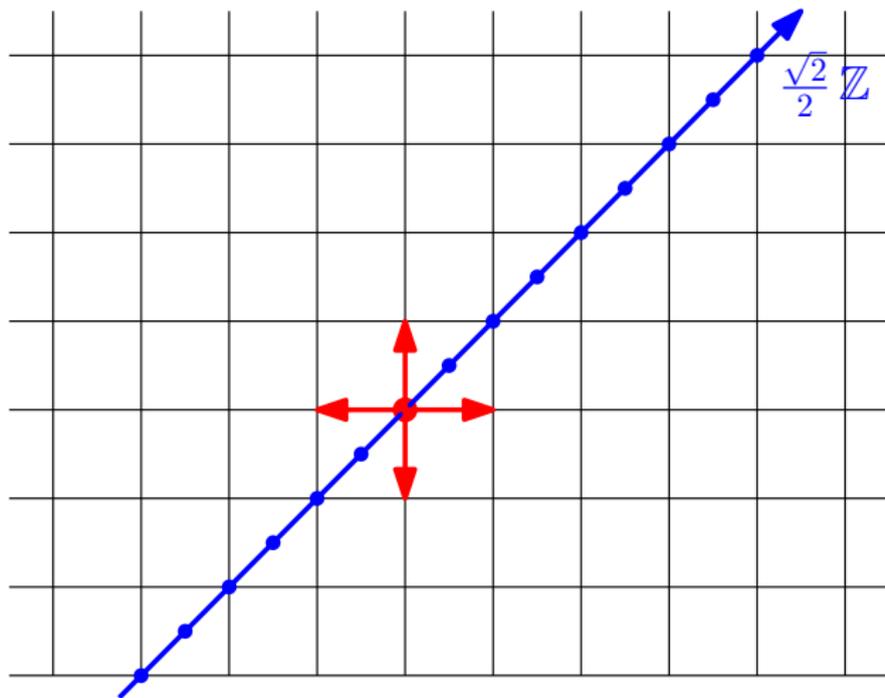
Lien avec la dimension deux :  $\mathbb{Z}^2$



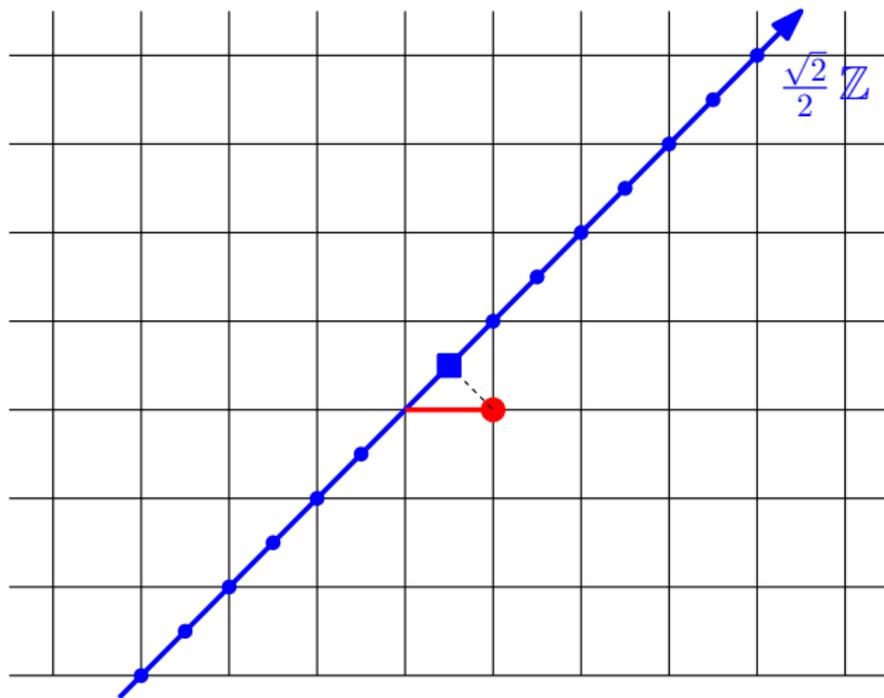
# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$



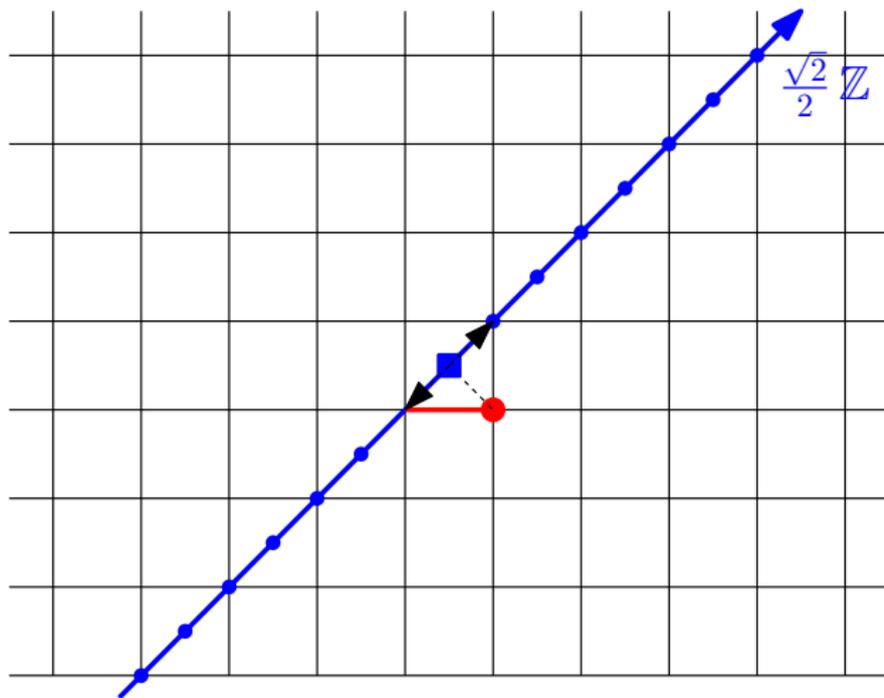
# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$



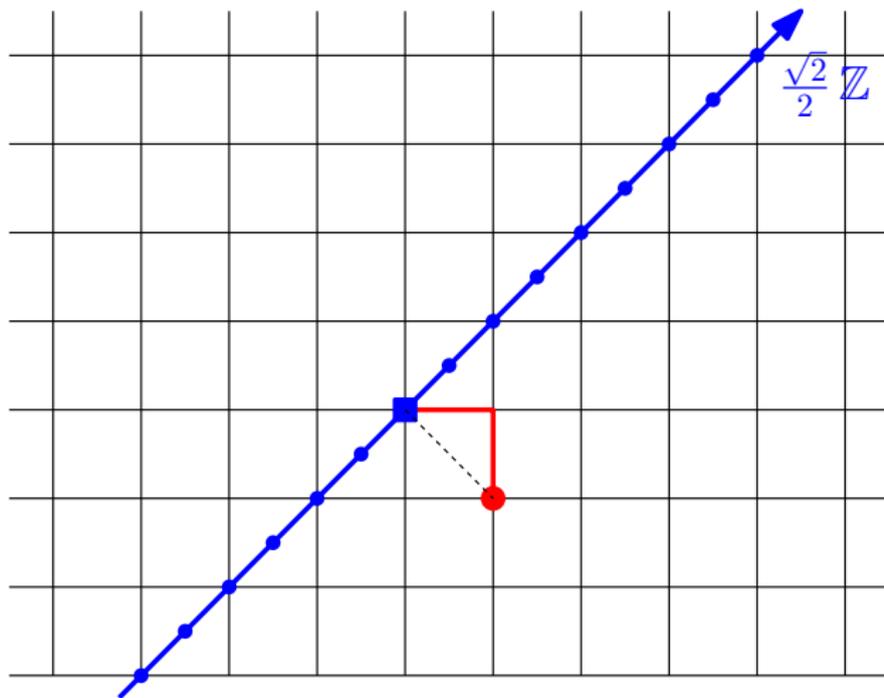
# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$



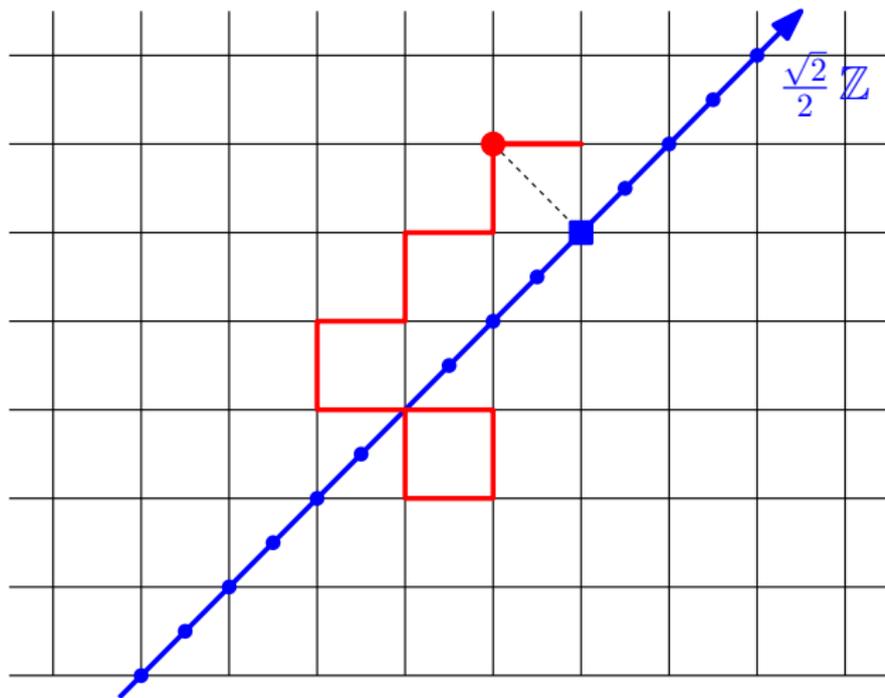
# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$



# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$



# Lien avec la dimension deux : $\mathbb{Z}^2$

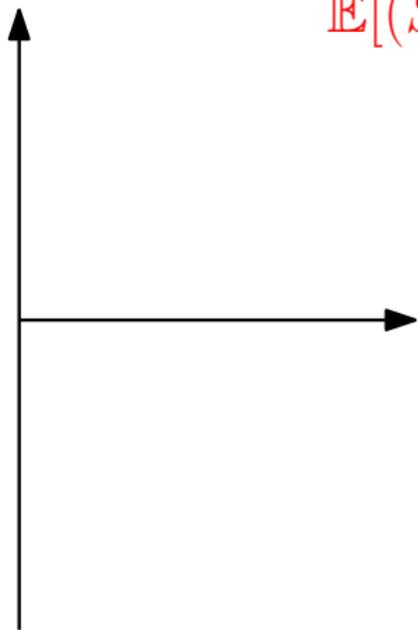


$$\mathbb{E} \left[ \text{$$

$$\mathbb{E} \left[ \text{🎲} \right] = 3,5$$
$$= \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(3) + \dots + \frac{1}{6}(6)$$

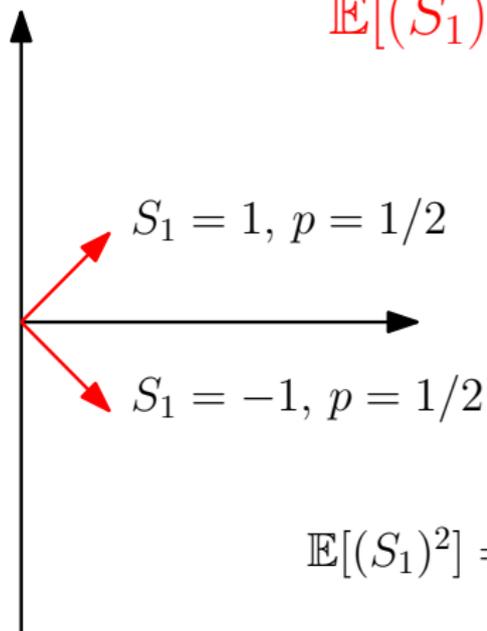
A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?

$$\mathbb{E}[(S_1)^2] ?$$



A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?

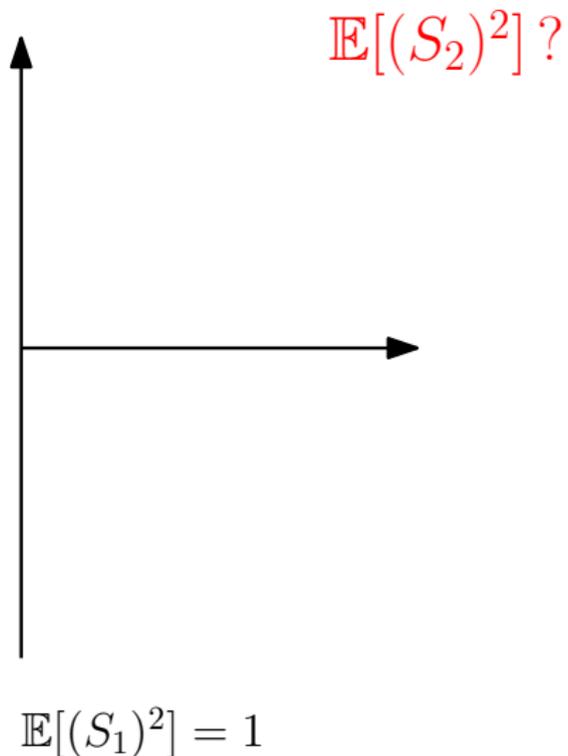
$$\mathbb{E}[(S_1)^2] ?$$



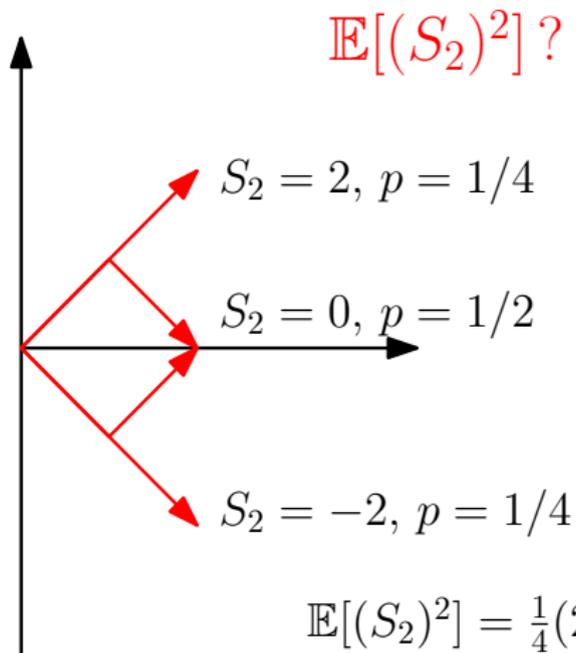
$$\mathbb{E}[(S_1)^2] = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1$$

$$\mathbb{E}[(S_1)^2] = 1$$

A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?



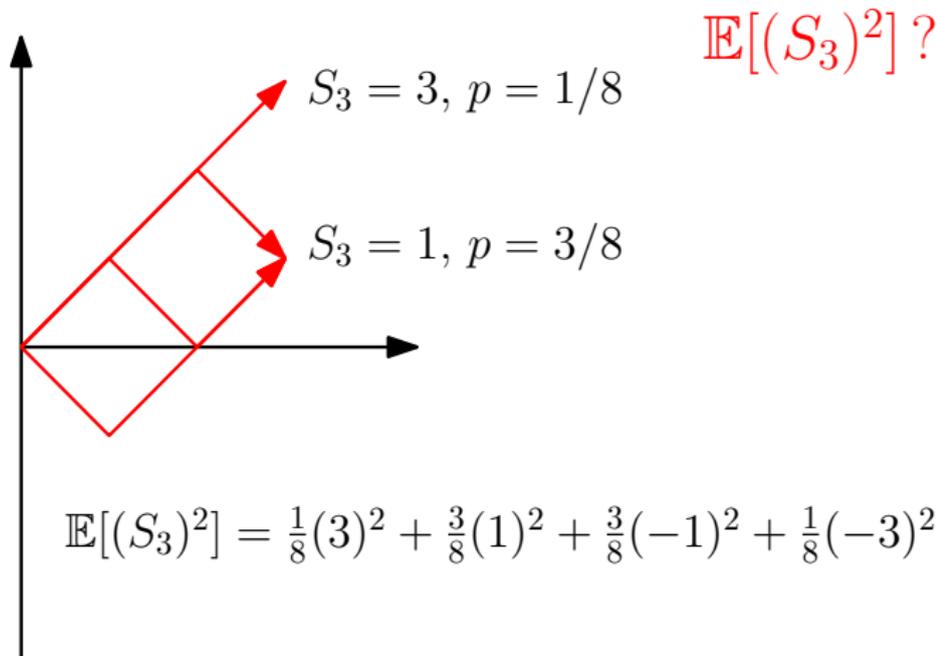
A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?



$$\mathbb{E}[(S_2)^2] = \frac{1}{4}(2)^2 + \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{4}(-2)^2 = 2$$

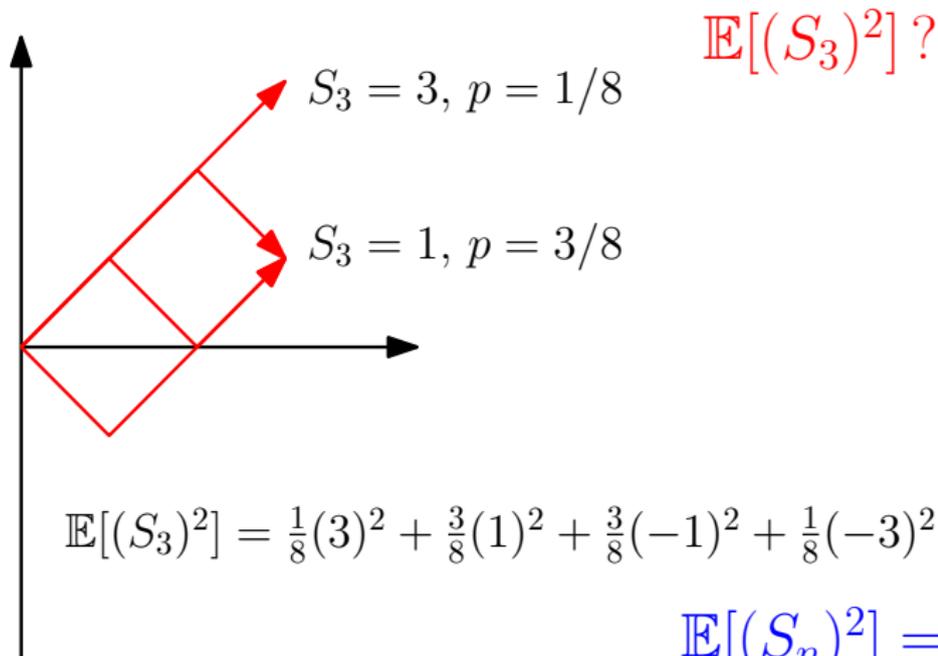
$$\mathbb{E}[(S_1)^2] = 1 \quad \mathbb{E}[(S_2)^2] = 2$$

A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?



$$\mathbb{E}[(S_1)^2] = 1 \quad \mathbb{E}[(S_2)^2] = 2 \quad \mathbb{E}[(S_3)^2] = 3$$

A quelle vitesse la marche aléatoire “diffuse”-t-elle sur  $\mathbb{Z}$  ?



$$\mathbb{E}[(S_3)^2] = \frac{1}{8}(3)^2 + \frac{3}{8}(1)^2 + \frac{3}{8}(-1)^2 + \frac{1}{8}(-3)^2 = 3!$$

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n ??$$

$$\mathbb{E}[(S_1)^2] = 1 \quad \mathbb{E}[(S_2)^2] = 2 \quad \mathbb{E}[(S_3)^2] = 3$$

## Vitesse la marche aléatoire (suite)

### Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

## Vitesse la marche aléatoire (suite)

### Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

# Vitesse la marche aléatoire (suite)

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} X_i X_j\right]\end{aligned}$$

# Vitesse la marche aléatoire (suite)

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} X_i X_j\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j]\end{aligned}$$

# Vitesse la marche aléatoire (suite)

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} X_i X_j\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j]\end{aligned}$$

# Vitesse la marche aléatoire (suite)

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} X_i X_j\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[(\pm 1)^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] \text{ (indépendance)}\end{aligned}$$

# Vitesse la marche aléatoire (suite)

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  alors

$$\mathbb{E}[(S_n)^2] = n$$

**preuve :**

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où les  $X_i \in \{-1, 1\}$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} X_i X_j\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[(\pm 1)^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] \text{ (indépendance)} \\ &= n + 0 = n\end{aligned}$$

Le résultat précédent suggère que

$$\mathbb{E}[|S_n|] \approx \sqrt{n}$$

Le résultat précédent suggère que

$$\mathbb{E}[|S_n|] \approx \sqrt{n}$$

## Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  alors

$$\mathbb{E}[\|S_n\|^2] = n$$

(preuve très similaire).

Le résultat précédent suggère que

$$\mathbb{E}[|S_n|] \approx \sqrt{n}$$

### Théorème

Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  alors

$$\mathbb{E}[\|S_n\|^2] = n$$

(preuve très similaire).

### Remarque

Si on regarde une marche aléatoire  $S_n$  sur n'importe quel réseau "régulier" du plan ou de l'espace, on aura aussi

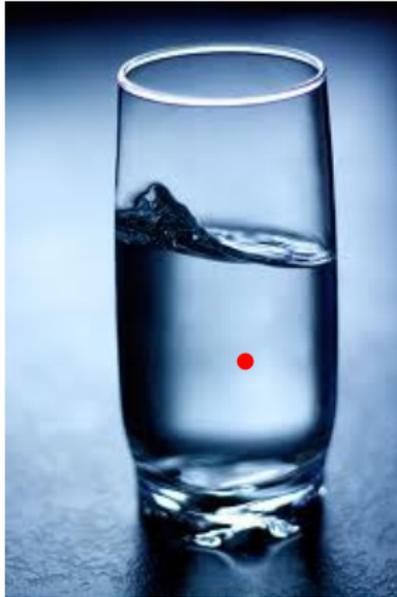
$$\mathbb{E}[\|S_n\|^2] = D n,$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion.

Comment “compter” les atomes ?  
Quelles données sont à notre disposition ?



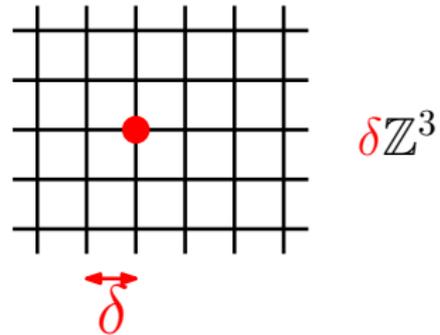
Comment “compter” les atomes ?  
Quelles données sont à notre disposition ?



Comment “compter” les atomes ?  
Quelles données sont à notre disposition ?



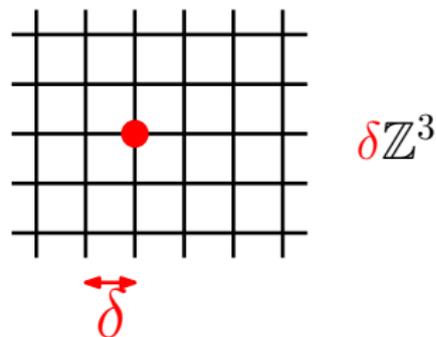
Comment "compter" les atomes ?  
Quelles données sont à notre disposition ?



$$\delta Z^3$$

Comment "compter" les atomes ?

Quelles données sont à notre disposition ?

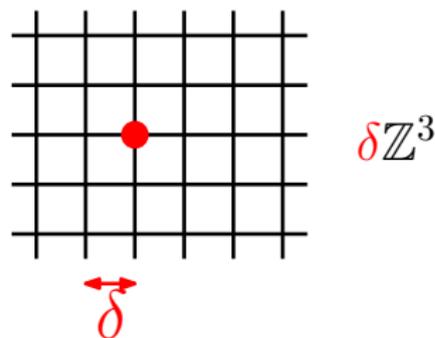
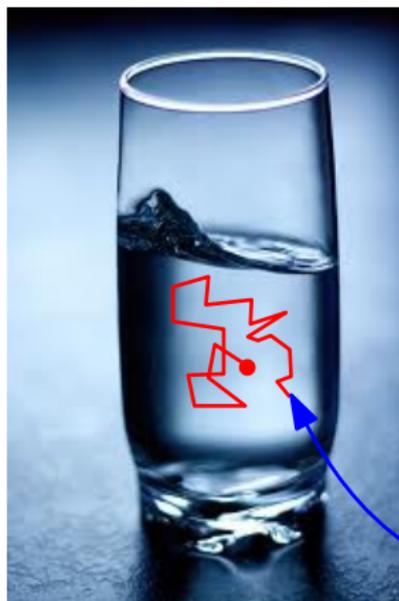


**ce qu'on ne connaît pas :**

- Le pas du reseau  $\delta$  ??
- $\Delta t$  ??

Comment "compter" les atomes ?

Quelles données sont à notre disposition ?



**ce qu'on ne connaît pas :**

- Le pas du reseau  $\delta$  ??
- $\Delta t$  ??

trajectoire  $t \mapsto B(t)$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**
- 4 La **viscosité** du fluide :  $\eta$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**
- 4 La **viscosité** du fluide :  $\eta$
- 5 Le **coefficient de diffusion**  $D$  :

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La masse de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La température du fluide :  $T$   
→ ENERGIE
- 4 La viscosité du fluide :  $\eta$
- 5 Le coefficient de diffusion  $D$  :

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$$

## Relation d'Einstein

$$D = \frac{RT}{\pi \mathcal{N}_a \eta r}$$

►  $R = \text{Cste des gaz parfaits}$

$$R = 8.31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\begin{matrix} PV = nRT \\ E_c = \frac{3}{2}nRT \end{matrix}, n = \text{Nb moles}$$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La ~~masse de la particule~~ :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**
- 4 La **viscosité** du fluide :  $\eta$
- 5 Le **coefficient de diffusion**  $D$  :

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$$

## Relation d'Einstein

$$D = \frac{RT}{\pi \mathcal{N}_a \eta r}$$

- ▶  $R =$  Cste des gaz parfaits  
 $R = 8.31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$$\begin{cases} PV = nRT \\ E_c = \frac{3}{2}nRT \end{cases}, n = \text{Nb moles}$$

- ▶  $\mathcal{N}_a = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$   
= Nb d'atomes dans  
12g de Carbone  $\text{C}^{12}$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La ~~masse~~ de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**
- 4 La **viscosité** du fluide :  $\eta$
- 5 Le **coefficient de diffusion**  $D$  :

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$$

## Relation d'Einstein

$$D = \frac{RT}{\pi \mathcal{N}_a \eta r}$$

- ▶  $R =$  Cste des gaz parfaits  
 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$\begin{cases} PV = nRT \\ E_c = \frac{3}{2} nRT \end{cases}, n = \text{Nb moles}$$

- ▶  $\mathcal{N}_a = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$   
= Nb d'atomes dans  
12g de Carbone  $\text{C}^{12}$

## Données/observations de l'expérience :

- 1 La ~~masse~~ de la particule :  $m$
- 2 Le rayon de la particule :  $r$
- 3 La **température** du fluide :  $T$   
→ **ENERGIE**
- 4 La **viscosité** du fluide :  $\eta$
- 5 Le **coefficient de diffusion**  $D$  :

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$$

## Relation d'Einstein

$$D = \frac{RT}{\pi \mathcal{N}_a \eta r}$$

- ▶  $R =$  Cste des gaz parfaits  
 $R = 8.31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$$\begin{matrix} PV = nRT \\ E_c = \frac{3}{2}nRT \end{matrix}, n = \text{Nb moles}$$

- ▶  $\mathcal{N}_a = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$   
= Nb d'atomes dans  
12g de Carbone  $\text{C}^{12}$

Il nous reste à comprendre la relation d'Einstein !

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a$ :-)

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a$ :-)

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

Étudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$  ( $\|B(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ ).

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] =$$

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] = \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right]$$

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$

## L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

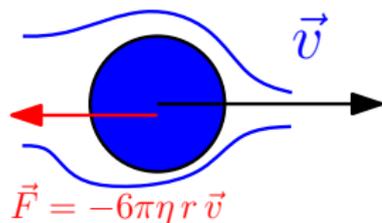
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$

$$m\ddot{x} = F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}}$$

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$

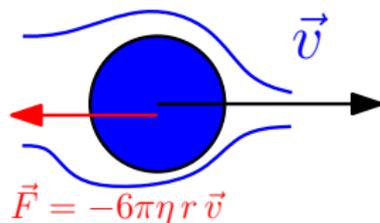


$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= \underbrace{F_{\text{frottment}}}_{\text{drag force}} + F_{\text{moleculaire}}\end{aligned}$$

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$

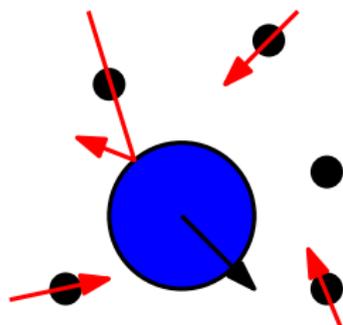


$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= \underbrace{F_{\text{frottment}}}_{-6\pi\eta r \dot{x}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= -6\pi\eta r \dot{x} + \underbrace{F_{\text{moleculaire}}}\end{aligned}$$

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$

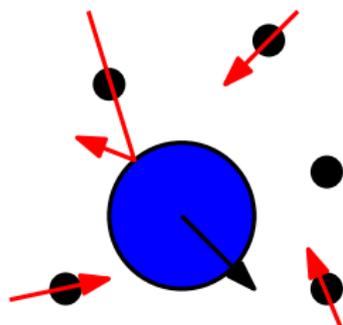


$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= \underbrace{F_{\text{frottment}}}_{-6\pi\eta r \dot{x}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= -6\pi\eta r \dot{x} + \underbrace{F_{\text{moleculaire}}}\end{aligned}$$

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$



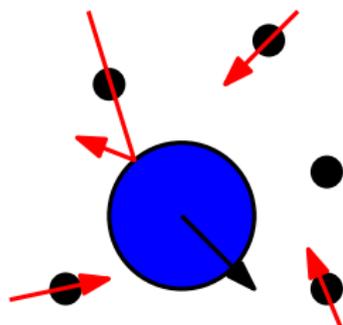
$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= \underbrace{F_{\text{frottment}}}_{-6\pi\eta r \dot{x}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= -6\pi\eta r \dot{x} + \underbrace{F_{\text{moleculaire}}}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[F_{\text{moleculaire}}] = \mathbb{E}[x F_{\text{moleculaire}}] = 0$$

# L'argument de Paul Langevin ( $F = m a :-$ )

On veut comprendre  $D$  tel que  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .  
Etudions la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[x^2(t)]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{d^2}{dt^2} x^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} 2x(t)\dot{x}(t)\right] \\ &= \frac{2}{m} \mathbb{E}[m\dot{x}^2 + x m\ddot{x}]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_{\text{frottment}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= \underbrace{F_{\text{frottment}}}_{-6\pi\eta r \dot{x}} + F_{\text{moleculaire}} \\ &= -6\pi\eta r \dot{x} + \underbrace{F_{\text{moleculaire}}}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[F_{\text{moleculaire}}] = \mathbb{E}[x F_{\text{moleculaire}}] = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2] = \frac{2}{m} \left( \underbrace{\mathbb{E}[m\dot{x}^2]} - \mathbb{E}[x 6\pi\eta r \dot{x}] \right)$$

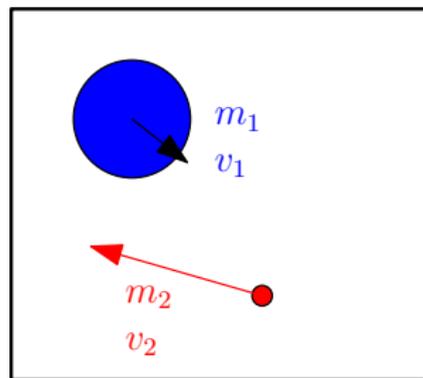
## Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour 2 particules)



“A l'équilibre”, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} m_2 v_2^2\right]$$

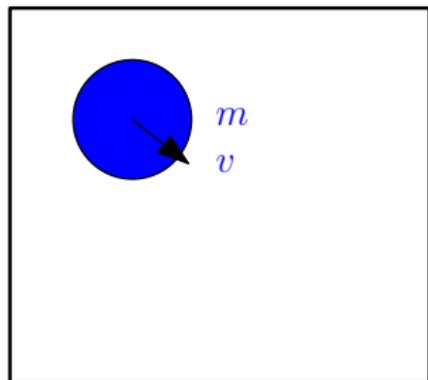
Ce qui signifie

$$\int_0^T m_1 v_1(t)^2 dt \sim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T m_2 v_2(t)^2 dt$$

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

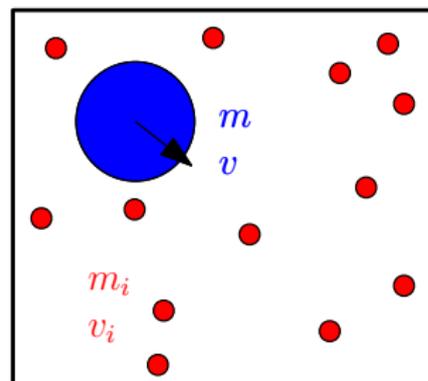
Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

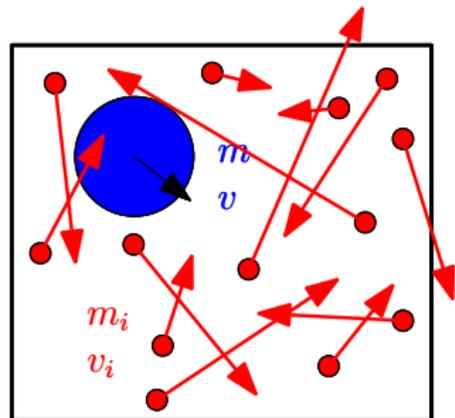
Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



“A l'équilibre”, on a pour tout  $i, j$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_j v_j^2\right]$$

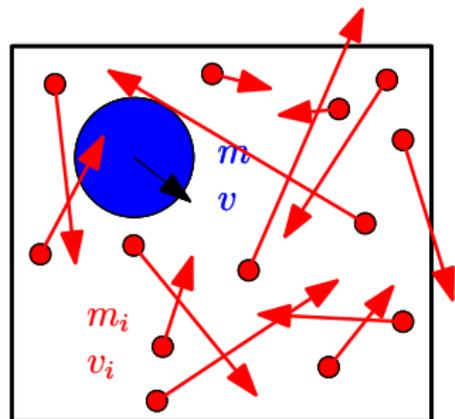
En particulier on a :

$$U = \sum_i E_i = N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right]$$

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



“A l'équilibre”, on a pour tout  $i, j$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_j v_j^2\right]$$

En particulier on a :

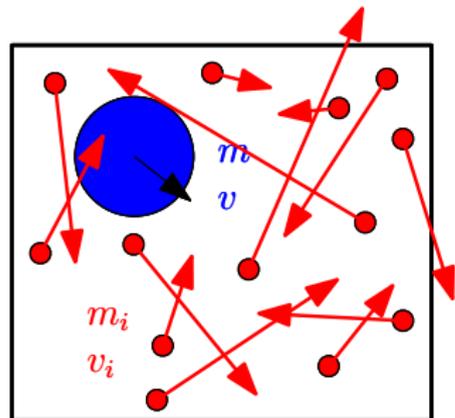
$$U = \sum_i E_i = N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right]$$

Par ailleurs, l'énergie interne est proportionnelle à la température  $T$  et vaut  $U = 3/2 n RT$  (approximation des gaz parfaits).

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



“A l'équilibre”, on a pour tout  $i, j$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_j v_j^2\right]$$

En particulier on a :

$$U = \sum_i E_i = N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right]$$

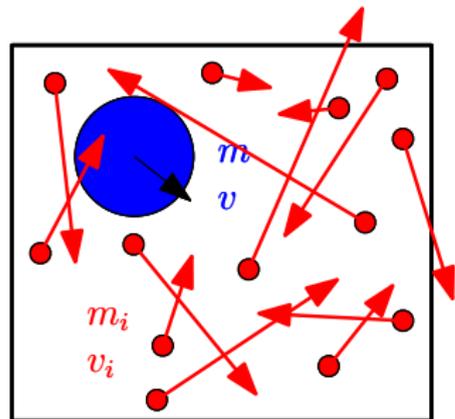
Par ailleurs, l'énergie interne est proportionnelle à la température  $T$  et vaut  $U = 3/2 nRT$  (approximation des gaz parfaits).

$$N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right] = \frac{3}{2} nRT$$

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



“A l'équilibre”, on a pour tout  $i, j$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_j v_j^2\right]$$

En particulier on a :

$$U = \sum_i E_i = N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right]$$

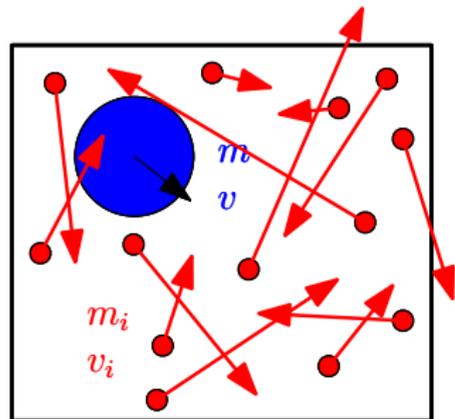
Par ailleurs, l'énergie interne est proportionnelle à la température  $T$  et vaut  $U = 3/2 n RT$  (approximation des gaz parfaits).

$$N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right] = \frac{3}{2} n RT = \frac{3}{2} \frac{N}{\mathcal{N}_a} RT$$

# Equipartition de l'énergie

Il nous reste à comprendre le terme  $\mathbb{E}[m \dot{x}^2]$  ( $\leftrightarrow$  **énergie cinétique moyenne** de la particule)

Principe d'équipartition de l'énergie (pour  $N$  particules)



“A l'équilibre”, on a pour tout  $i, j$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m_j v_j^2\right]$$

En particulier on a :

$$U = \sum_i E_i = N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right]$$

Par ailleurs, l'énergie interne est proportionnelle à la température  $T$  et vaut  $U = 3/2 n RT$  (approximation des gaz parfaits).

$$N \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}m v^2\right] = \frac{3}{2} n RT = \frac{3}{2} \frac{N}{\mathcal{N}_a} RT \Rightarrow \mathbb{E}[m v^2] = \frac{3 RT}{\mathcal{N}_a}$$

## Fin du raisonnement

On obtient ainsi

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] = \frac{2}{m} \left( \frac{\beta RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \mathbb{E}[x\dot{x}] \right)$$

## Fin du raisonnement

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \frac{2}{m} \left( \frac{\beta RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \mathbb{E}[x\dot{x}] \right) \\ &= \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)] \right)\end{aligned}$$

## Fin du raisonnement

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \frac{2}{m} \left( \frac{\beta RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \mathbb{E}[x\dot{x}] \right) \\ &= \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)] \right)\end{aligned}$$

On introduit la fonction  $y(t) := \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)]$  qui résout l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - \frac{6\pi\eta r}{2} y \right)$$

## Fin du raisonnement

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \frac{2}{m} \left( \frac{\beta RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \mathbb{E}[x\dot{x}] \right) \\ &= \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)] \right)\end{aligned}$$

On introduit la fonction  $y(t) := \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)]$  qui résout l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - \frac{6\pi\eta r}{2} y \right) \Rightarrow y(t) = \frac{RT}{3\pi\eta r \mathcal{N}_a} + A e^{-\frac{6\pi\eta r}{m} t}$$

Ainsi, on retrouve

$$\mathbb{E}[x^2(t)] = \int_0^t y(u) du \approx \frac{RT}{3\pi\eta r \mathcal{N}_a} t$$

## Fin du raisonnement

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{E}[x^2(t)] &= \frac{2}{m} \left( \frac{\beta RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \mathbb{E}[x\dot{x}] \right) \\ &= \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - 6\pi\eta r \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)] \right)\end{aligned}$$

On introduit la fonction  $y(t) := \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)]$  qui résout l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{m} \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_a} - \frac{6\pi\eta r}{2} y \right) \Rightarrow y(t) = \frac{RT}{3\pi\eta r \mathcal{N}_a} + A e^{-\frac{6\pi\eta r}{m} t}$$

Ainsi, on retrouve

$$\mathbb{E}[x^2(t)] = \int_0^t y(u) du \approx \frac{RT}{3\pi\eta r \mathcal{N}_a} t$$

$$\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t = \mathbb{E}[x^2(t)] + \mathbb{E}[y^2(t)] + \mathbb{E}[z^2(t)] = \frac{RT}{\pi\eta r \mathcal{N}_a} t$$

Jean Perrin :

- 1 Plusieurs particules de rayons  $r$

$$D = \frac{RT}{\pi \eta r \mathcal{N}_a}$$

$$D = \frac{RT}{\pi \eta r \mathcal{N}_a}$$

Jean Perrin :

- 1 Plusieurs particules de rayons  $r$
- 2 à différentes températures  $T$

$$D = \frac{RT}{\pi \eta r \mathcal{N}_a}$$

Jean Perrin :

- 1 Plusieurs particules de rayons  $r$
- 2 à différentes températures  $T$
- 3 A chaque fois, il mesure  $D$  via  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

Jean Perrin :

$$D = \frac{RT}{\pi \eta r \mathcal{N}_a}$$

- 1 Plusieurs particules de rayons  $r$
- 2 à différentes températures  $T$
- 3 A chaque fois, il mesure  $D$  via  $\mathbb{E}[\|B(t)\|^2] = D t$ .

En 1908, il obtient ainsi  $\mathcal{N}_a \approx 7.15 \times 10^{23}$  !! Pas si éloigné que ça de  $6.022 \times 10^{23}$  !  $\Rightarrow$  Prix Nobel en 1926 “pour ses travaux sur la discontinuité de la matière”

## Résumé de l'approche qu'on a adoptée

- 1 On a d'abord modélisé le mouvement erratique de la “particule de pollen” de Brown par une **marche aléatoire** dans  $\mathbb{Z}^3$ .

## Résumé de l'approche qu'on a adoptée

- 1 On a d'abord modélisé le mouvement erratique de la “particule de pollen” de Brown par une **marche aléatoire** dans  $\mathbb{Z}^3$ .
- 2 On a ensuite étudié cette marche aléatoire pour voir (rigoureusement) que

$$\mathbb{E}[\|B_t\|^2] = D t$$

pour un certain coefficient de diffusion  $D$ .

# Résumé de l'approche qu'on a adoptée

- 1 On a d'abord modélisé le mouvement erratique de la “particule de pollen” de Brown par une **marche aléatoire** dans  $\mathbb{Z}^3$ .
- 2 On a ensuite étudié cette marche aléatoire pour voir (rigoureusement) que

$$\mathbb{E}[\|B_t\|^2] = D t$$

pour un certain coefficient de diffusion  $D$ .

- 3 On a enfin trouvé une expression de cette constante de diffusion en fonction de  $T, r, \dots$  et surtout de la quantité qui nous intéresse :  $\mathcal{N}_a$ .

# Résumé de l'approche qu'on a adoptée

- 1 On a d'abord modélisé le mouvement erratique de la “particule de pollen” de Brown par une **marche aléatoire** dans  $\mathbb{Z}^3$ .
- 2 On a ensuite étudié cette marche aléatoire pour voir (rigoureusement) que

$$\mathbb{E}[\|B_t\|^2] = D t$$

pour un certain coefficient de diffusion  $D$ .

- 3 On a enfin trouvé une expression de cette constante de diffusion en fonction de  $T, r, \dots$  et surtout de la quantité qui nous intéresse :  $\mathcal{N}_a$ .

L'approche ici était “non-rigoureuse” à plusieurs endroits :

- ▶ Equipartition de l'énergie
- ▶ Le fait que  $\mathbb{E}[F_{\text{moléculaire}}] = 0$
- ▶ ...

- 1 Retour à l'origine des marches aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$

- 1 Retour à l'origine des marches aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$
- 2 Courbes "typiques" dans le plan

- 1 Retour à l'origine des marches aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$
- 2 Courbes “typiques” dans le plan
- 3 Quelques applications pratiques des marches aléatoires :
  - ▶ mélange de cartes
  - ▶ Google

# Problème du retour à l'origine pour les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ , $d = 1, 2, 3$

## Théorème

“Presque sûrement”, une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  reviendra toujours visiter l'origine.

# Problème du retour à l'origine pour les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ , $d = 1, 2, 3$

## Théorème

“Presque sûrement”, une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  reviendra toujours visiter l'origine. En particulier, l'ensemble des points visités  $\{S_n, n \geq 0\} = \mathbb{Z}$  presque sûrement.

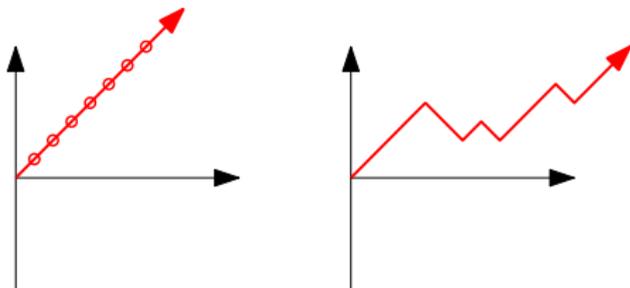
On dit que la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est **récurrente**.

# Problème du retour à l'origine pour les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ , $d = 1, 2, 3$

## Théorème

“Presque sûrement”, une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  reviendra toujours visiter l'origine. En particulier, l'ensemble des points visités  $\{S_n, n \geq 0\} = \mathbb{Z}$  presque sûrement.

On dit que la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est **récurrente**.

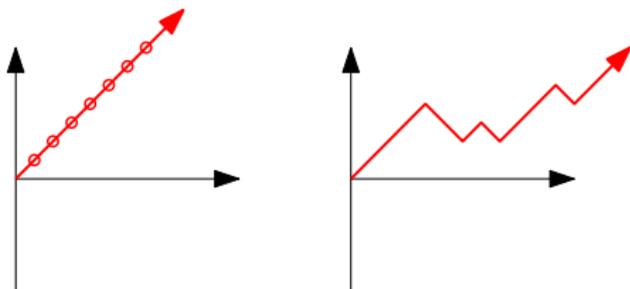


# Problème du retour à l'origine pour les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ , $d = 1, 2, 3$

## Théorème

“Presque sûrement”, une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  reviendra toujours visiter l'origine. En particulier, l'ensemble des points visités  $\{S_n, n \geq 0\} = \mathbb{Z}$  presque sûrement.

On dit que la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est **récurrente**.



**Preuve** : on veut montrer qu'avec probabilité un, il existe un  $N > 0$  tel que  $S_N = 0$ .

# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



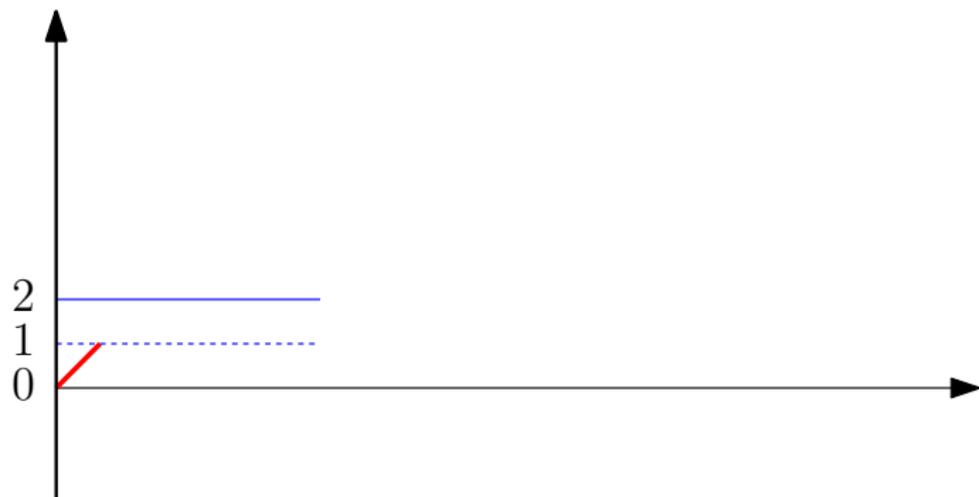
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



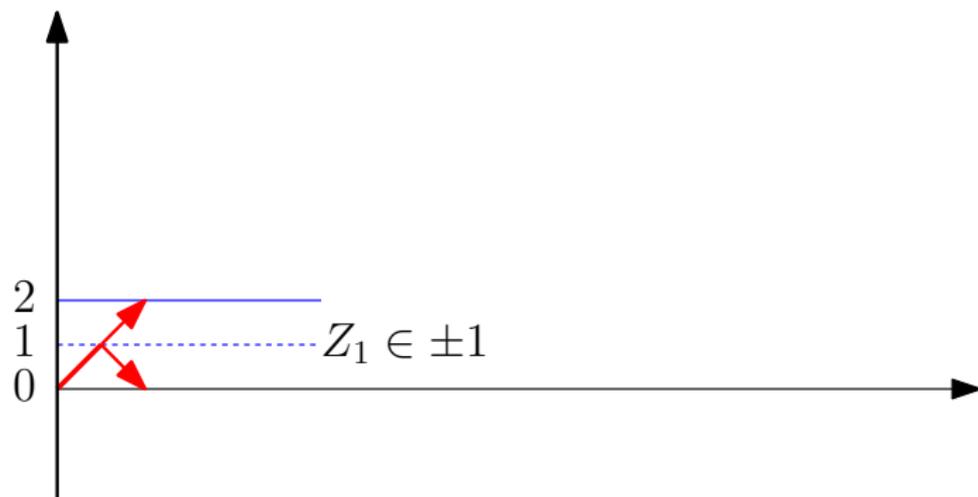
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



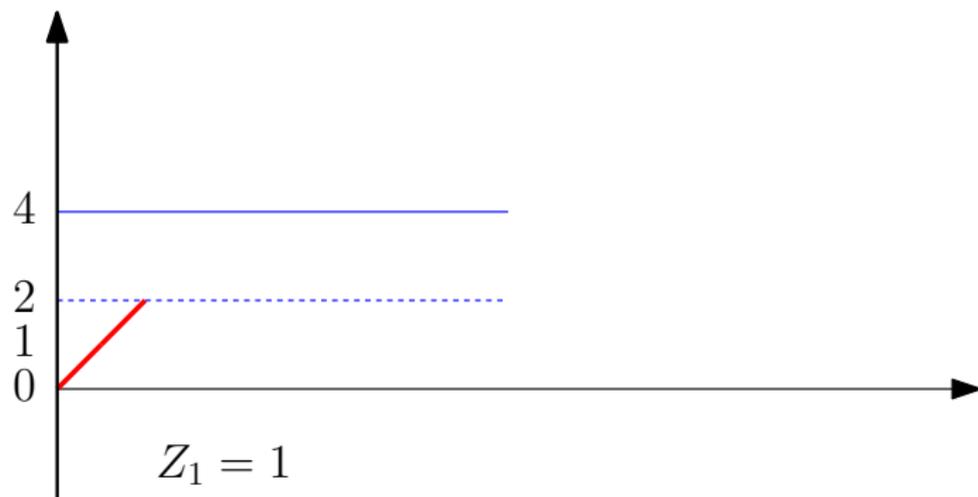
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



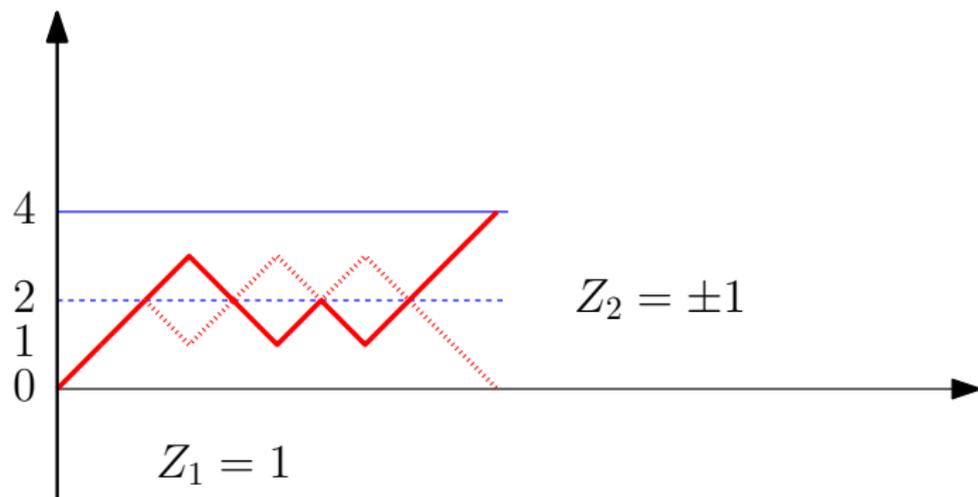
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



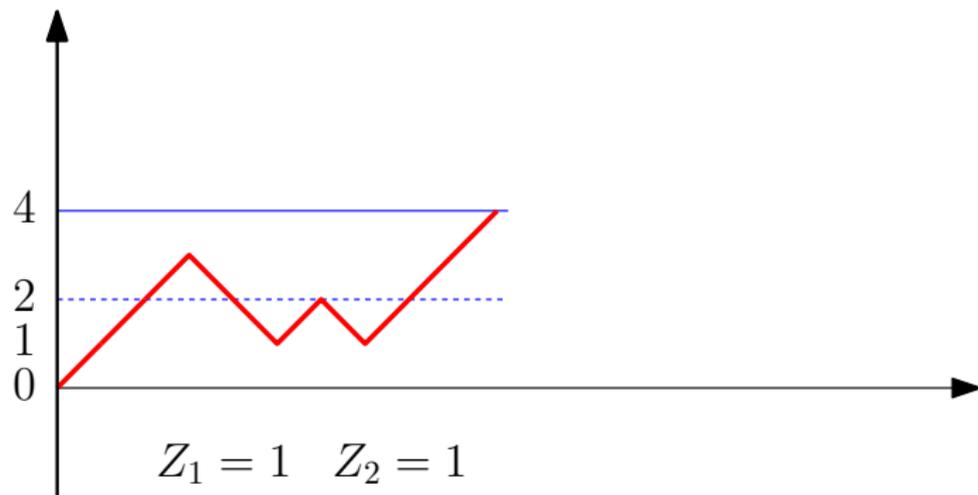
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



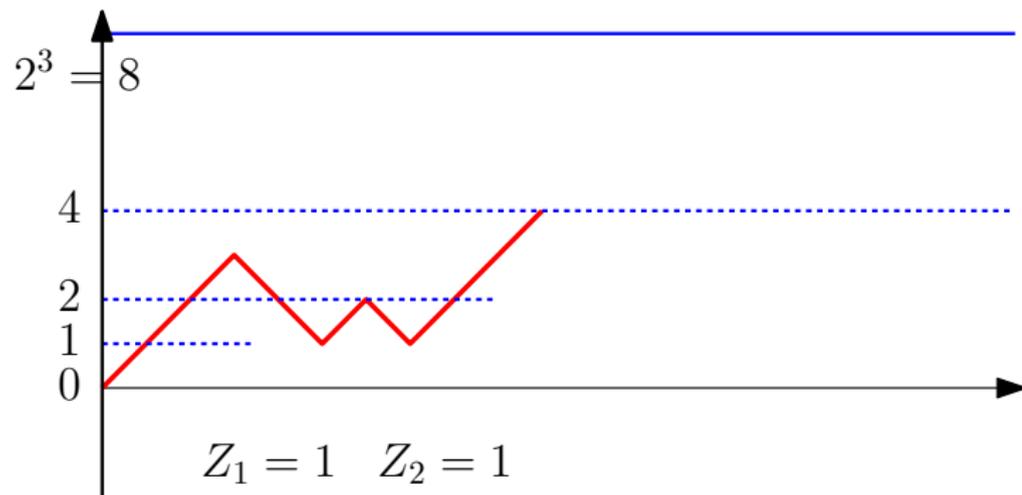
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



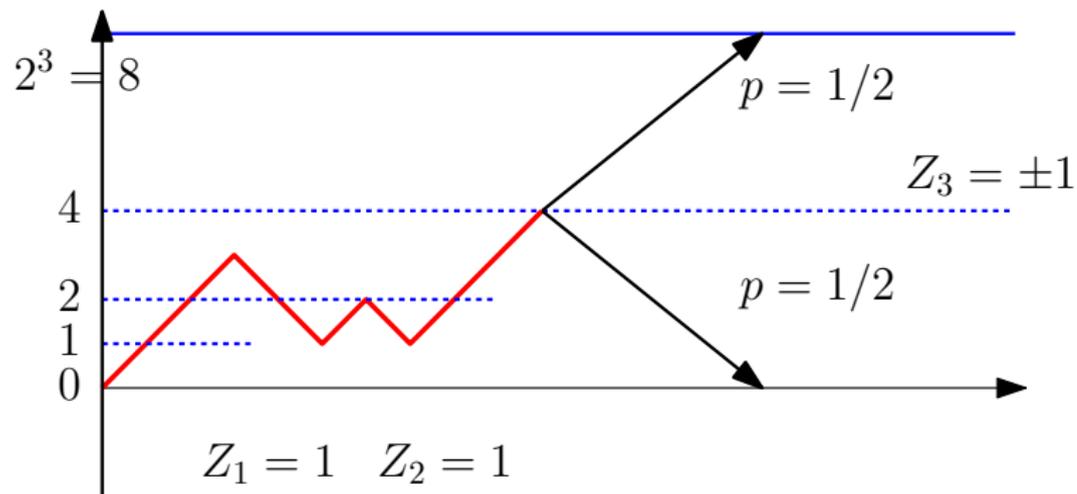
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



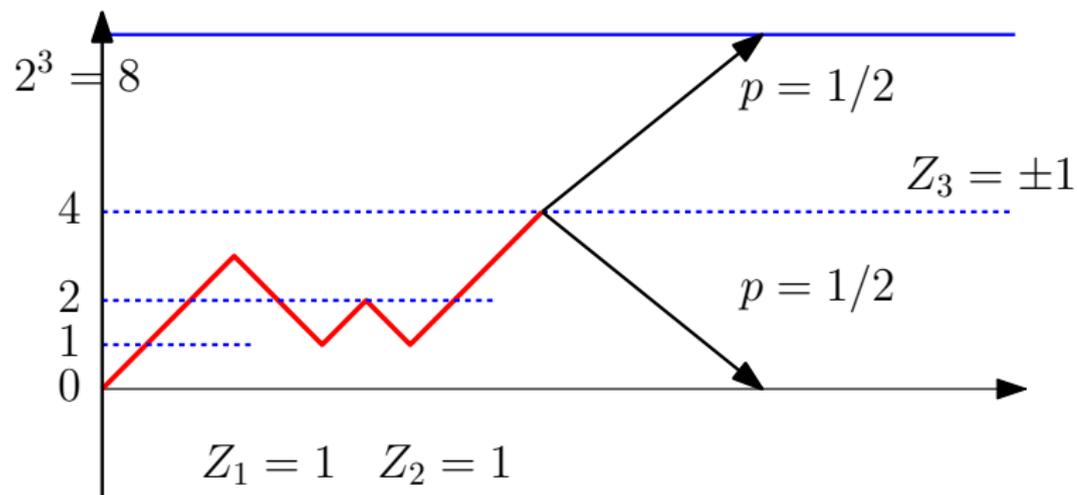
# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$

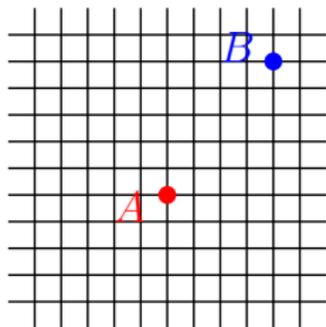


# Preuve de la récurrence sur $\mathbb{Z}$



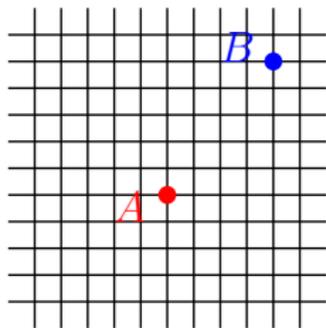
$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n \neq 0, \forall n \geq 1] &= 2\mathbb{P}[Z_i = 1, \forall i \geq 1] \\ &= 2 \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z_i = 1] \\ &= 2 \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z_i = 1] \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

## Théorème de George Polya (1921) : Récurrence sur $\mathbb{Z}^2$



Comme sur  $\mathbb{Z}$ , la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  finit toujours par revenir à son point de départ. Où encore, partant de n'importe quel point  $A$ , on est sûr d'arriver en  $B$  en temps fini.

## Théorème de George Polya (1921) : Récurrence sur $\mathbb{Z}^2$

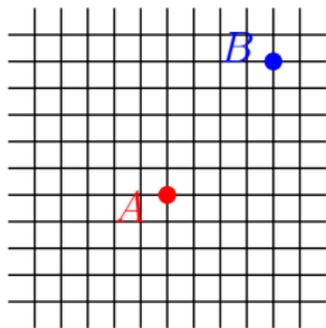


Comme sur  $\mathbb{Z}$ , la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  finit toujours par revenir à son point de départ. Où encore, partant de n'importe quel point  $A$ , on est sûr d'arriver en  $B$  en temps fini.

La preuve utilise

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[S_{2n} = (0, 0)] \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

## Théorème de George Polya (1921) : Récurrence sur $\mathbb{Z}^2$

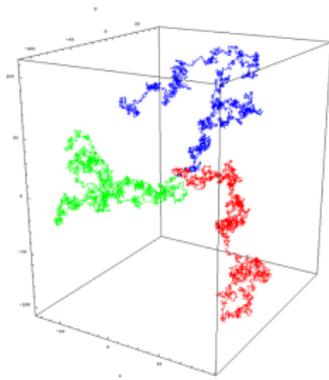


Comme sur  $\mathbb{Z}$ , la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  finit toujours par revenir à son point de départ. Où encore, partant de n'importe quel point  $A$ , on est sûr d'arriver en  $B$  en temps fini.

La preuve utilise

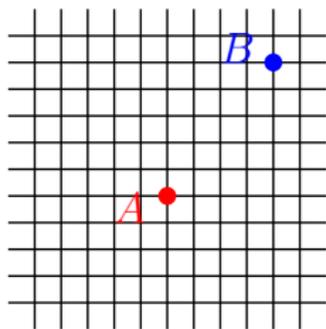
$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[S_{2n} = (0, 0)] \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

## Théorème de George Polya (1921) : Transience sur $\mathbb{Z}^3$



En revanche sur  $\mathbb{Z}^3$ , la marche aléatoire se “perd”. Elle diverge vers  $+\infty$ .

## Théorème de George Polya (1921) : Récurrence sur $\mathbb{Z}^2$

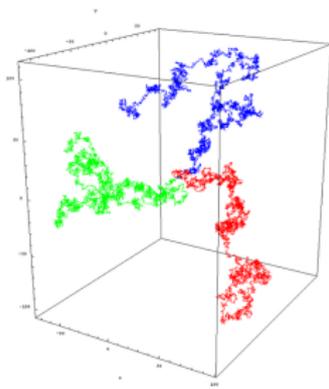


Comme sur  $\mathbb{Z}$ , la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  finit toujours par revenir à son point de départ. Où encore, partant de n'importe quel point  $A$ , on est sûr d'arriver en  $B$  en temps fini.

La preuve utilise

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[S_{2n} = (0, 0)] \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

## Théorème de George Polya (1921) : Transience sur $\mathbb{Z}^3$



En revanche sur  $\mathbb{Z}^3$ , la marche aléatoire se “perd”. Elle diverge vers  $+\infty$ . La preuve utilise

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[S_{2n} = (0, 0, 0)] \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

# Sur la dérivabilité des fonctions

- 1 Au début du XIXe siècle, les mathématiciens pensent que toute fonction continue est dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points

# Sur la dérivabilité des fonctions

- 1 Au début du XIXe siècle, les mathématiciens pensent que toute fonction continue est dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points
- 2 **André-Marie Ampère** essaye même de démontrer cette propriété en 1806 !

# Sur la dérivabilité des fonctions

- 1 Au début du XIXe siècle, les mathématiciens pensent que toute fonction continue est dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points
- 2 **André-Marie Ampère** essaye même de démontrer cette propriété en 1806 !
- 3 En 1861, **Bernhard Riemann** surprend tout le monde en proposant la fonction suivante au cours d'une conférence

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k^2 x)$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais dérivable seulement en de rares points.

# Sur la dérivabilité des fonctions

- 1 Au début du XIXe siècle, les mathématiciens pensent que toute fonction continue est dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points
- 2 **André-Marie Ampère** essaye même de démontrer cette propriété en 1806 !
- 3 En 1861, **Bernhard Riemann** surprend tout le monde en proposant la fonction suivante au cours d'une conférence

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k^2 x)$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais dérivable seulement en de rares points.

- 4 En 1872, **Karl Weierstrass** obtient une famille de fonctions continues et nulle part dérivables :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

# Sur la dérivabilité des fonctions

- 1 Au début du XIXe siècle, les mathématiciens pensent que toute fonction continue est dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points
- 2 **André-Marie Ampère** essaye même de démontrer cette propriété en 1806 !
- 3 En 1861, **Bernhard Riemann** surprend tout le monde en proposant la fonction suivante au cours d'une conférence

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k^2 x)$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais dérivable seulement en de rares points.

- 4 En 1872, **Karl Weierstrass** obtient une famille de fonctions continues et nulle part dérivables :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

- 5 En 1920, on redécouvre des travaux de **Bernard Bolzano** qui remontent à 1833 où il obtenait déjà de telles courbes.

# Comment l'existence de telles fonctions a été perçue

- 1 **Charles Hermite** déclara en 1893 :  
« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie  
lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.  
»

# Comment l'existence de telles fonctions a été perçue

- 1 **Charles Hermite** déclara en 1893 :  
« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie  
lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.  
»
- 2 **Henri Poincaré** lui, les qualifie de “monstres” ...

- 1 **Charles Hermite** déclara en 1893 :  
« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.  
»
- 2 **Henri Poincaré** lui, les qualifie de “monstres” ...

## Un parallèle intéressant

Ca rappelle un peu la découverte des nombres irrationnels par les grecs !

# Comment l'existence de telles fonctions a été perçue

- 1 **Charles Hermite** déclara en 1893 :  
« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.  
»
- 2 **Henri Poincaré** lui, les qualifie de “monstres” ...

## Un parallèle intéressant

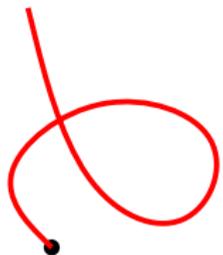
Ca rappelle un peu la découverte des nombres irrationnels par les grecs !

## Question

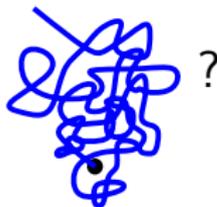
Aujourd'hui, considère-t-on ces fonctions comme des “monstres” ou à l'inverse comme étant des fonctions “typiques” ?

# A quoi ressemble une courbe “typique” du plan ?

A votre avis, si on “tire au hasard” une courbe du plan, elle ressemblera à

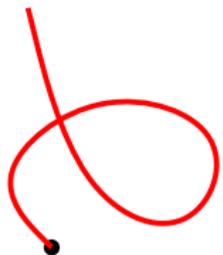


ou

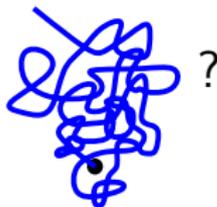


# A quoi ressemble une courbe “typique” du plan ?

A votre avis, si on “tire au hasard” une courbe du plan, elle ressemblera à



ou

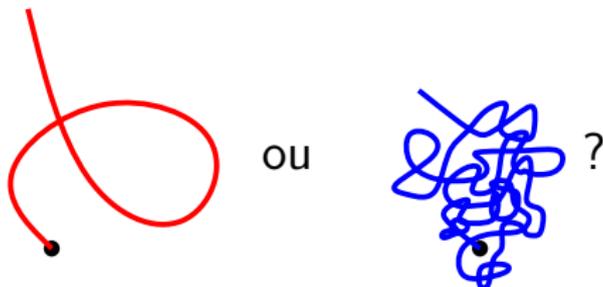


## Question

Comment s’y prendre pour “tirer au hasard” un courbe du plan ?

# A quoi ressemble une courbe “typique” du plan ?

A votre avis, si on “tire au hasard” une courbe du plan, elle ressemblera à

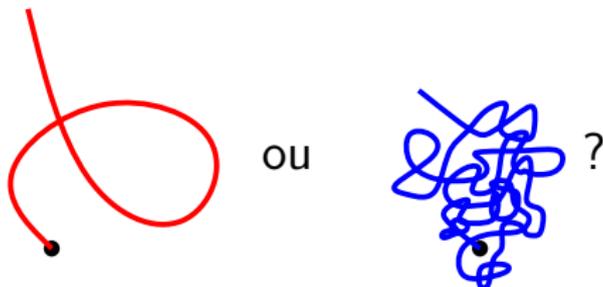


## Question

Comment s’y prendre pour “tirer au hasard” une courbe du plan ? Plus précisément, on veut choisir “au hasard” une courbe parmi toutes les courbes  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ , l’espace des chemins continus à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

# A quoi ressemble une courbe “typique” du plan ?

A votre avis, si on “tire au hasard” une courbe du plan, elle ressemblera à



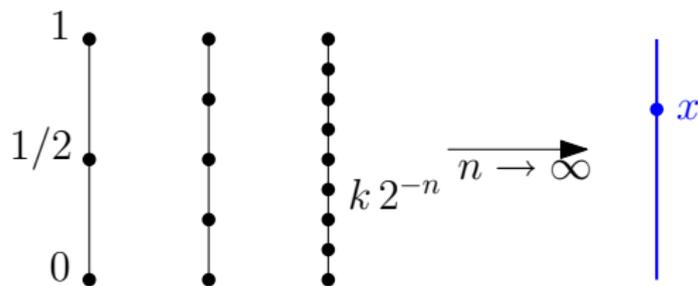
## Question

Comment s’y prendre pour “tirer au hasard” une courbe du plan ? Plus précisément, on veut choisir “au hasard” une courbe parmi toutes les courbes  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ , l’espace des chemins continus à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Problème** : cet espace est très “gros” : vu comme espace vectoriel, il est de dimension infinie !

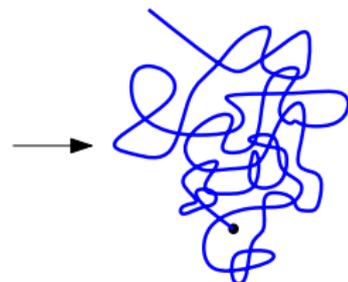
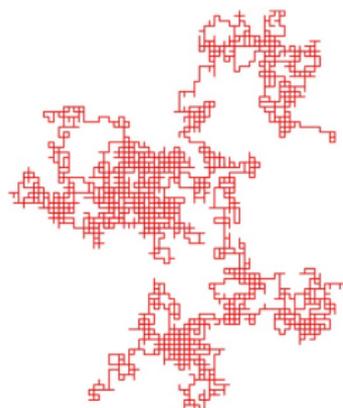
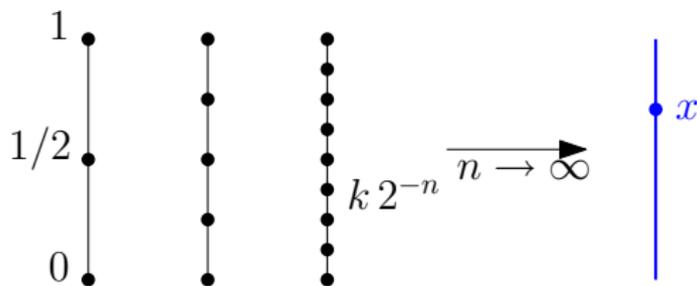
# Une approche naturelle : discrétiser le problème

Prenons un cas beaucoup plus simple : on voudrait tirer au hasard un réel  $x \in [0, 1]$ .



# Une approche naturelle : discrétiser le problème

Prenons un cas beaucoup plus simple : on voudrait tirer au hasard un réel  $x \in [0, 1]$ .

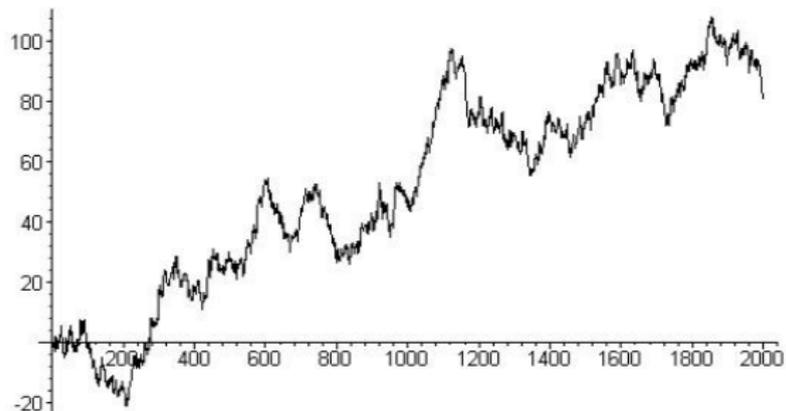


Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est dérivable NULLE-PART !



# Le mouvement Brownien est dérivable NULLE-PART !



# Marches aléatoires sur les groupes finis

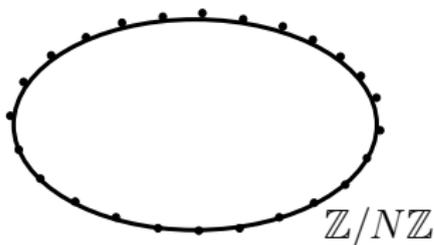
- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$

# Marches aléatoires sur les groupes finis

- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$
- 2 L'exemple le plus simple de groupe fini :  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On se pose des questions du type : **quel est le temps de mélange ?**

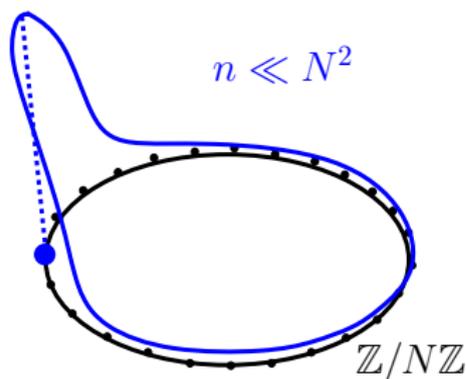
# Marches aléatoires sur les groupes finis

- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$
- 2 L'exemple le plus simple de groupe fini :  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On se pose des questions du type : **quel est le temps de mélange ?**



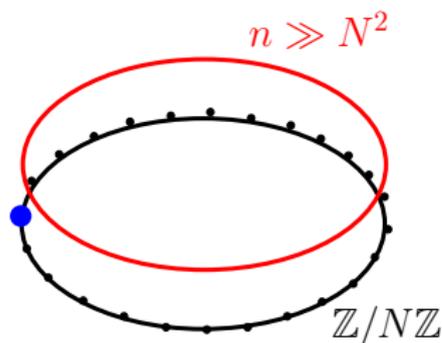
# Marches aléatoires sur les groupes finis

- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$
- 2 L'exemple le plus simple de groupe fini :  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On se pose des questions du type : **quel est le temps de mélange ?**



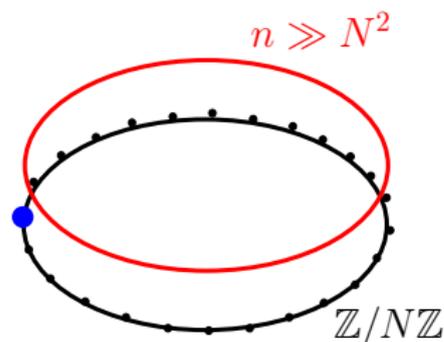
# Marches aléatoires sur les groupes finis

- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$
- 2 L'exemple le plus simple de groupe fini :  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On se pose des questions du type : **quel est le temps de mélange ?**



# Marches aléatoires sur les groupes finis

- 1 On vient d'étudier les marches aléatoires sur les groupes suivants  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, +)$
- 2 L'exemple le plus simple de groupe fini :  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On se pose des questions du type : **quel est le temps de mélange ?**



Ici le temps de mélange était donc d'ordre  $\tau_N \approx N^2$ .

- 3 Un autre groupe intéressant : le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_N$ , cad le groupe de toutes les permutations à  $N$  éléments ( $|\mathfrak{S}_N| = N!$ ).

# Une marche aléatoire sur le groupe symétrique



- ▶ Dans les années 1980, **Persi Diaconis** a mis en évidence un phénomène important appelé **phénomène de cut-off** : il a trouvé des marches aléatoires qui restent longtemps loin de l'équilibre et qui tout à coup se "mélangent" très rapidement.

# Une marche aléatoire sur le groupe symétrique



- ▶ Dans les années 1980, **Persi Diaconis** a mis en évidence un phénomène important appelé **phénomène de cut-off** : il a trouvé des marches aléatoires qui restent longtemps loin de l'équilibre et qui tout à coup se "mélangent" très rapidement.
- ▶ L'un des exemples phares est celui d'une marche aléatoire sur  $\mathfrak{S}_N$  qui modélise le fameux "riffle-shuffle".

# Une marche aléatoire sur le groupe symétrique



- ▶ Dans les années 1980, **Persi Diaconis** a mis en évidence un phénomène important appelé **phénomène de cut-off** : il a trouvé des marches aléatoires qui restent longtemps loin de l'équilibre et qui tout à coup se "mélangent" très rapidement.
- ▶ L'un des exemples phares est celui d'une marche aléatoire sur  $\mathfrak{S}_N$  qui modélise le fameux "riffle-shuffle".
- ▶ Lorsque  $N = 52$  ?

# Une marche aléatoire sur le groupe symétrique



- ▶ Dans les années 1980, **Persi Diaconis** a mis en évidence un phénomène important appelé **phénomène de cut-off** : il a trouvé des marches aléatoires qui restent longtemps loin de l'équilibre et qui tout à coup se "mélangent" très rapidement.
- ▶ L'un des exemples phares est celui d'une marche aléatoire sur  $\mathfrak{S}_N$  qui modélise le fameux "riffle-shuffle".
- ▶ Lorsque  $N = 52$  ?  $|\mathfrak{S}_{52}| = 52! \approx 10^{68}$ . Donc ce groupe fini est énorme (comparer aux  $10^{78}$  atomes dans l'univers !)

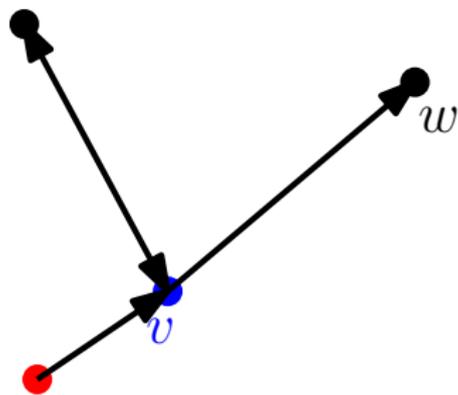
# Une marche aléatoire sur le groupe symétrique



- ▶ Dans les années 1980, **Persi Diaconis** a mis en évidence un phénomène important appelé **phénomène de cut-off** : il a trouvé des marches aléatoires qui restent longtemps loin de l'équilibre et qui tout à coup se "mélangent" très rapidement.
- ▶ L'un des exemples phares est celui d'une marche aléatoire sur  $\mathfrak{S}_N$  qui modélise le fameux "riffle-shuffle".
- ▶ Lorsque  $N = 52$  ?  $|\mathfrak{S}_{52}| = 52! \approx 10^{68}$ . Donc ce groupe fini est énorme (comparer aux  $10^{78}$  atomes dans l'univers !)  
Diaconis montre que 7 riffle shuffles suffisent pour bien mélanger un paquet de cartes. En revanche avec seulement 6 shuffles, on est très loin d'être bien mélangé ! (Il a un tour de magie qui illustre ça).

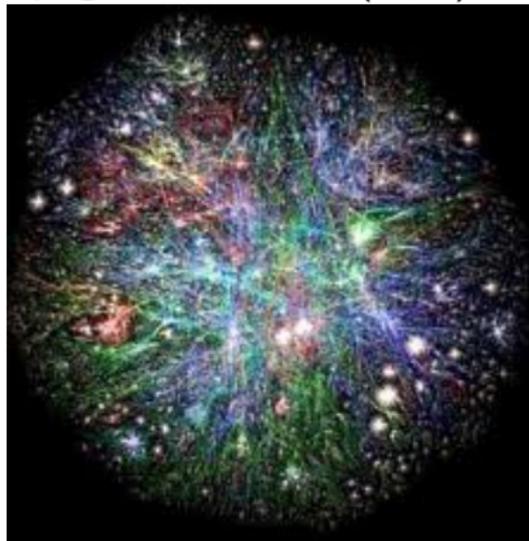
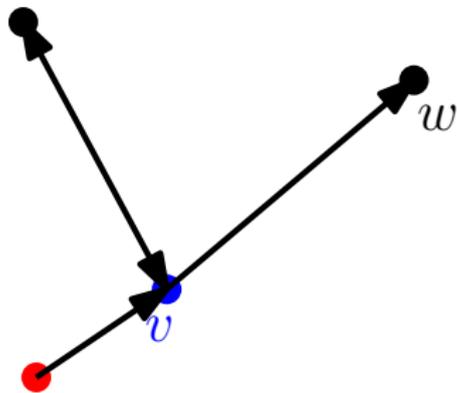
# Marches aléatoires et Google : le graphe du Web

On s'intéresse au **graphe des pages web** :  $G = (V, E)$ .



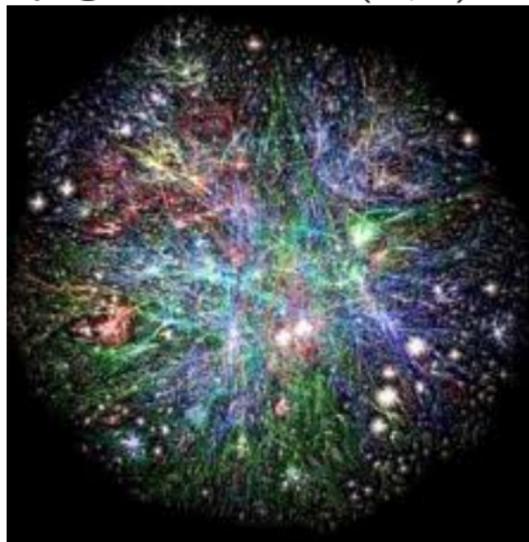
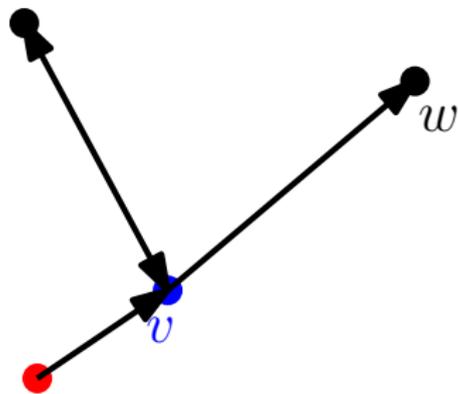
# Marches aléatoires et Google : le graphe du Web

On s'intéresse au **graphe des pages web** :  $G = (V, E)$ .



# Marches aléatoires et Google : le graphe du Web

On s'intéresse au **graphe des pages web** :  $G = (V, E)$ .

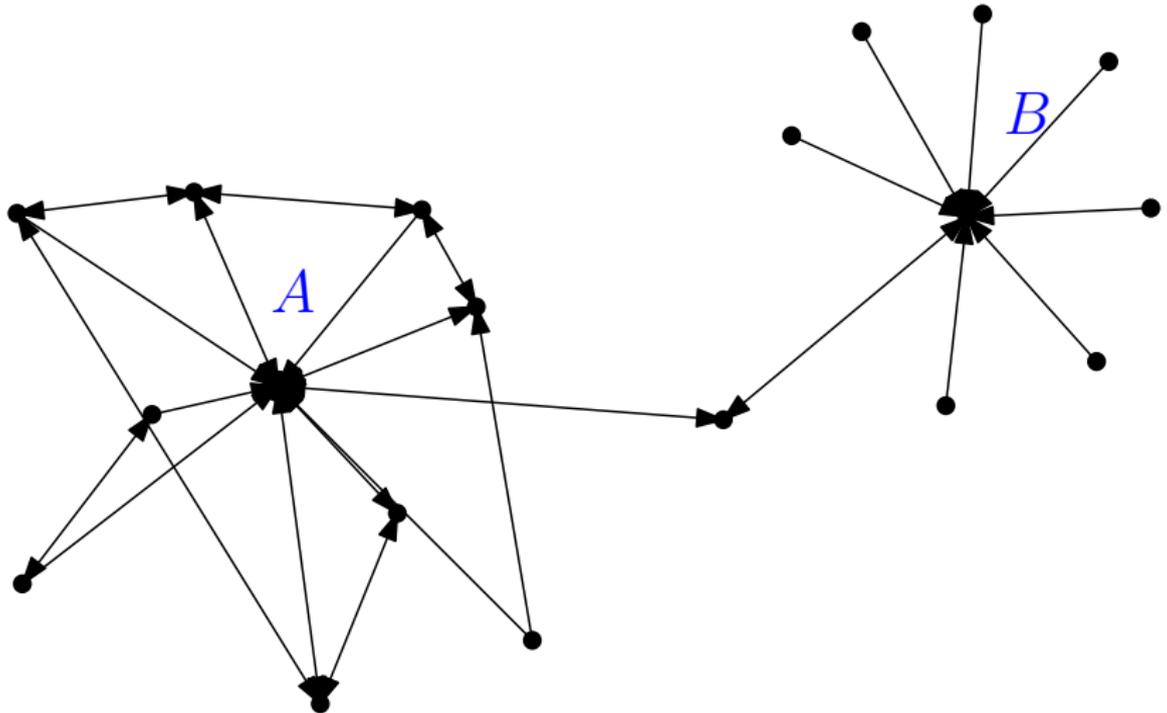


*On 25 July 2008, Google software engineers Jesse Alpert and Nissan Hajaj announced that Google Search had discovered one trillion (i.e.  $10^{12}$ ) unique URLs*

$$\#\text{pages web} = |V| \approx 10^{12}$$

# “page ranking” : Altavista v.s. Google

# “page ranking” : Altavista v.s. Google



MERCI !