

# Examen Math 6

9 juin 2009

–Durée 2h.–

Les correcteurs tiendront largement compte de la qualité de la rédaction. Le barème est approximatif.

**Exercice 1 (3 points).** On considère une fonction holomorphe d'un ouvert  $U$  connexe de  $\mathbb{C}$  contenant 0 à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et vérifiant

$$\forall z \in U, 2\Re f(z) = (\Im f(z))^2$$

et  $\Im f(0) = \sqrt{2}$ . Déterminer  $f$ .

**Exercice 2 (2 points).** Donner la valeur de l'intégrale  $\int_{C(0,2)} (\bar{z}^2 + \frac{1}{1-z}) dz$ .

**Exercice 3 (2 points).** Soit la fonction  $f(z) = \frac{\sin z}{3z}$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée au voisinage de  $z = 0$ .
2. Pour tout  $R > 0$ , en déduire la valeur de l'intégrale  $\int_{C(0,R)} f(z) dz$ .
3. La fonction est-elle bornée sur  $\mathbb{C}$  ?

**Exercice 4 (3 points).** Soit  $R > 0$  un réel et  $\gamma$  le cercle de centre  $\pi$  et de rayon  $R$  orienté dans le sens direct. Soit

$$g(z) = \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^5}.$$

Déterminez en fonction de  $R$  la valeur de

$$I = \int_{\gamma} g(z) dz.$$

**Exercice 5 (3 points).** Soit  $R$  un réel différent de 0 et de 1, et  $\gamma_R$  le cercle de centre 0 et de rayon  $R$  orienté dans le sens direct. Soit  $f(z) = \frac{\exp(z^2)}{z^2 + iz}$ .

1. Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{z^2 + iz}$ .
2. Déterminez en fonction de  $R$  la valeur de l'intégrale

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

**Problème (9 points).** Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $R > 2$  trois réels, et  $f(z) = \frac{z + i \exp(i\alpha z)}{z^4 + 5\beta^2 z^2 + 4\beta^4}$ . On désigne par  $\gamma_R$  le circuit défini par la réunion du segment réel  $[-R, R]$  (parcouru de gauche à droite) avec le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon  $R$ , parcouru dans le sens direct.

1. Déterminez les pôles de la fonction  $f$ .
2. En utilisant le théorème des résidus, trouver la valeur de l'intégrale  $I_R = \int_{\gamma_R} f(z)dz$ . On prendra soin de préciser toutes les hypothèses nécessaires au théorème.
3. Montrer que si  $\gamma_R^+$  est le demi-cercle supérieur de rayon  $R$  et de centre 0, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)dz = 0.$$

4. En déduire la valeur des intégrales réelles

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^4 + 5x^2\beta^2 + 4\beta^4} dx \text{ et } J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin \alpha x}{x^4 + 5x^2\beta^2 + 4\beta^4} dx.$$